



XVI Конференция молодых ученых  
«Взаимодействие полей и  
излучения с веществом»

Иркутск, Россия, 16 – 21 сентября 2019

---

## ПОИСК МНОГОСКАЧКОВЫХ ЛУЧЕЙ В ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ О РАСЧЕТЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ПОЛЕЙ

---

Носиков И.А.<sup>1, 2</sup>, Толченников А. А.<sup>3</sup>, Доброхотов С. Ю.<sup>3</sup>, Белюченко К. В.<sup>2, 4</sup>,  
Боков В. Н.<sup>1, 2</sup>, Клименко М. В.<sup>1, 2</sup>, Бессараб П. Ф.<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Калининградский филиал Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН, г. Калининград, Россия

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

<sup>3</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

<sup>5</sup>Университет Исландии, Рейкьявик, Исландия

# Лучевой подход. Метод бихарактеристик

Применение канонических уравнений Гамильтона для задач распространения радиоволн:

1. Казанцев А. Н., Лукин Д. С., Спиридонов Ю. Г. Метод исследования распространения радиоволн в неоднородной магнитоактивной ионосфере //Космические исследования. – 1967. – Т. 5. – №. 4. – С. 593-600.
2. Лукин Д. С., Спиридонов Ю. Г. Применение метода характеристик для численного решения задач распространения радиоволн в неоднородной и нелинейной среде //Радиотехника и электроника. – 1969. – Т. 14. – №. 9. – С. 1673-1677.

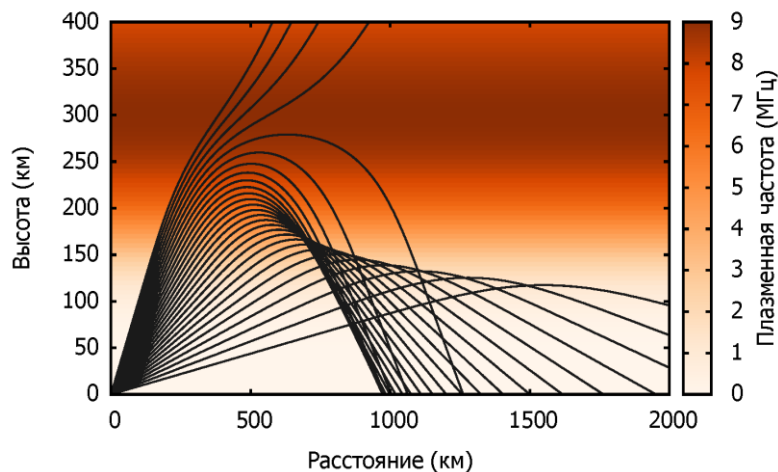
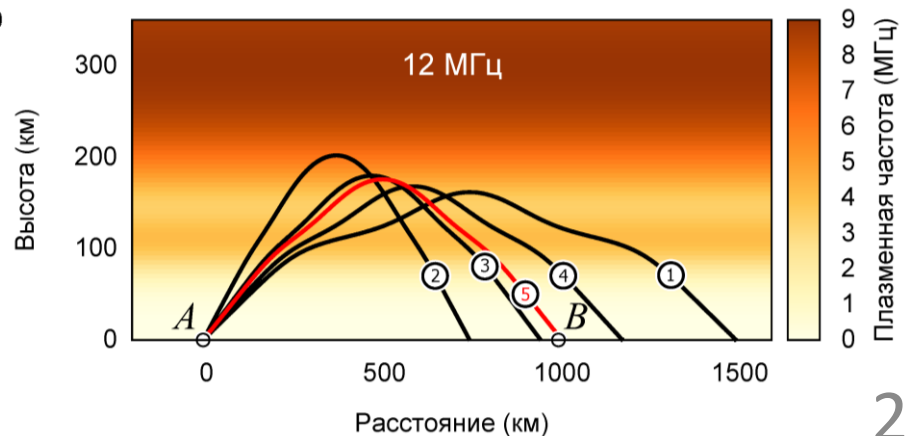


Рис. 2. Пример решения граничной задачи методом пристрелки.

Рис. 1. Пример решения задачи Коши методом бихарактеристик.



# Прямой вариационный метод

Принцип Ферма для функционала фазового (оптического) пути радиолуча:

$$\delta S = \delta \int_A^B n(\vec{r}) dl, = 0 \rightarrow \min$$

$n(\vec{r})$  - показатель преломления,  $dl$  – элемент длины.

Лучевые траектории

↓  
«Верхние»  
лучи  
↓  
Прямая  
минимизация

↓  
«Нижние»  
лучи  
↓  
Поиск  
седловых  
точек

Nosikov, I. A., Klimenko, M. V., Zhabankov, G. A., Podlesnyi, A. V., Ivanova, V. A., Bessarab, P. F. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. – 2019. – Т. 68. – №. 1. – С. 455-467.

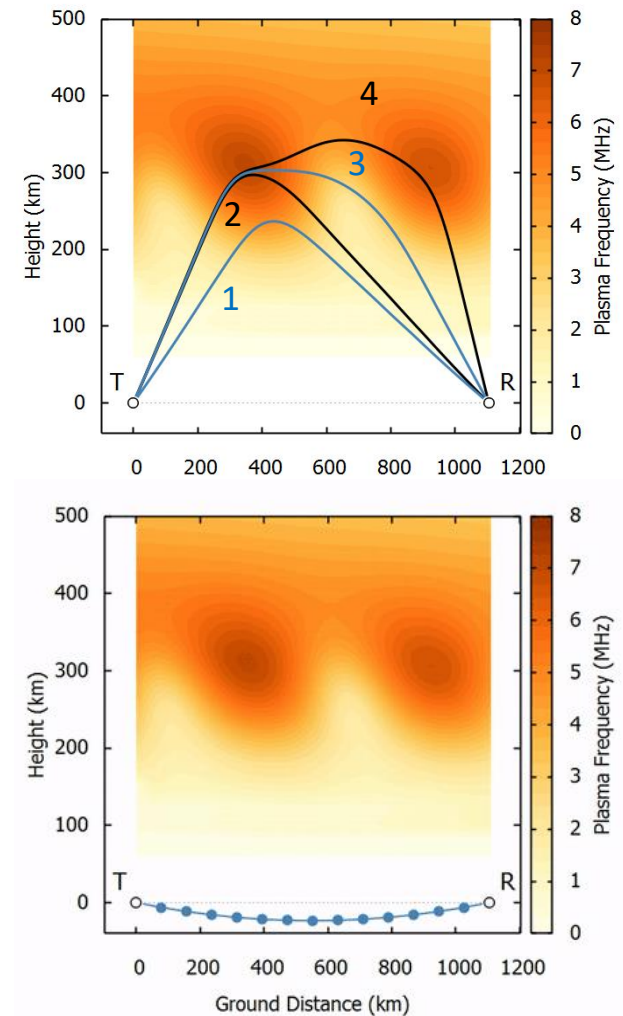
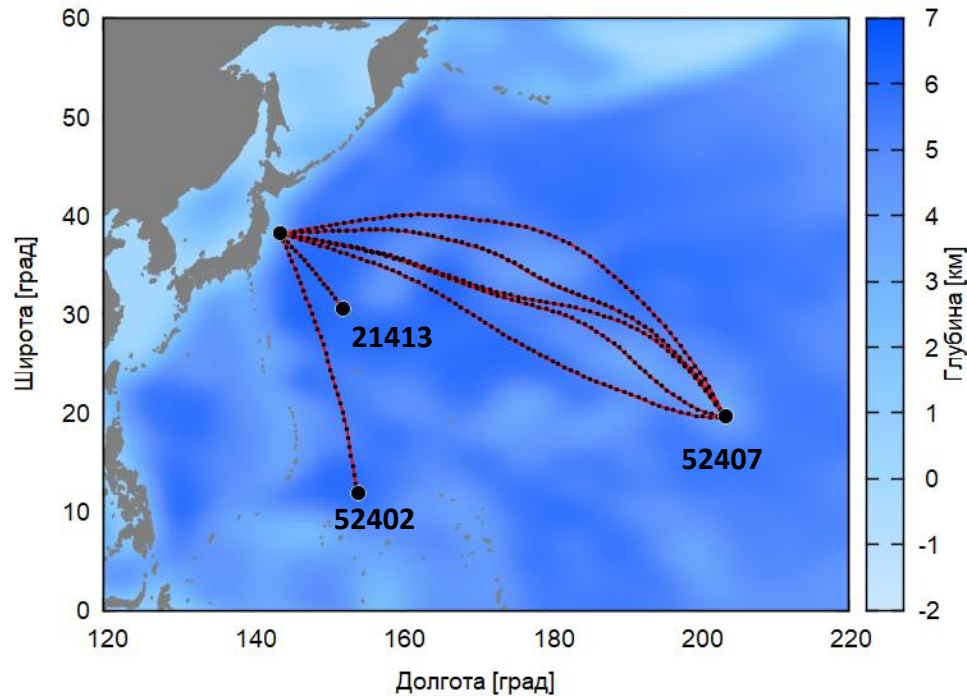


