

**МОДЕЛИРОВАНИЕ  
РАСПРОСТРАНЕНИЯ КОРОТКИХ  
РАДИОВОЛН МЕТОДАМИ  
БИХАРАКТЕРИСТИК И ВОЛНОВОЙ  
ТЕОРИИ КАТАСТРОФ**

**А.С. Крюковский**

**АНО ВО «Российский Новый Университет»,  
Москва, ул. Радио, д.22.**

**Аннотация.** Рассмотрены методы моделирования распространения радиоволн декаметрового диапазона в неоднородной анизотропной ионосферной плазме: метод бихарактеристик и волновая теория катастроф. Исследованы лучевая, каустическая и амплитудная структуры электромагнитных полей. Приведены результаты математического моделирования амплитуды поля х- и о-волны в окрестности каустик, полученные на основе решения расширенной бихарактеристической системы Лукина. Рассмотрены равномерные асимптотики, содержащие специальные функции волновых катастроф и описывающие амплитудно-фазовые структуры волновых полей в окрестности особых каустик каспидного, омбилического и модального типов.

# Введение

- Настоящая лекция посвящена вопросам моделирования распространения коротких электромагнитных волн методами бихарактеристик и волновой теории катастроф. Актуальность темы определяется активным применением дециметровых радиоволн для решения современных задач радиолокации, радионавигации, дальней радиосвязи, загоризонтного зондирования, а также для исследования верхней атмосферы Земли – ионосферы и магнитосферы.

# Введение (продолжение)

- Теоретическим исследованиям распространения радиоволн в ионосфере Земли посвящены классические монографии [Гинзбург, 1967; Дэвис, 1973; Гершман и др., 1984].
- Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. 2-е изд. М.: Наука, 1967. 684 с.
- Дэвис К. Радиоволны в ионосфере М.: Мир.1973. 502 с.
- Гершман Б.Н., Ерухимов Л.М., Яшин Ю.Я. Волновые явления в ионосферной и космической плазме. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1984. 392 с.

# Введение (продолжение)

- В современное понимание проблемы распространения радиоволн в ионосфере важный вклад внесли работы [Лукин, Палкин, 1982; Краснушкин, 1947; Зернов, 1980; Куркин и др., 1981; Черкашин, 1971; Иванов и др., 2015; Куницын и др., 2007; Иванов, 2006] и др.
- Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. М.: МФТИ, 1982. 159 с.
- Краснушкин П.Е. Метод нормальных волн в применении к проблеме дальних радиосвязей. М.: МГУ, 1947. 52 с.
- Зернов Н.Н. Рассеяние волн КВ диапазона при наклонном распространении в ионосфере. // Известия вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23. № 2. С. 151–158.
- Куркин В.И., Орлов И.И., Попов В.Н. Метод нормальных волн в проблеме коротковолновой радиосвязи. М.: Наука, 1981. 124 с.
- Черкашин Ю.Н. Применение метода параболического уравнения для расчета волновых полей в неоднородных средах // Радиотехника и электроника. 1971. Т. 16. № 1. С. 173–174.
- Иванов В.А., Иванов Д.В., Михеева Н.Н., Рябова М.И. Дисперсионные искажения системных характеристик широкополосных ионосферных радиоканалов // Йошкар-Ола: ПГТУ, 2015. 159 с.
- Куницын В.Е., Терещенко Е.Д., Андреева Е.С. Радиотомография ионосферы. М.: Физматлит, 2007. 345 с.
- Иванов Д.В. Методы и математические модели исследования распространения в ионосфере сложных дециметровых сигналов и коррекции их дисперсионных искажений. Монография. Йошкар-Ола: Марийский гос. технический ун-т. 2006. 266 с.

# Лучевой подход

## Бихарактеристическая система

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{k}} \quad \frac{d\vec{k}}{d\tau} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{r}} \quad \frac{dt}{d\tau} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \quad \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \quad (1)$$

- Гамильтониан:  $\Gamma = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}$  (2)

- $\vec{k}$  – волновой вектор,  $\vec{r}$  – координаты луча,
- $t$  – групповое время,  $\tau$  – параметр интегрирования,
- $\omega$  – круговая частота.

- Решения: 
$$\vec{r} = \vec{r}(\zeta, \eta, t_0; \tau) \quad \vec{k} = \vec{k}(\zeta, \eta, t_0; \tau)$$
$$t = t(\zeta, \eta, t_0; \tau) \quad \omega = \omega(\zeta, \eta, t_0; \tau)$$
 (3)

- Казанцев А.Н., Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Метод исследования распространения радиоволн в неоднородной магнитоактивной ионосфере. // Космические исследования. 1967. Т. 5. Вып. 4. С. 593–600.

