

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ОТРАЖЕННЫХ И РАССЕЯННЫХ ВОЛН ПО МЕТОДУ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В.В. Носикова^{1,2}, Л.Н. Пестов¹

¹ Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия,
vnosikova@kantiana.ru

² Калининградский филиал Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн
им. Н.В. Пушкова РАН, Калининград, Россия

REFLECTED AND SCATTERED WAVE IMAGING BY THE BOUNDARY CONTROL METHOD, NUMERICAL EXPERIMENT

V.V. Nosikova^{1,2}, L.N. Pestov¹

¹ Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia,
vnosikova@kantiana.ru

² West Department of Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Wave Propagation of RAS,
Kaliningrad, Russia

Аннотация. В работе приводятся результаты численного эксперимента по визуализации распространения отраженных и рассеянных волн на основе метода граничного управления. Визуализация выполняется в полугеодезических координатах и основана на треугольной факторизации связывающего оператора – симметричной положительной матрицы C . В силу плохой обусловленности матрицы C для факторизации по методу Холецкого необходимо выполнять регуляризацию, которая приводит к сильному искажению фронта прямой волны, при этом фронты рассеянных и отраженных волн искажаются слабо. После удаления прямой волны с помощью F-K-фильтрации удается получить визуализацию отраженных и рассеянных волн для симулированных данных для двух акустических моделей.

Ключевые слова: метод граничного управления, визуализация волн, численный эксперимент.

Abstract. The paper presents the results of a numerical experiment to visualize the propagation of reflected and scattered waves based on the boundary control method. Visualization is performed in semi-geodesic coordinates and is based on the triangular factorization of the connecting operator – a symmetric positive matrix C . Due to the poor conditionality of the matrix C it is necessary to perform regularization for factorization using the Cholesky method, which leads to a strong distortion of the direct wave front. But the fronts of scattered and reflected waves are weakly distorted. After removing the direct wave F-K filtering provides visualization of reflected and scattered waves for the simulated data for two acoustic models.

Keywords: boundary control method, wave visualization, numerical experiment.

ВВЕДЕНИЕ

Задача визуализации волн в условиях обратной задачи на основе метода граничного управления впервые была рассмотрена Белишевым М.И. в [Belishev, 2002]. В данной работе, напротив, рассматривается упрощенная задача визуализации фронтов только отраженных и рассеянных волн. Визуализация выполняется в полугеодезических координатах и основана на треугольной факторизации связывающего оператора [Белишев, Пушницкий, 1997] — в данной работе это симметричная положительная матрица C .

Рассмотрим начально-краевую задачу для волнового уравнения в полуплоскости:

$$\frac{1}{c^2(x,y)} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, y > 0, t > 0, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0, u|_{y=0} = f \delta_{x_\alpha}, \quad (2)$$

где $f(t)$ — импульс, $\delta_{x_\alpha}(x) = \delta(x - x_\alpha)$ — функция Дирака, точка x_α пробегает отрезок $\Gamma_0 \subset \Gamma = \{y = 0\}$. Пусть $\Omega^T = \cup_{x_\alpha \in \Gamma_0} B(x_\alpha, T)$ — область, захваченная волнами к моменту T , где $B(x_\alpha, T)$ — риманов полушар с центром в точке $(x_\alpha, 0)$ радиуса T с конформно-евклидовой метрикой, определяемой скоростью c . Обратная задача состоит в восстановлении скорости c в Ω^T по измерениям $g(x, t; x_\alpha) := u_y(x, 0, t; x_\alpha)$, $x \in \Gamma_0$, $t \in [0, 2T]$. Явную линейную процедуру решения этой задачи дает метод граничного управления [Belishev, 1988,

2007], но в силу ее некорректности имеются трудности с реализацией. Некоторые результаты численной реализации представлены в [Belishev, Gotlib, 1999; Belishev et al., 2016].

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В данной работе без решения обратной задачи были построены фронты отраженных и рассеянных волн в лучевых (полугеодезических) координатах, используя подход, основанный на формуле Благовещенского, которая выражает скалярное произведение волн в $L_2(\Omega^T)$ через данные обратной задачи.

В основе эксперимента лежит формула вычисления $C_{\alpha\beta}$ по данным обратной задачи:

$$C_{\alpha\beta} := \int_{\Omega^T} u_t(x, y, t_\alpha; x_\alpha) u_t(x, y, t_\beta; x_\beta) \frac{dx dy}{c^2(x, y)} = \frac{1}{2} \int_0^{t_\alpha} f'(t + t_\alpha) [g(x_\alpha, t_\beta - t; x_\beta) - g(x_\alpha, t + t_\beta; x_\beta)] dt - \frac{1}{2} \int_0^{t_\alpha} g(x_\beta, t + t_\alpha; x_\alpha) [f'(t + t_\beta) + f'(t_\beta - t)] dt. \quad (3)$$

В силу того, что матрица C плохо обусловлена, невозможно непосредственно выполнить факторизацию, например, по методу Холецкого. Но после регуляризации путем замены C на $C + aI$, $a > 0$ и треугольной факторизации визуализация распространения волн становится возможной. Однако регуляризация приводит к сильному искажению

фронта прямой волны, хотя при этом фронты рассеянных и отраженных волн искажаются слабо.