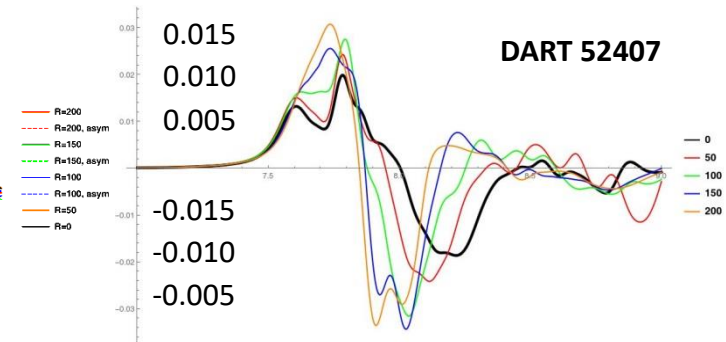
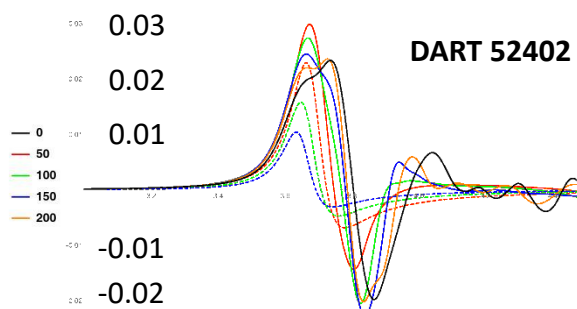
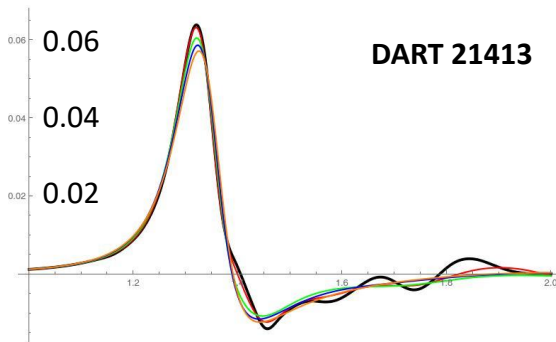
Рис. 3. Пример решения граничной задачи прямым вариационным методом.

# Землетрясение и цунами в Японии 11 марта 2011 г.

Радиус осреднения 250 км



| Станция DART | Номер луча | Время прихода, ч |
|--------------|------------|------------------|
| <b>21413</b> | 1          | 1.35             |
| <b>52402</b> | 1          | 3.68             |
| <b>52407</b> | 1          | 7.63             |
| -            | 2          | 7.84             |
| -            | 3          | 7.73             |
| -            | 4          | 7.84             |
| -            | 5          | 7.73             |