# Альтернативные подходы

- Бихарактеристическая система описывает траектории лучей и волновые вектора в неоднородной магнитоактивной (возможно нестационарной) среде. На основе решения бихарактеристической системы можно рассчитать фазу, учесть поглощение вдоль траекторий и вращение вектора поляризации.
- Помимо лучевого метода существует ряд альтернативных подходов к решению задач о распространения радиоволн в ионосфере. Это метод параболического уравнения, метод нормальных волн, метод суммирования гауссовых пучков, метод интерференционного интеграла, вариационный подход и др.

# Расширенная бихарактеристическая система Д.С. Лукина

$$\frac{d\vec{r}_\zeta}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{k}} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \right) \quad \frac{d\vec{k}_\zeta}{dt} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{r}} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \right) \quad (4)$$

$$\frac{d\vec{r}_\eta}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{k}} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \right) \quad \frac{d\vec{k}_\eta}{dt} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{r}} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \right) \quad (5)$$

- Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Применение метода характеристик для численного решения задач распространения радиоволн в неоднородной и нелинейной среде. // РЭ. 1969. Т. 14. №. 9. С.1673–1677.
- Kryukovskii, A.S., Lukin, D.S., Kir'yanova, K.S. Method of Extended Bicharacteristic System in Simulating Wave Propagation in Ionospheric Plasma // Journal of Communications Technology and Electronics, 2012. V. 57, N. 9. P. 1039–1045.

- Методом расширенной бихарактеристической системы можно найти не только поля в регулярных областях, но и поле на каустике - огибающей семейства лучей. В лучевом приближении на каустиках интенсивность поля обращается в бесконечность, поскольку якобиан расходимости равен нулю. В действительности на каустике интенсивность поля существенно возрастает, но остаётся конечной.
- Так как в фазовом пространстве траектории не пересекаются, на основе решения бихарактеристической системы можно рассчитывать каустическую структуру волнового поля методом канонического оператора Маслова (КОМ) [Маслов, 1965] с использованием специальных функций волновых катастроф (СВК) [Лукин, Палкин, 1982].
- Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: МГУ, 1965. 553 с.
- Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. М.: МФТИ, 1982. 159 с.

На основе теории особенностей дифференцируемых отображений [Арнольд и др., 1982, 1984] и метода КОМ для решения задач о распространении и дифракции коротковолнового излучения в неоднородных средах с частотной дисперсией построена волновая теория катастроф (ВТК) [Крюковский, Лукин, 1998; Крюковский и др., 2006].

ВТК позволила получить наглядную геометрическую (лучевую и каустическую) интерпретацию особых фокальных дифракционных структур электромагнитных полей и рассчитать значения полей в этих областях.

Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, часть I. 1982. 304 с.; часть II, 1984. 335 с.

Крюковский А.С., Лукин Д.С. Построение равномерной геометрической теории дифракции методами краевых и угловых катастроф. // РЭ. 1998. Т. 43. № 9. С. 1044–1060.

Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Волновые катастрофы – фокусировки в дифракции и распространении электромагнитных волн. // РЭ, 2006. Т.51. №10. С. 1155–1192.

# Структура поля в окрестности каустики

## Постановка задачи

- В качестве примера рассмотрим амплитудную структуру электромагнитного поля на поверхности земли в окрестности каустики. В декаметровом диапазоне выражение для эффективной диэлектрической проницаемости можно представить в виде формулы Эпплтона-Хартли [Дэвис, 1973]:

$$\varepsilon_{\pm} = 1 - \frac{2\nu(1-\nu)}{2(1-\nu) - u \sin^2 \alpha \pm \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u(1-\nu)^2 \cos^2 \alpha}} \quad (6)$$

- Дэвис К. Радиоволны в ионосфере М.: Мир.1973. 502 с.

