УДК 534.222.1

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ АКУСТИЧЕСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ АТМОСФЕРЫ, ИНИЦИИРОВАННОГО ИМПУЛЬСОМ НА НИЖНЕЙ ГРАНИЦЕ

**Е.С. Смирнова[1, 2], С.Ю. Доброхотов[1]**

[1]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия,
smirnova.ekaterina.serg@gmail.com
[2]Балтийский Федеральный Университет им. И. Канта, Калининград, Россия

# MODELING OF VERTICAL PROPAGATION OF ATMOSPHERIC ACOUSTIC DISTURBANCE INITIATED BY A PULSE AT THE LOWER BOUNDARY

**E.S. Smirnova[1, 2], S.Yu. Dobrokhotov[1]**

[1]Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia,
smirnova.ekaterina.serg@gmail.com
[2] Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia

**Аннотация.** Для моделирования вертикального распространения акустического возмущения атмосферного газа, инициированного некоторым импульсом на нижней границе области, в данной работе строятся как аналитические, так и асимптотические решения начально-краевой задачи для одномерного уравнения Клейна-Гордона, к которому может быть сведена одномерная система уравнений гидротермодинамики. В работе рассматриваются случаи постоянного и переменного значения высоты однородной атмосферы.

**Ключевые слова:** атмосфера, акустика, эволюция возмущения, начально-краевая задача.

**Abstract.** To simulate the vertical propagation of an acoustic disturbance of atmospheric gas initiated by a certain pulse at the lower boundary of the region, in this work, both analytical and asymptotic solutions of the initial boundary value problem are constructed for the one-dimensional Klein-Gordon equation, to which the one-dimensional system of hydrothermodynamics equations can be reduced. The work considers the cases of constant and variable values of the height of a homogeneous atmosphere.

**Keywords:** atmosphere, acoustics, evolution of disturbance, initial boundary value problem.

## ВВЕДЕНИЕ

Для моделирования волновых возмущений в атмосферном газе ранее решалась начально-краевая задача для системы уравнений гидротермодинамики. Данный подход имел ряд недостатков: в одномерном случае такая система имеет 3 уравнения, в трехмерном — 5, что в свою очередь требует аналогичного количества начальных и краевых условий. В данной работе кратко изложен подход, основанный на редуцировании одномерной системы уравнений гидротермодинамики к одномерному уравнению Клейна-Гордона для вертикальной скорости акустического возмущения. Основным параметром в двух таких начально-краевых задачах является высота однородной атмосферы H. Фиксирование постоянного значения $H = H_0$ или же рассмотрение случая произвольной зависимости от высоты $H = H(z)$ определяет начально-краевую задачу для уравнения Клейна-Гордона с постоянными или переменным коэффициентами соответственно.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему уравнений гидротермодинамики, которая описывает поведение газа или жидкости как недиссипативной среды, что позволяет использовать её для моделирования эволюции движения, которое возможно в газовой среде [Брежнев и др., 1994]. В данной работе мы ограничиваемся рассмотрением одномерного случая, который позволит описать вертикальное распространение плоских акустических волн [Leble, Perelomova, 2013]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\gamma-2}{2\gamma H(0)} - \frac{H(z)}{H(0)}\frac{\partial}{\partial z}\right)P + \frac{\Phi}{\gamma H(0)\rho_0}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\gamma g \rho_0 H(0)\frac{\partial U}{\partial z} - g\rho_0 H(0)\frac{\gamma-2}{2H(z)}U, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{g\rho_0 H(z)}{H(0)}\left(\gamma - 1 + \gamma\frac{dH(z)}{dz}\right)U\,. \quad (3)$$

Здесь $P, \Phi, U$ — функции, связанные с реальными значениями как

$$P = p' \cdot \exp\left(\int_0^z \frac{dz'}{2H(z')}\right),$$

$$\Phi = \varphi' \cdot \exp\left(\int_0^z \frac{dz'}{2H(z')}\right),$$

$$U = V \cdot \exp\left(-\int_0^z \frac{dz'}{2H(z')}\right),$$

где $p'(z)$ и $\rho'(z)$ – возмущение давления и плотности на фоне устойчивых стационарных функций $\bar{p}(z), \bar{\rho}(z)$, возмущение энтропии $\varphi' = p' - \gamma\rho'\,\bar{p}/\bar{\rho}$, $\gamma = C_p/C_v$, $C_p$ , $C_v$ — молярные теплоемкости при постоянном давлении и объеме соответственно, $g = g_z$ — вертикальная составляющая вектора поля ускорения силы тяжести $\vec{g}$, $\rho_0$ — плотность воздуха на нижней границе.