# Поиск оптимальных траекторий с незакрепленными граничными точками

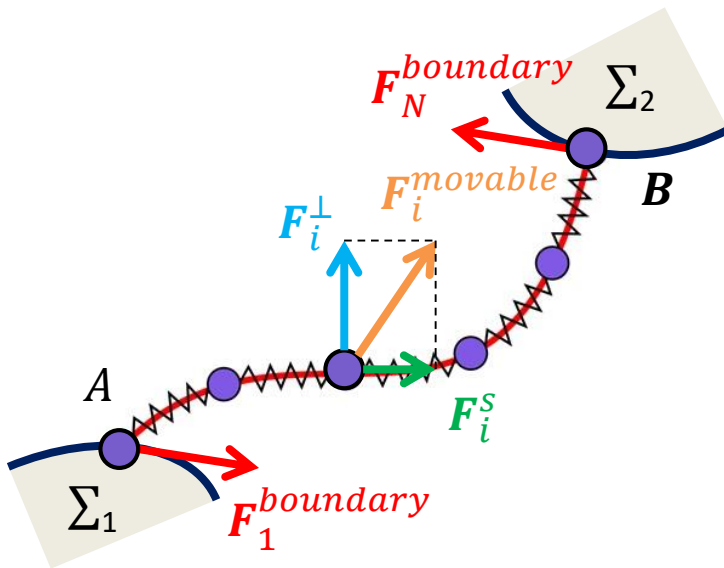


Рис. 5. Иллюстрация кусочно-линейной кривой и обобщенной силы

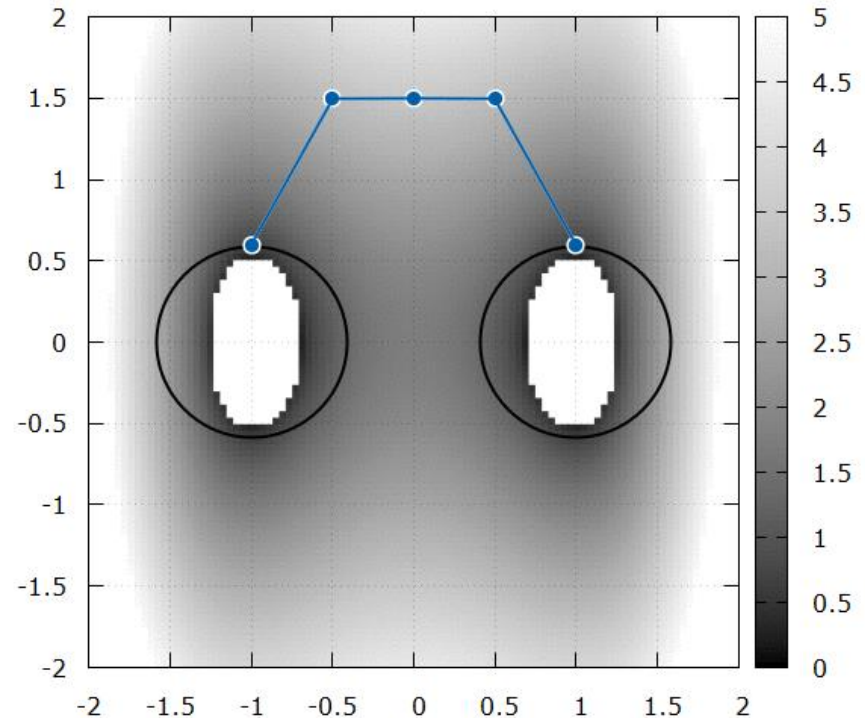


Рис. 6. Пример поиска оптимальной траектории между двумя окружностями

# Применение метода для поиска либраций

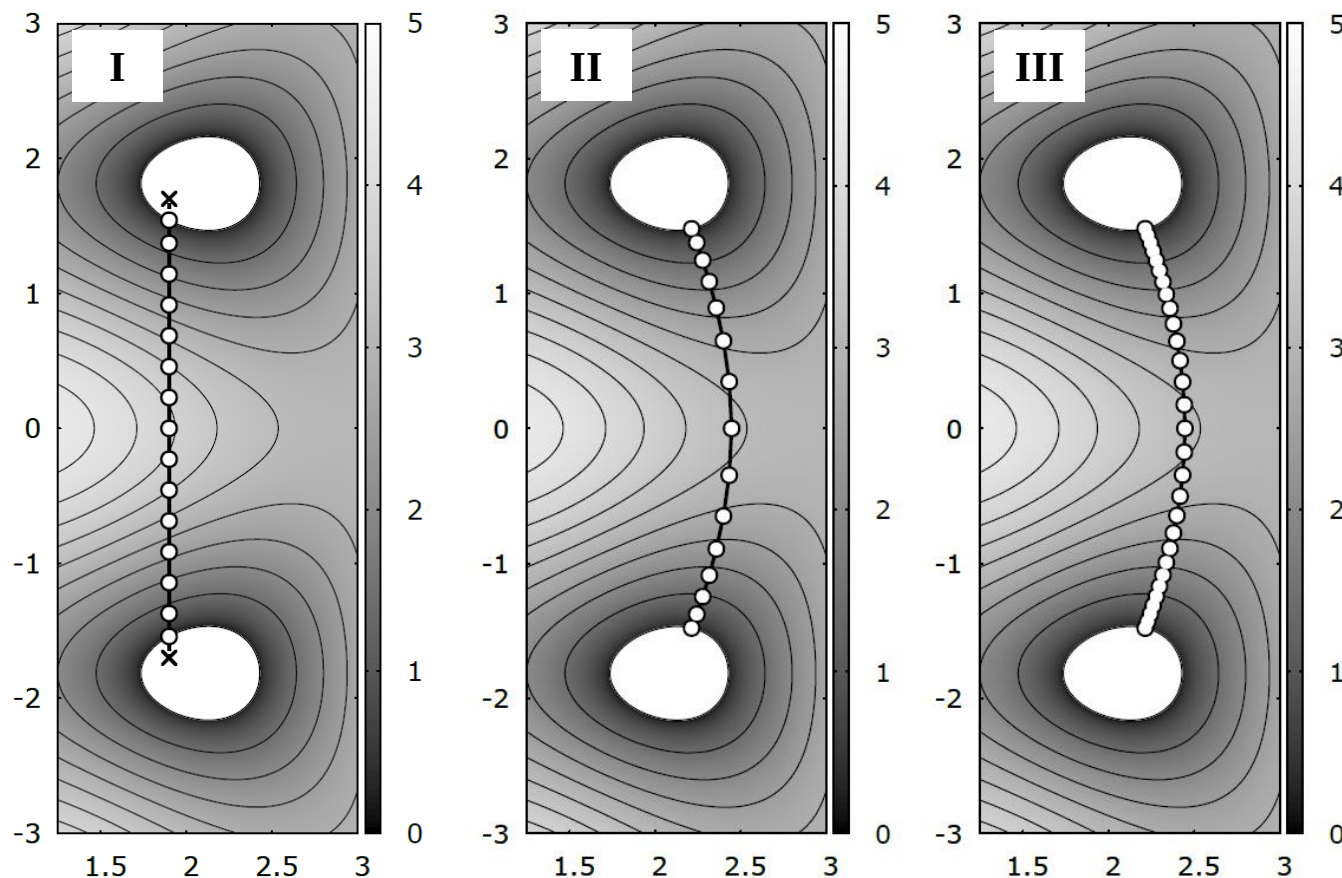


Рис. 7.

Аникин А. Ю., Доброхотов С. Ю., Носиков И. А. Либрации с большими периодами в туннелировании: эффективное вычисление и приложение к тригональным димерам //Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2022. (в печати).



# Цель работы

Развитие вариационного метода для поиска **многоскачковых лучей** в граничной задаче.

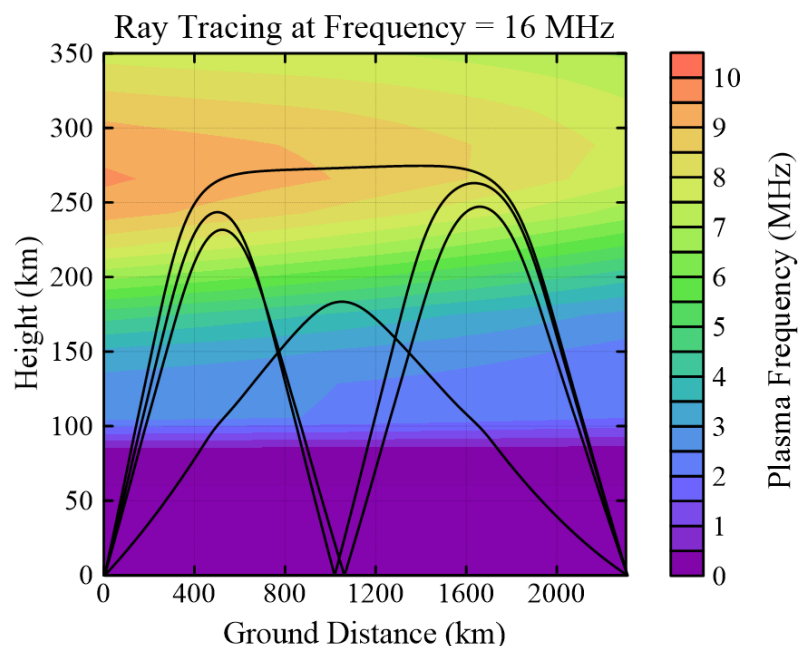


Рис. 8. Лучевые траектории радиоволны, соответствующие односкачковому и двускачковому распространению.

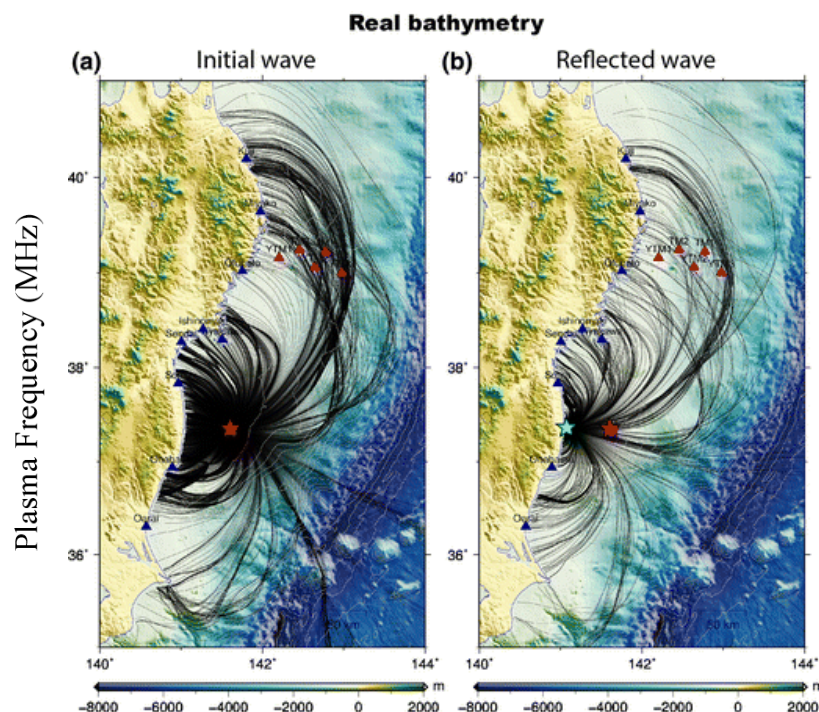


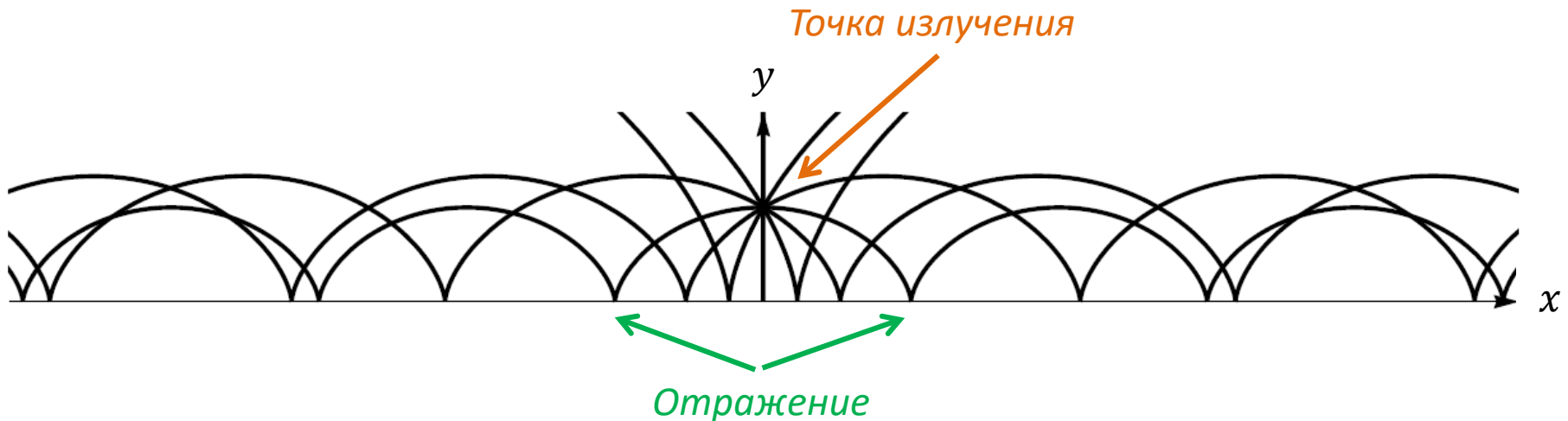
Рис. 9. Распространение волны цунами в лучевом приближении.