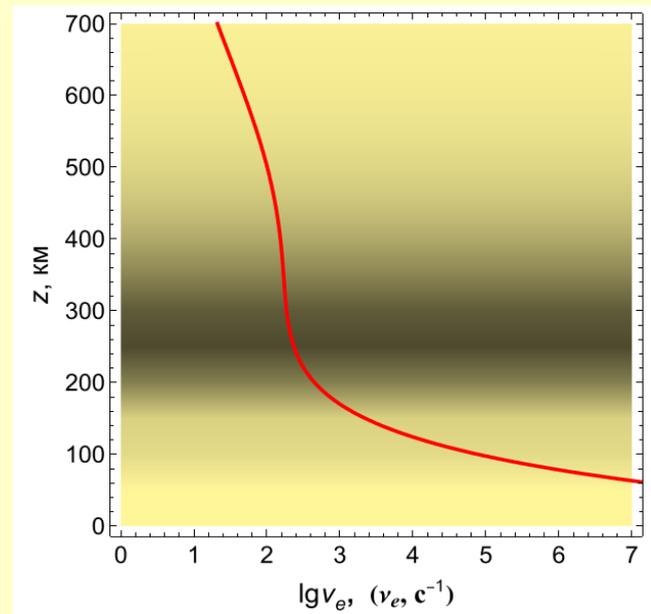
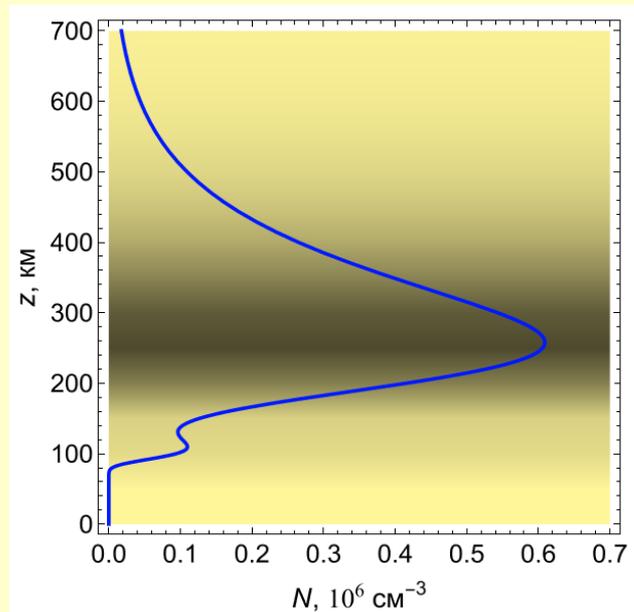
# Параметры эффективной диэлектрической проницаемости

В (6) знак «+» соответствует обыкновенной волне (о-волна), а знак «-» – необыкновенной волне (х-волна). Угол между вектором напряженности магнитного поля Земли и волновым вектором  $\vec{k}$  обозначен как  $\alpha$ ,  $v$  и  $u$  – это отношения квадратов плазменной частоты и гирочастоты к квадрату рабочей частоты:

$$v = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{4\pi e^2 N}{m_e \omega^2} \quad u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} = \frac{e^2 H_0^2}{m_e^2 c^2 \omega^2} \quad (7)$$

$N(\vec{r})$  – концентрация электронов,  $e$  – заряд электрона,  
 $m_e$  – масса электрона,  $H_0$  – величина напряженности магнитного поля Земли. Углы  $\gamma$  и  $\varphi$  определяют ориентацию напряжённости магнитного поля.