Система уравнений одномерной гидротермодинамики (1)–(3) простыми операциями сводится к уравнению Клейна-Гордона. Продифференцируем уравнение (1) по t и выразим производные $\partial P/\partial t$ и $\partial \Phi/\partial t$ из (2) и (3) как функцию U и ее производных. Наконец, получим:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \tilde{c}^2(z)\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \tilde{a}(z)U = 0,$$

где $\tilde{c}(z) = \sqrt{\gamma g H(z)}, \tilde{a}(z) = \frac{\gamma g}{4H(z)}\left(1 + 2\frac{dH(z)}{dz}\right).$ (4)

Дополним последнее уравнение начальными и граничными условиями:

$U(z, t = 0) = U_t(z, t = 0) = 0,$

$U(0, t) = F(t),$ при $t > 0,$

$U(0, t) = 0,$ при $t \le 0.$ (5)

В качестве конкретного примера граничного условия будем использовать функцию вида:

$F(t) = A\lambda^2 t e^{-\lambda t},$ (6)

где $\lambda$ — характеризует длительность импульса на границе, $A$ — амплитуда возмущения скорости на нижней границе.

Последующее построение формальных асимптотик решения начально-краевой задачи (4)–(5) требует введения малого параметра. Такой может быть получен при переходе к безразмерным переменным таким, что $t = T\tau, z = Zy$, где Z — характерный размер области, а $T$ — характерное время, в течение которого изучается процесс при соотношении $Z = c_0 T$, где $c_0 = \sqrt{\gamma g H_0}$ — скорость звука близ нижней границы. Тогда (4) принимает вид:

$h^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - c(y)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) + a(y)U = 0,$ (7)

где $h = 1/\sqrt{a_0}T$ – малый параметр, $a_0 = \gamma g/4H_0$, а функции коэффициентов:

$$\mathrm{c}(y) = \frac{\tilde{\mathrm{c}}(z)}{\mathrm{c}_0} = \sqrt{\frac{H(Zy)}{H_0}},$$

$a(y) = \frac{\tilde{a}(z)}{a_0} = \frac{H_0}{H(Zy)}\left(1 + \frac{2}{Z}\frac{dH(\mathrm{Z}y)}{dy}\right).$ (8)

Дополним (7) аналогичными (5) начальными и краевыми условиями, а пример краевой функции (6) в таком случае имеет вид $F(\tau) = A\mu^2 \tau e^{-\mu\tau},\ \mu = \lambda T.$

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОСТОЯННОГО ЗНАЧЕНИЯ H=H₀

Случай, когда рассматривается постоянное значение высоты однородной атмосферы $\mathrm{H} = \mathrm{H}_0$, соответствует уравнению (7) с постоянными коэффициентами. Выберем значение $\mathrm{H}_0 = \mathrm{H}(\mathrm{z} = 0) = \mathrm{H}(\mathrm{y} = 0)$, тогда коэффициенты (8) принимают постоянное значение: $\mathrm{c}(y) = 1,\ a(y) = 1.$ Для начально-краевой задачи для уравнения Клейна-Гордона с постоянными коэффициентами найдено аналитическое решение имеющее вид [Смирнова, 2023]:

$U(y, \tau) = U_1(y, \tau) + U_2(y, \tau),$ (9)

$U_1(y, \tau) = \frac{1}{\pi h}\, Re \int_0^1 \mathcal{F}\left(\frac{i\eta}{h}\right) e^{\frac{i\eta\tau}{h} - \frac{y}{h}\sqrt{1-\eta^2}}\, d\eta,$ (10)

$U_2(y, \tau) = \frac{1}{\pi h}\, Re \int_1^\infty \mathcal{F}\left(\frac{i\eta}{h}\right) e^{\frac{i\eta\tau}{h} - \frac{iy}{h}\sqrt{\eta^2-1}}\, d\eta,$ (11)

где $\mathcal{F}(i\eta/h)$ — Лаплас-образ граничного условия в (5). Данное аналитическое решение состоит из двух слагаемых: погранслойного $U_1(y, \tau)$, которое быстро убывает при отдалении от точки $y = 0$, и осциллирующего $U_2(y, \tau)$, которое описывает распространяющуюся вверх волну. Для интервала $\tau > y > \delta > 0$ справедливы следующие асимптотики [Смирнова, 2023]:

$U_1(y, \tau) \approx \frac{e^{-y/h}}{\pi\tau}\mathrm{Re}(\mathcal{F}(0)),$ (12)

$U_2(y, \tau) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi h}}\frac{y}{(\tau^2-y^2)^{3/4}}\mathrm{Re}\left(e^{\frac{i}{h}\sqrt{\tau^2-y^2}}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\, \mathcal{F}\left(\frac{i}{h}\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2-y^2}}\right)\right).$ (13)

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЕРЕМЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ H=H(Z)

Известно, что высота однородной атмосферы имеет сложную зависимость от вертикальной координаты, однако решение поставленной задачи в случае переменного значения $H = H(z)$ требует некоторый явный вид такой функции. В данной работе используется аппроксимация следующего вида:

$H(z) = 7000 + 0.135\ \tanh^5\frac{z}{120000},$ (14)

которая позволяет выбрать Z=217330 м, соответствующее значению $y = 1$.