# Модельная задача: отражение цунами от плоского берега

Функционал времени прихода волны цунами:

$$S[\gamma] = \int_A^B \frac{1}{v(\mathbf{r})} dl,$$

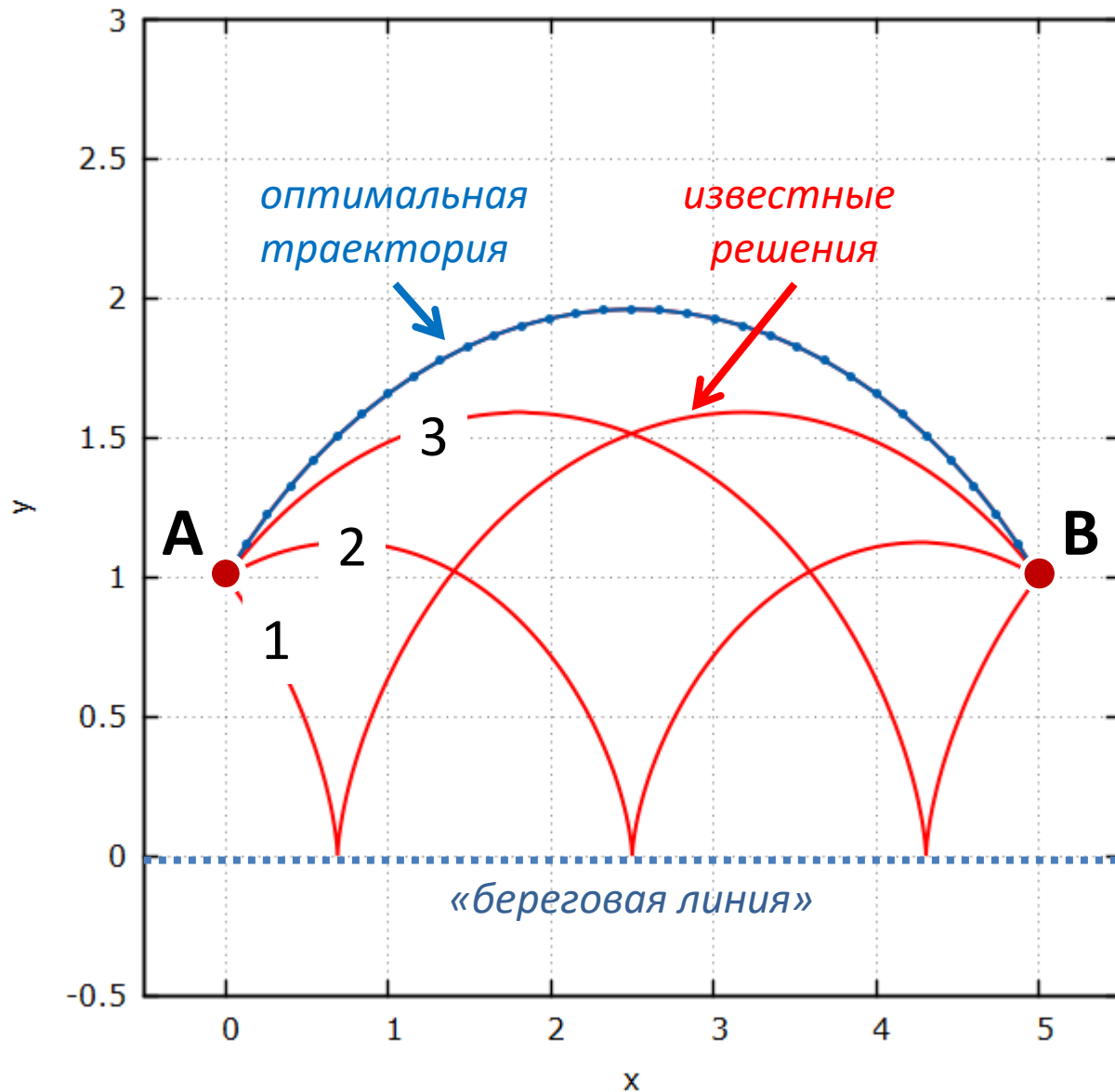
где  $v = \sqrt{D}$  – скорость распространения фронта волны,  $D(y) = y$ .



Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е. Характеристики с особенностями и граничные значения асимптотического решения задачи Коши для вырождающегося волнового уравнения // Математические заметки. – 2016. – Т. 100. – №. 5. – С. 710-731.