# Модель среднеширотной дневной ионосферы

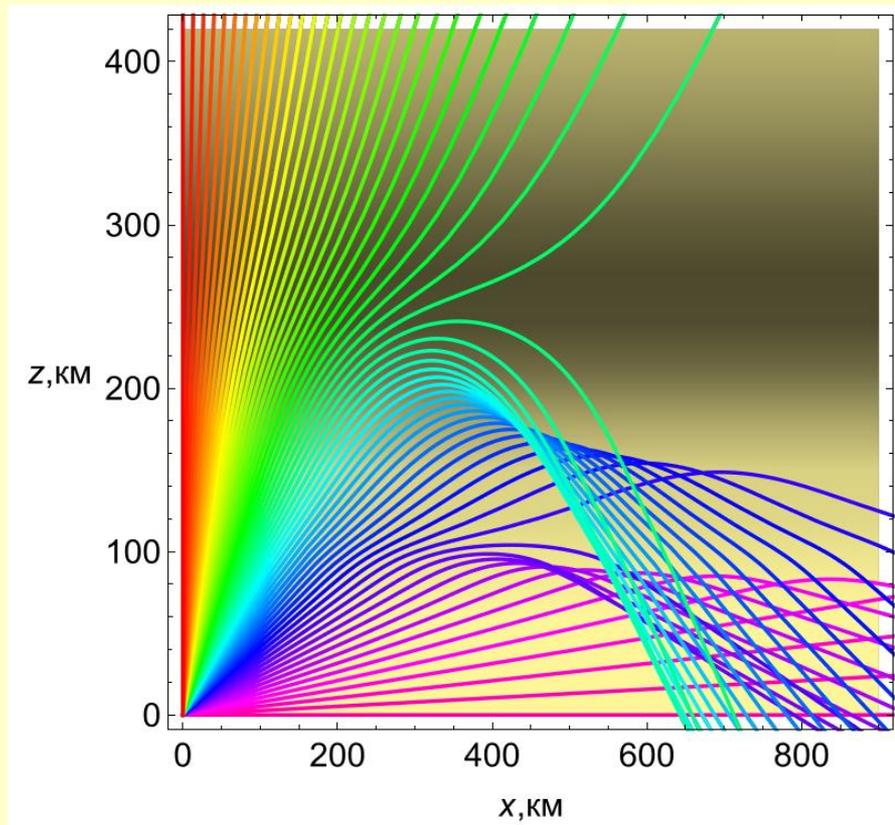


*Рис. 1.* Зависимость от высоты: электронной концентрации – а;  
эффективной частоты соударений – б

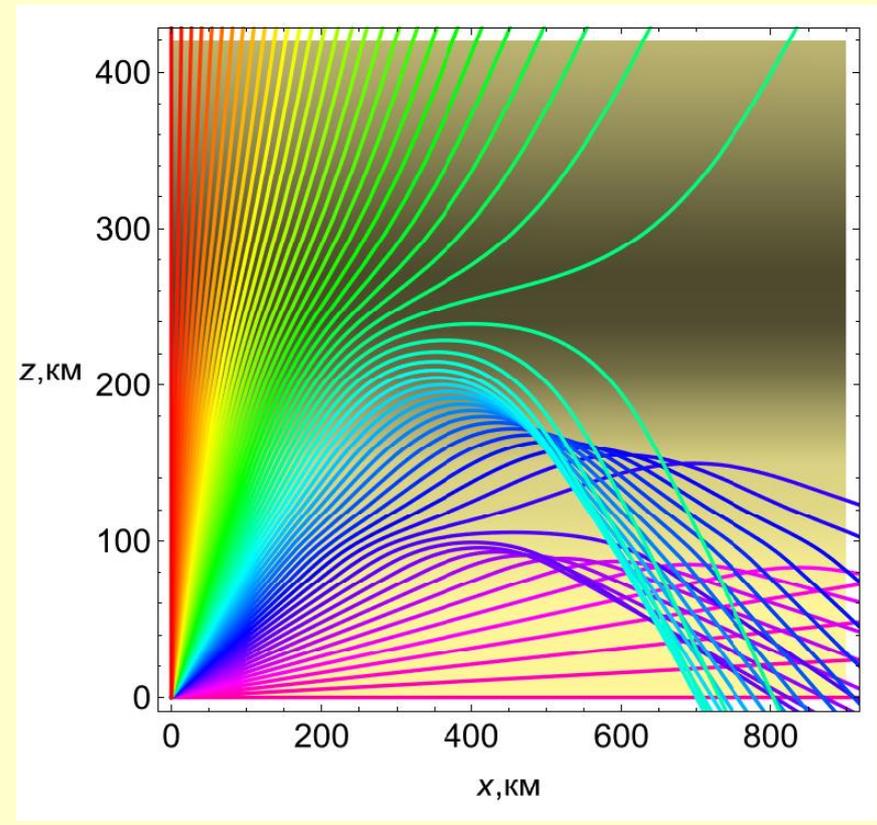
Bova Yu.I., Kryukovsky A.S., Lukin D.S. Propagation of Frequency-Modulated Electromagnetic Radiation in the Earth's Ionosphere with Allowance for Absorption and the External Magnetic Field // Journal of Communications Technology and Electronics, 2019. V.64, N 1. P. 1-12.

Kryukovskii A.S., Lukin D.S., Bova Yu.I. Simulation of the Field in the Vicinity of Caustics of Ordinary and Extraordinary Waves during Ionospheric Propagation, // Journal of Communications Technology and Electronics, 2020. V. 65, N 12. P. 1364–1373.