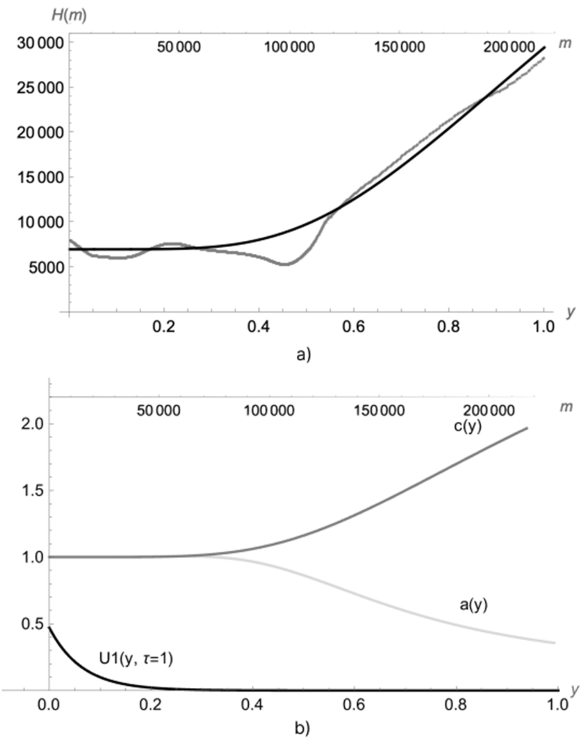
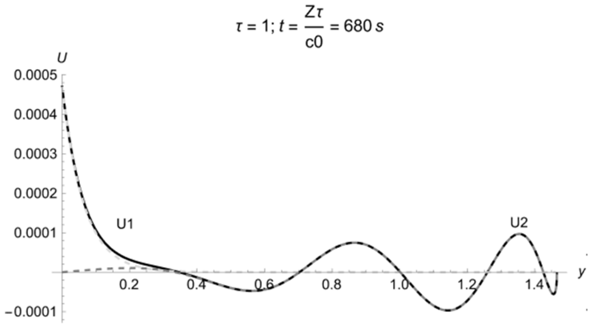
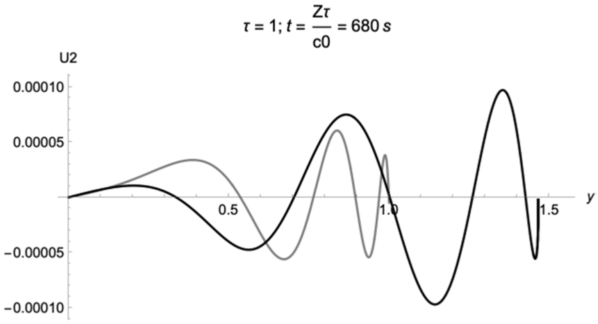



*Рис. 1.* (a) Высота однородной атмосферы H(z), полученная из набора численных данных для температуры H=H(T(z)) (серый), и используемое приближение (14) (черный); (b) Функции c(y) (темно-серый), a(y) (светло-серый) (8), нормированная асимптотика $U_1$ (12)

На рис. 1 (b) видно, что вклад погранслойной части решения $U_1$ ограничен небольшой окрестностью $y = 0$, которая полностью покрывается областью, где функции $\mathrm{c}(y), a(y)$ принимают постоянное значение. Это даёт основание использовать уже существующее погранслойное решение (12), (14) в том числе и для случая переменных $\mathrm{c}(y), a(y)$, что эквивалентно постоянству значения высоты однородной атмосферы $H$ при малых $z$. Для волновой части решения $U_2$ строится формальная асимптотика методом ВКБ с применением канонического оператора Маслова [Маслов, Федорюк, 1976], принимая в качестве начального условия существующее аналитическое решение (9)–(11) [Dobrokhotov, Smirnova, 2024].




a)




b)

*Рис. 2*. а) Асимптотика решения начально-краевой задачи для граничного условия (6): светло-серый пунктир — $U_1$, темно-серый пунктир — $U_2$, черный — $U = U_1 + U_2$; б) Сравнение поведения асимптотик волновой части решения $U_2$ для случая постоянного (серый) и переменного (черный) значения высоты однородной атмосферы

Работа Смирновой Е.С. выполнена при финансовой поддержке БФУ им. Канта в рамках научного проекта №122051300013-8, работа Доброхотова С.Ю. выполнена при финансовой поддержке Госзадания № 123021700044-0.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Брежнев Ю.В., Кшевецкий С.П., Лебле С.Б. Линейная инициализация линейных полей // Известия АН. Физика атмосферы и океана. 1994. Е. 30(1). С. 86–90.

Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М. Наука, 1976. 296 с.

Смирнова Е.С. Асимптотика решения одной начально-краевой задачи для одномерного уравнения Клейна–Гордона на полуоси // Матем. заметки. 2023. Т. 114, № 4. С. 602–614.

Dobrokhotov S., Smirnova E. Asymptotics of the Solution of the Initial Boundary Value Problem for the One-Dimensional Klein–Gordon Equation with Variable Coefficients // Russian Journal of Mathematical Physics. 2024. V. 31, N 2 (принята к печати).

Leble S., Perelomova A. Problem of proper decomposition and initialization of acoustic and entropy modes in a gas affected by the mass force // Appl. Math. Model. 2013. V. 13. P. 629–635.