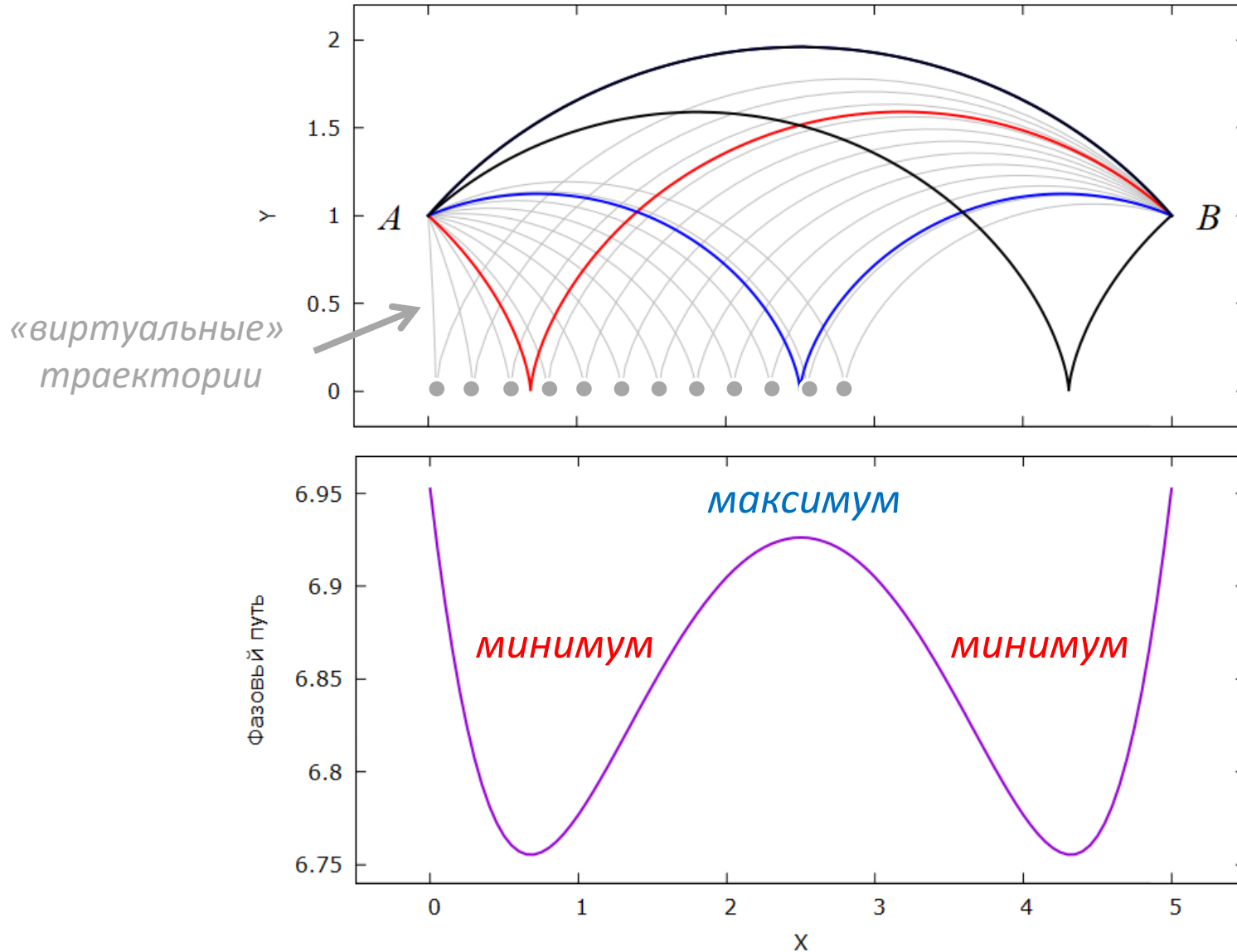


# Решения методом пристрелки

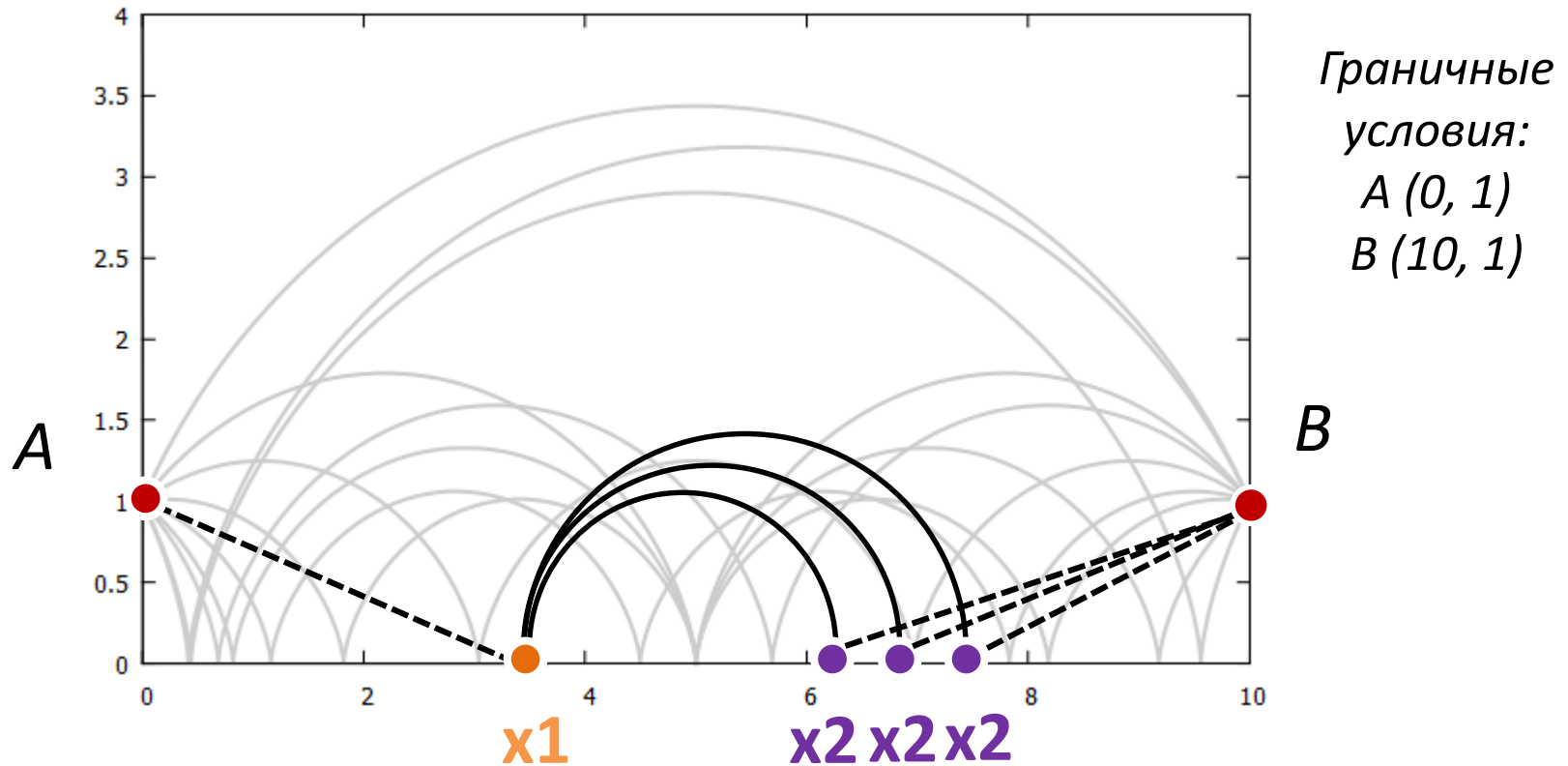


Граничные условия:  
 $A(0, 1)$   
 $B(5, 1)$

# Отражение цунами от берега



# Отражение цунами от берега

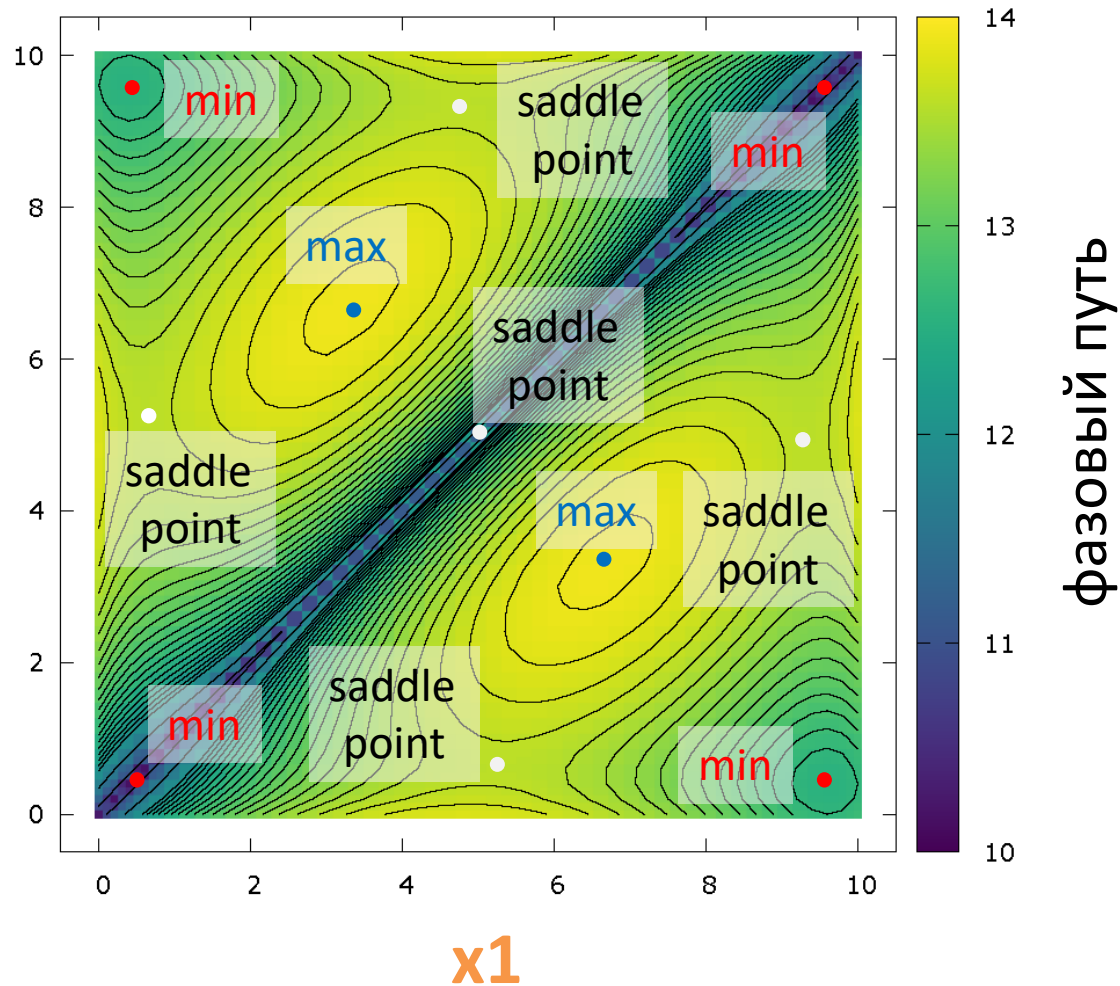


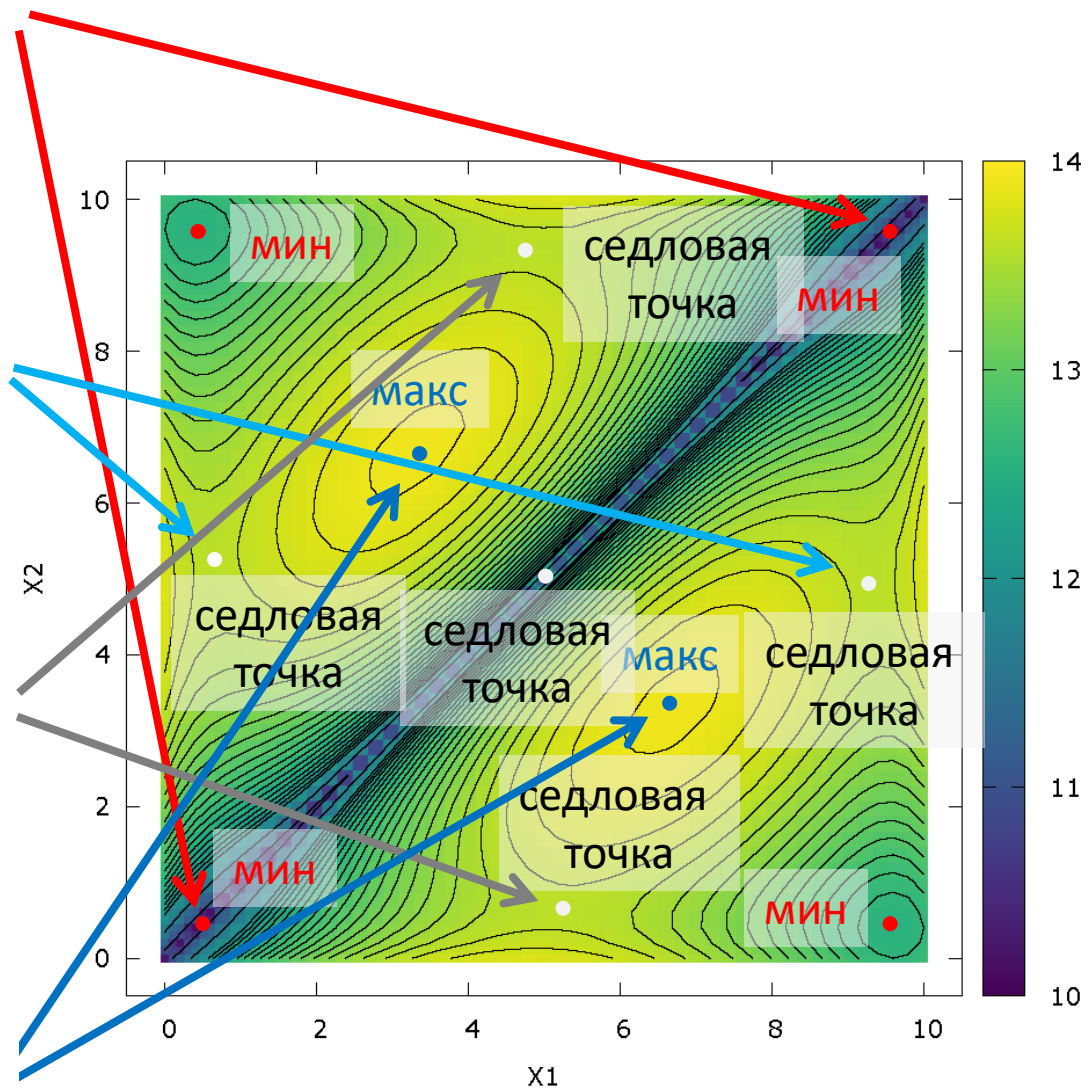
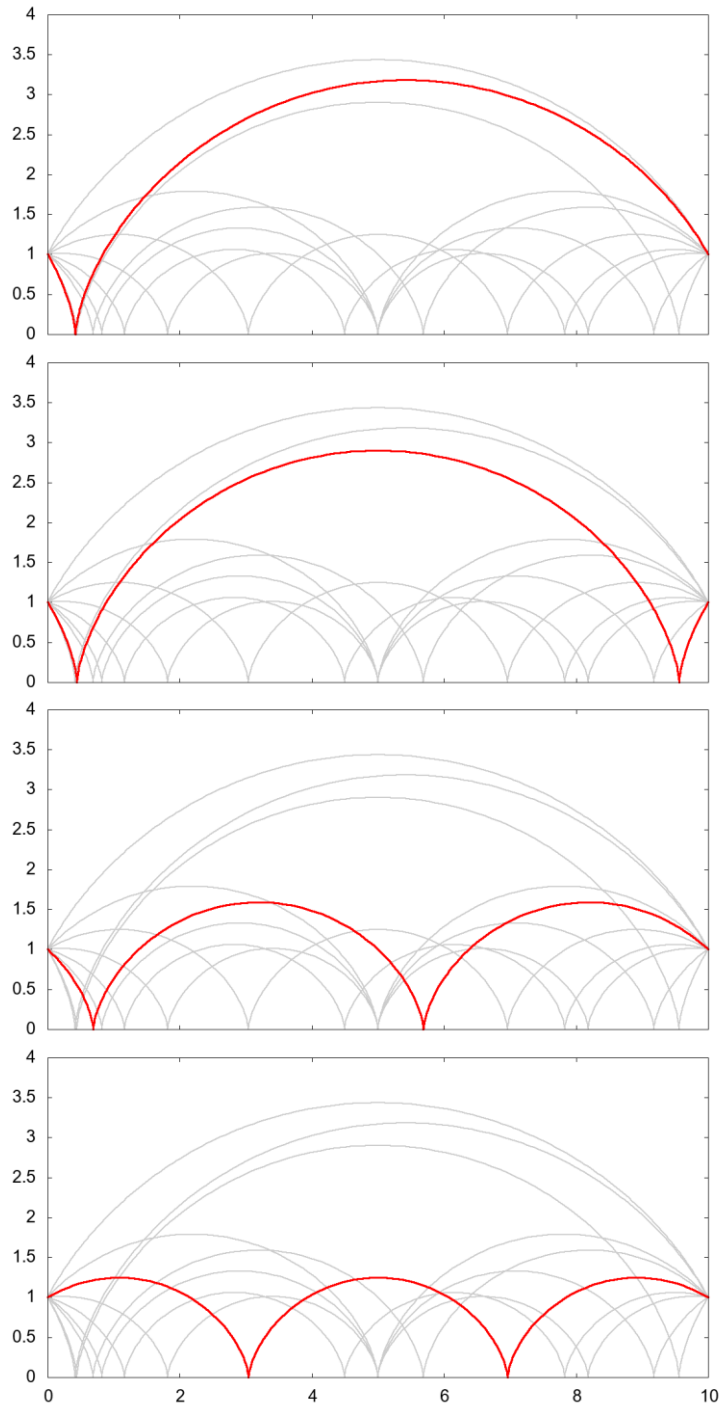
Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е. Характеристики с особенностями и граничные значения асимптотического решения задачи Коши для вырождающегося волнового уравнения // Математические заметки. – 2016. – Т. 100. – №. 5. – С. 710-731.

# Отражение цунами от берега

максимум – 2  
минимум – 4  
седловые  
точки – 5

x2





# Вариационный подход

Запишем интеграл Ферма, используя метод прямоугольников:

$$S[\gamma] \approx S(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-2} (n(\vec{r}_{i+1/2})) |\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i|, \quad [2]$$

где  $\vec{r}_{i+1/2} = (\vec{r}_{i+1} + \vec{r}_i)/2$ ,  $i$  – индекс рассматриваемой точки.

Сила, действующая на «подвижные» точки:

$$\vec{F} = - \left. \frac{\partial S}{\partial \vec{r}_i} \right|_{\perp} + \vec{F}_s, \quad [3]$$