Проекции лучей на плоскость  $(x, z)$ :  
необыкновенная волна – а,  
обыкновенная волна – б



а



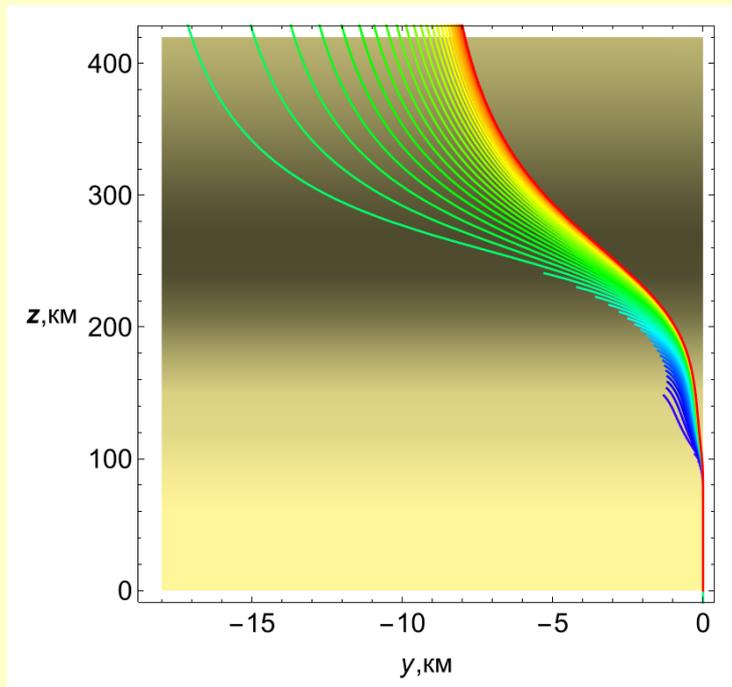
б

Рис. 2.

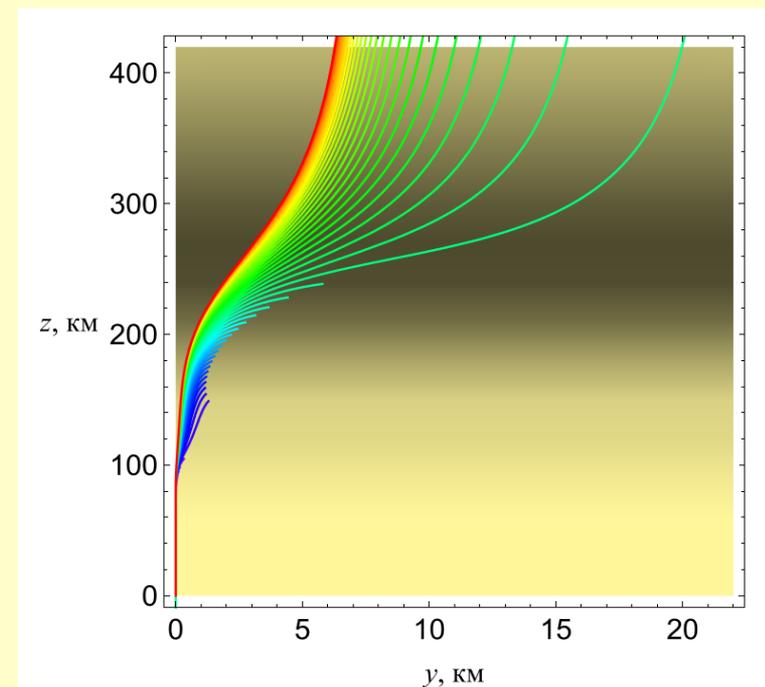
На рис. 2 и 3 приведены лучевые траектории в плоскостях  $(x,z)$  и  $(y,z)$  для х-волны и о-волны. В виде фона показано распределение электронной концентрации в ионосфере. Семейства обыкновенных и необыкновенных лучей образуют структуры, содержащие два каустических острия. При движении от источника вдоль поверхности, сначала возникает каустика х-волны, которая является границей «мертвой зоны», а затем каустика о-волны. Поле х-волны формируют два луча: луч, коснувшийся каустики х-волны и луч, не коснувшийся этой каустики. Каустическое поле о-волны взаимодействует с полем х-волны.

Источник излучения монохроматический (частота  $f=9,5$  МГц), расположен на поверхности земли в начале координат. Лучи выходят из источника в плоскости  $(x, z)$ , то есть  $\eta=0$ .

Проекции лучей на плоскость  $(y, z)$ :  
необыкновенная волна – а,  
обыкновенная волна – б



а



б

Рис. 3.

Лучи с большими углами выхода просачиваются сквозь ионосферу, а с небольшими углами отражаются от слоёв E и F и возвращаются на землю. Из-за влияния магнитного поля Земли лучи при распространении покидают начальную плоскость  $(x, z)$  (рис. 3), но, так как горизонтальные градиенты отсутствуют,  $\varphi=90^\circ$  и магнитное поле постоянное, то, достигая земли, они возвращаются в плоскость  $(x, z)$ . Верхнее каустическое остриё определяется слоем F, образующим главный максимум, а нижнее каустическое остриё (катастрофа  $A_3$ ) вызвано слоем E. Лучевая структура для о-волны похожа на лучевую структуру х-волны, но первая каустика, пересекающая поверхность земли, в случае х-волны расположена ближе к источнику (642,5 км), а в случае о-волны дальше (699,5 км) [Kryukovskii et al., 2020; Kryukovsky et al., 2021].