В качестве данных использовались симулированные данные для двух акустических моделей (рис. 1, 2), одна из которых содержит дифракторы.

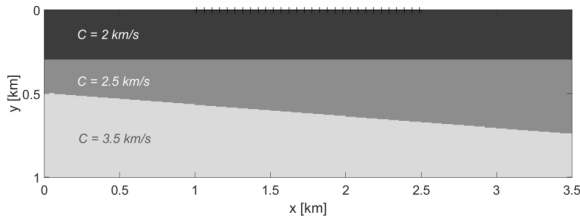


Рис. 1. Скоростная модель с двумя границами

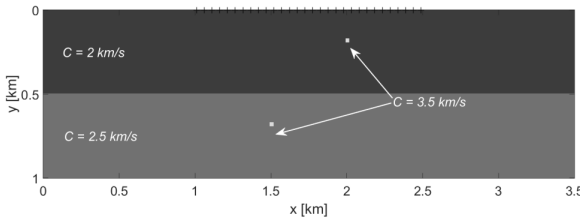


Рис. 2. Скоростная модель с границей и двумя дифракторами

Множество $\Sigma := \Gamma_0 \times [0, T]$, следуя Белишеву М.И., будем называть экраном. В работе была проведена визуализация распространения волн на экране от фиксированного (центрального) источника для обеих моделей. По сути, мы видим $v(x_\sigma, \tau_\sigma; x_\alpha, t_\alpha)$ в точках экрана в разные моменты времени t_α (источник x_α фиксирован). В левых частях рис. 3, 4 располагаются необработанные кадры распространения волн на экране, не подвергнутые фильтрации, на которых видны искаженные фронты прямой волны.

ОБСУЖДЕНИЕ

Характер искажений можно объяснить вкладом регуляризующей добавки αI . При этом отраженные волны от границ и дифракторов не искажаются (или мало искажаются). С целью выделения только отраженных и рассеянных волн была применена F-K-фильтрация волн, распространяющихся вверх по экрану с целью удаления прямой волны. В качестве продолжения данной работы может выступить восстановление скоростной функции, поскольку наличие фронтов волн от различных источников на экране позволяет найти метрику в полугеодезических координатах. Решение задачи возвращения к

исходной конформно-евклидовой метрике, основанное на конформных векторных полях Киллинга, приведено в [Pestov et al., 2015].

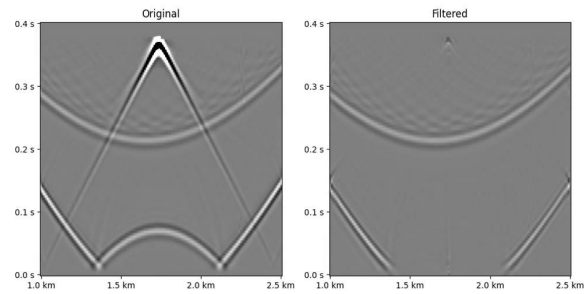


Рис. 3. Кадры до и после F-K-фильтрации для модели с двумя границами

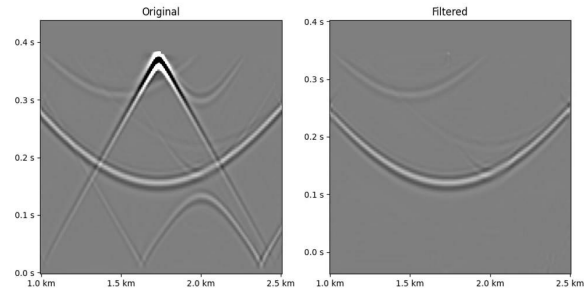


Рис. 4. Кадры до и после F-K-фильтрации для модели с границей и двумя дифракторами

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Belishev M.I. How to see waves under the Earth surface (the BC-method for geophysicists). III-Posed and Inverse Problems / (Eds.) Kabanikhin S.I., Romanov V.G. VSP, 2002. P. 67–84.

Белишев М.И., Пушницкий А.Б. К треугольной факторизации положительных операторов // Зап. научн. сем. 1997. ПОМИ 239. С. 45–60.

Belishev M.I. An approach to multidimensional inverse problems for the wave equation // Sov. Math. Dokl. 1988. V. 36. P. 481–484.

Belishev M.I. Recent progress in the boundary control method // Inverse Problems. 2007. V. 23. R1–R67.

Belishev M.I., Gotlib V.Y. Dynamical variant of the BC-method: theory and numerical testing // J. Inv. III-Posed Probl. 1999. V. 7. P. 221–240.

Belishev M.I., Ivanov I.B., Kubyshkin I.V., Semenov V.S. Numerical testing in determination of sound speed from a part of boundary by the BC-method // J. Inv. III-posed Probl. 2016. V. 23. N. 5.

Pestov L., Uhlmann G., Zhou H. An inverse kinematic problem with internal sources // Inverse Problems. 2015. V. 31. N. 5.