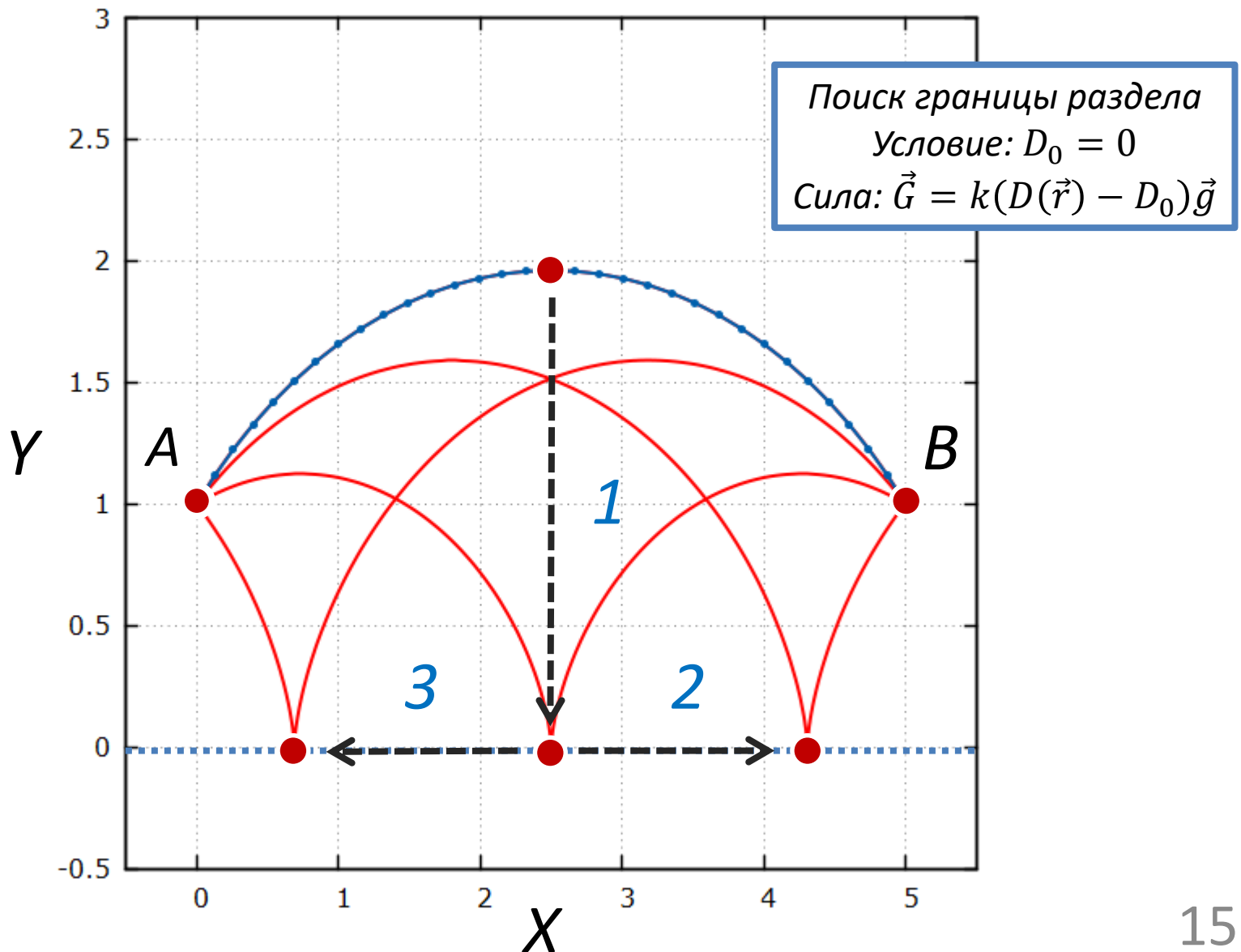
Сила, действующая на точку отражения:

$$\vec{G} = \pm \frac{dS}{d\vec{r}_c} = \pm \left( \frac{\partial S}{\partial \vec{r}_c} + \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{r}_i}{d\vec{r}_c} \frac{\partial S}{\partial \vec{r}_i} \right), \quad [4]$$

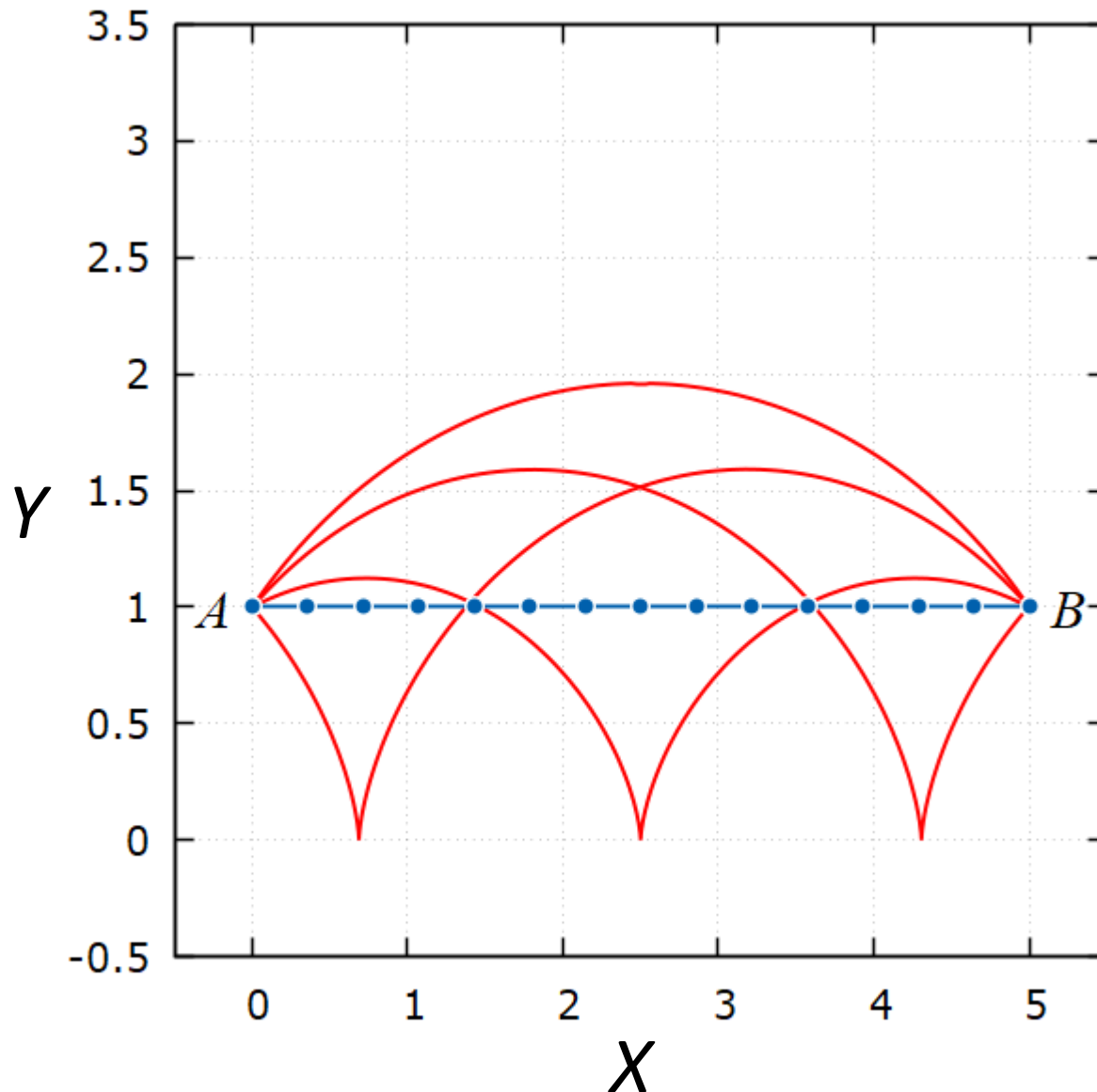
где  $\vec{r}_c$  и  $\vec{t}_c$  – положение точки отражения и касательная к границе раздела,  $\vec{r}_i$  – положение «подвижных» точек кусочно-линейной траектории,  $N$  – число подвижных точек.