Kryukovskii A.S., Lukin D.S., Bova Yu.I. Simulation of the Field in the Vicinity of Caustics of Ordinary and Extraordinary Waves during Ionospheric Propagation // Journal of Communications Technology and Electronics, 2020. V. 65, N 12. P. 1364–1373.

Kryukovsky A.S., Lukin D.S., Rastyagaev D.V., Bova Y.I. The method of mathematical modeling of wave fields and caustic structures in the process of propagation of electromagnetic radiation in the ionospheric plasma // 2021 XXXIVth General Assembly and Scientific Symposium of the International Union of Radio Science (URSI GASS), 2021. Rome, 28 August – 4 September Publisher: IEEE, P. 1-4.

# Структура электромагнитного поля в окрестности первой каустики

- Поле х-волны правее каустики х-волны, определяется как сумма вкладов двух лучей ( $\kappa=x$ ):

$$u_g^\kappa \cong b_1^\kappa \cdot \exp\left(i\left(\Phi_1^\kappa - \pi / 2\right)\right) + b_2^\kappa \cdot \exp\left(i\Phi_2^\kappa\right) \quad (8)$$

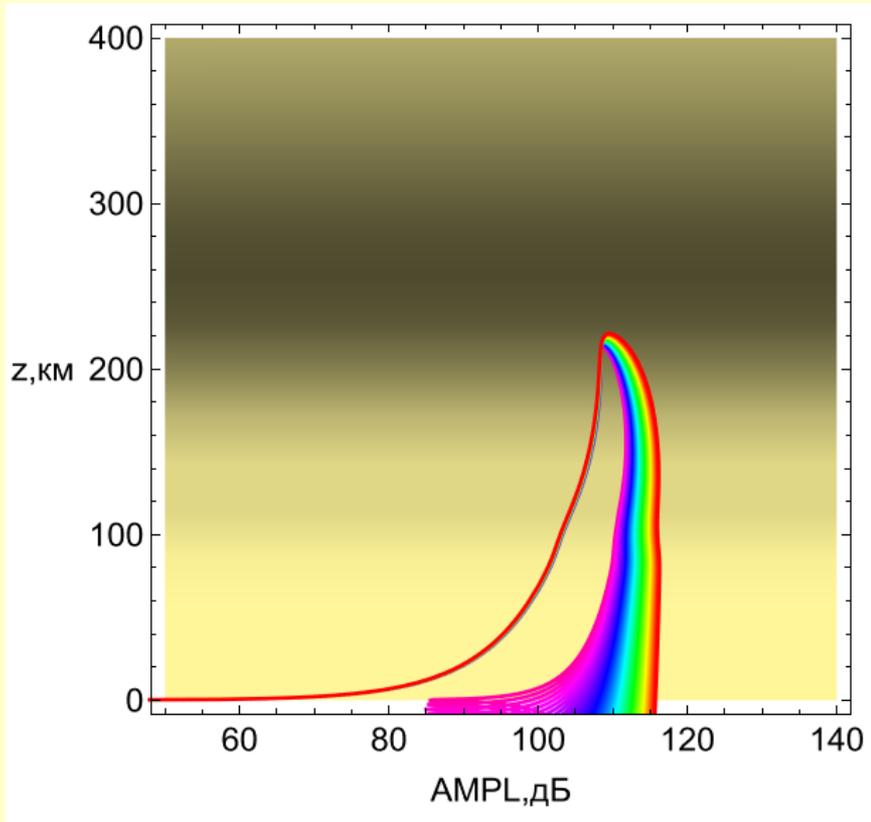
- Луч с индексом «1» уже коснулся каустики, а луч с индексом «2» – нет. Геометрооптическое (ГО) поле о-волны, формирующееся правее каустики о-волны, тоже двухлучёвое (8) ( $\kappa=o$ ). Амплитудные коэффициенты  $b_j$  в (10) имеют вид:

$$b_j = E_0 \exp[-\psi_j] \sqrt{|J_0 J_j^{-1}|} \quad (9)$$

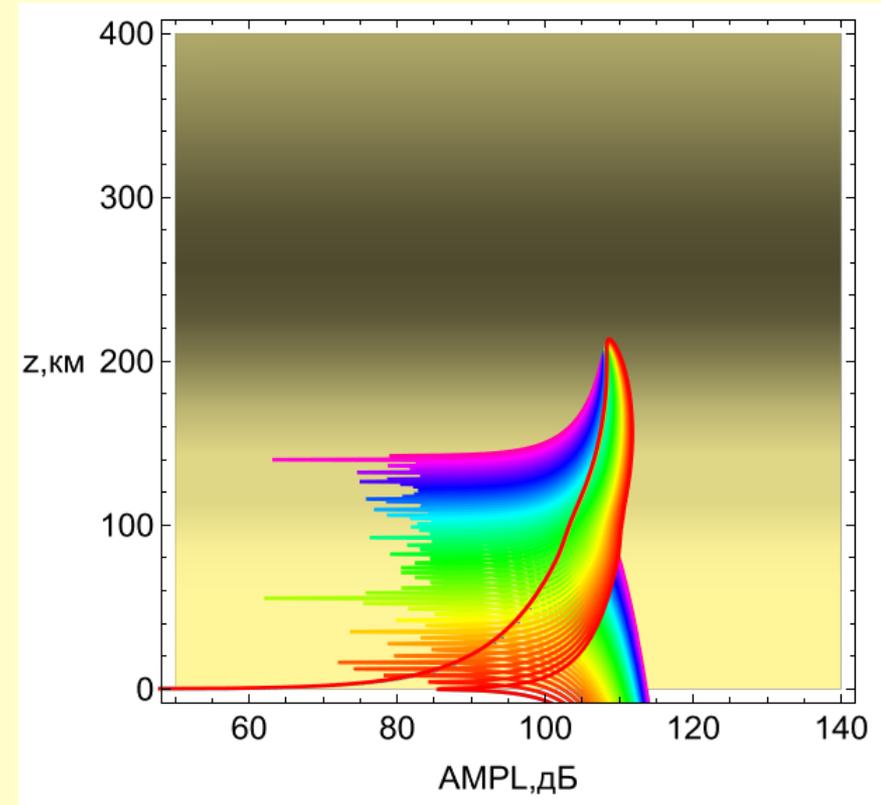
В выражении (9)  $\psi_j$  – поглощение, определяемое частотой соударения электронов,  $J_j$  – якобиан расходимости, вычисленный на основе расширенной бихарактеристической системы Лукина (4)-(5),  $J_0$  – начальное значение якобиана,  $E_0$  – начальное значение поля. Поглощение  $\psi_j$ , как и фаза  $\Phi_j$ , вычисляются вдоль лучевой траектории [Kryukovskii et al., 2020]. Мощность изотропного источника излучения 1 кВт. Так как на каустике якобиан  $J_j$  обращается в нуль, то в окрестности каустики коэффициенты  $b_j$ , а вместе с ними и решения (8) стремятся к бесконечности, что неверно.

Kryukovskii A.S., Lukin D.S., Bova Yu.I. Simulation of the Field in the Vicinity of Caustics of Ordinary and Extraordinary Waves during Ionospheric Propagation // Journal of Communications Technology and Electronics, 2020. V. 65, N 12. P. 1364–1373.