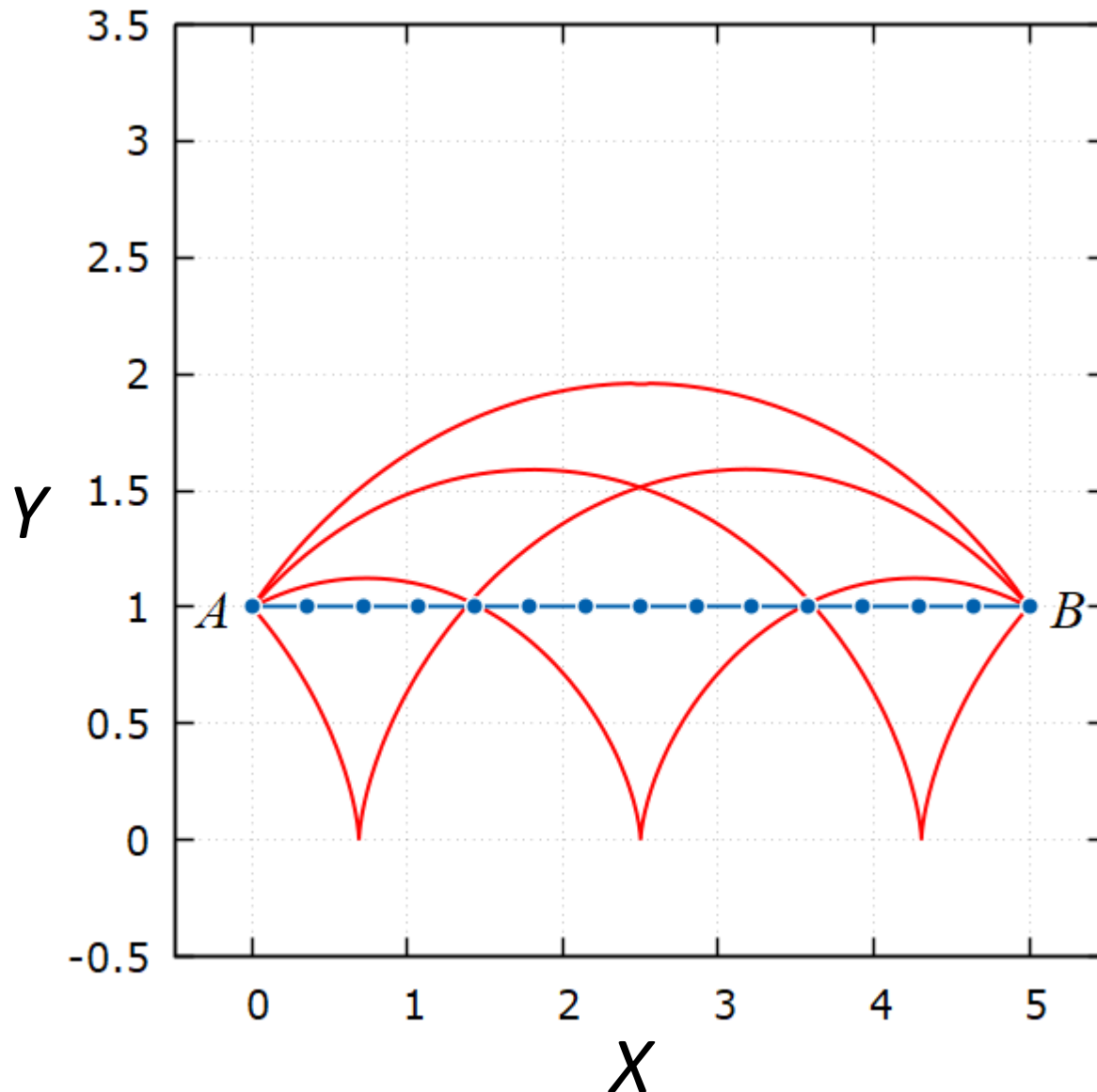
# Схема поиска отраженного луча



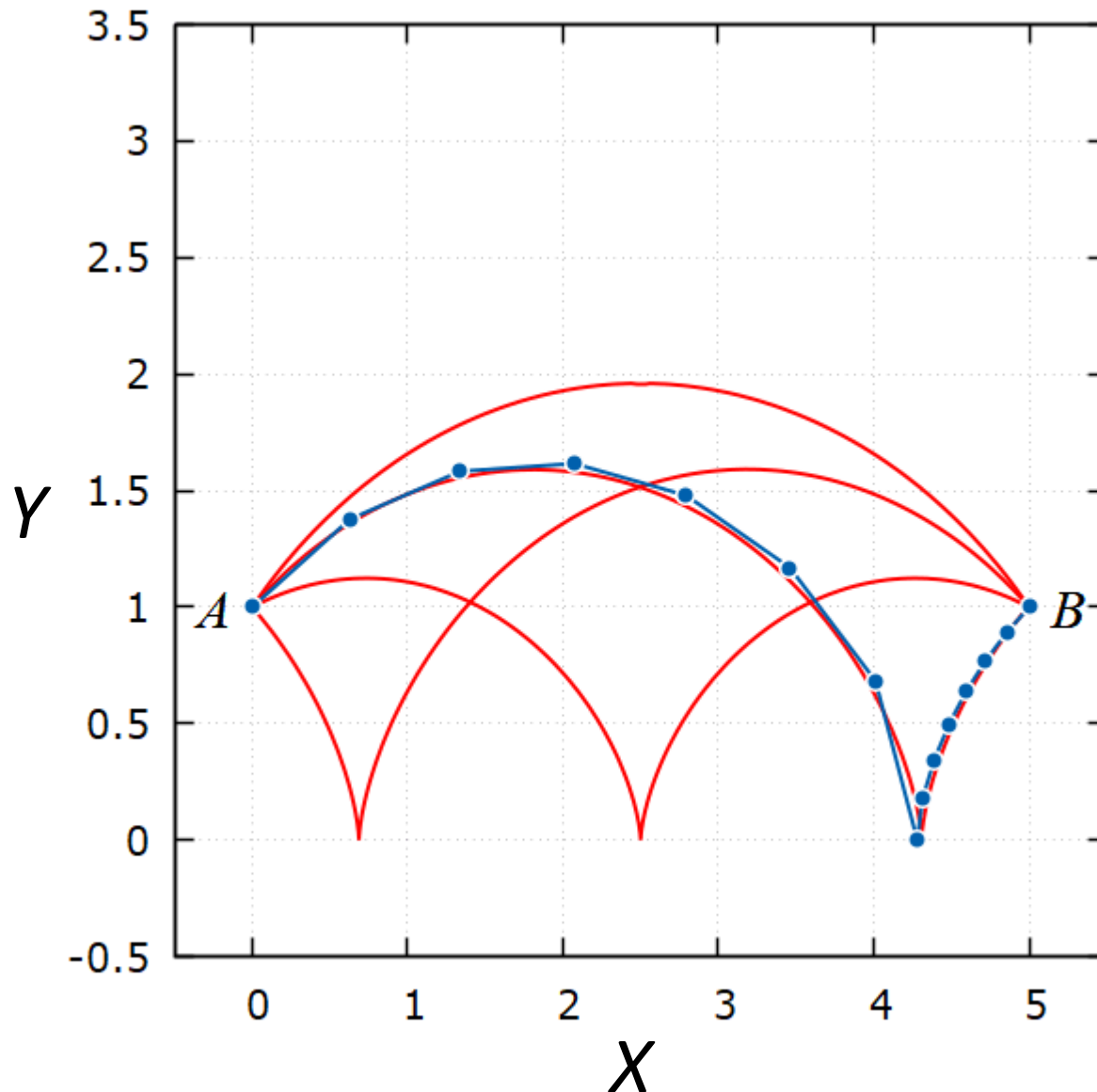
# Применение вариационного метода: поиск минимума 1



# Применение вариационного метода: поиск минимума 2



# Применение вариационного метода: поиск седловой точки



# Заключение

## Основные результаты работы:

1. Показана принципиальная возможность поиска многоскачковых лучей вариационным методом.
2. Набор отражённых лучей представляет собой суперпозицию стационарных точек различного типа: минимумов, седловых точек 1, 2,..., N-го порядка.
3. Представлен алгоритм последовательного поиска всех многоскачковых лучей.
4. Применение методом возможно для многоскачковых лучей с большой расходимостью.

*Работа по реализации вариационного метода выполнена при поддержке Проекта Минобрнауки России № 075-15-2021-583 (Носиков И.А., Клименко М.В.). Расчеты методом бихарактеристик (Толченников А.А., Доброхотов С.Ю.) выполнены при поддержке гранта РФФ № 21-71-30011.*

# Список литературы

1. Nosikov I.A., Klimenko M.V., Zhbakov G.A., Podlesnyi A.V., Ivanova V.A., Bessarab, P.F. Generalized force approach to point-to-point ionospheric ray tracing and systematic identification of high and low rays //IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2019. – Т. 68. – №. 1. – С. 455-467.
2. Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е. Характеристики с особенностями и граничные значения асимптотического решения задачи Коши для вырождающегося волнового уравнения //Математические заметки. – 2016. – Т. 100. – №. 5. – С. 710-731.
3. Казанцев А. Н., Лукин Д. С., Спиридонов Ю. Г. Метод исследования распространения радиоволн в неоднородной магнитоактивной ионосфере //Космические исследования. – 1967. – Т. 5. – №. 4. – С. 593-600.
4. Носиков И. А., Клименко М. В. Исследование функционала верхних и нижних лучей в задаче расчета радиотрасс в модельной ионосфере //Химическая физика. – 2017. – Т. 36. – №. 12. – С. 61-65.