# Расходимость вдоль лучей, о-волна



а

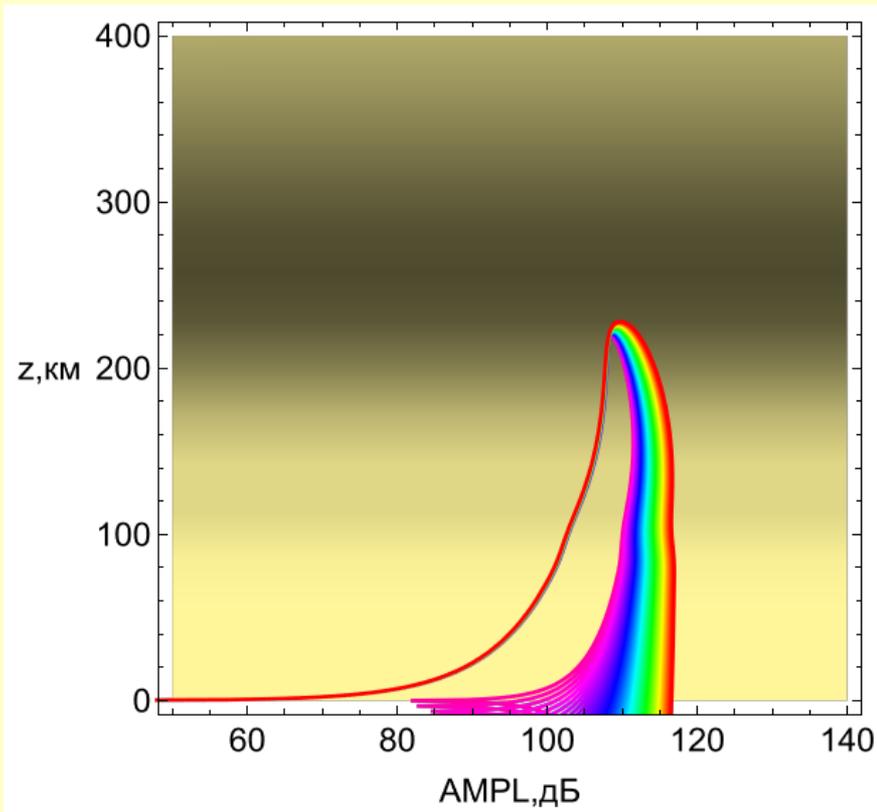


б

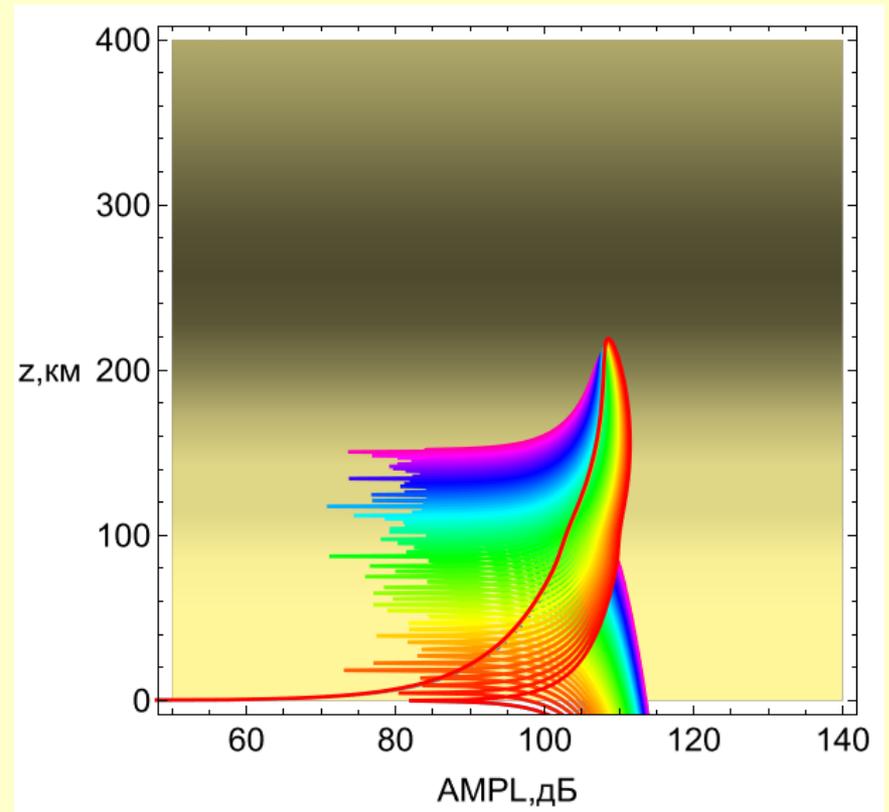
Рис. 4.

а – лучи, не коснувшиеся каустики; б – лучи, коснувшиеся каустики

# Расходимость вдоль лучей, $\chi$ -волна



а



б

Рис. 5.

а – лучи, не коснувшиеся каустики; б – лучи, коснувшиеся каустики

# Поле на каустике и в её окрестности

- Равномерная асимптотика, содержащая функцию Эйри и её производную

$$u_c \cong \exp(i\theta) (l_1 \cdot Ai(\lambda) - i l_2 \cdot dAi(\lambda) / d\lambda) \quad (10)$$

- $$Ai(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i(\xi^3 + \lambda \xi)) d\xi \quad - \text{ функция Эйри} \quad (11)$$

$\theta$  – фаза бегущей волны,  $\lambda$  – аргумент функции Эйри.

- Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. М.: МФТИ, 1982. 159 с.
- Кравцов Ю.А. Об одной модификации метода геометрической оптики. // Известия вузов. Радиофизика. 1964. Т. 7. № 4. С. 664–673.
- Airy G.B. On the intensity of light in the neighborhood of a caustic // Trans. Camb. Phil. Soc., 1838. V. 6. P. 379–402.

# Определение аргумента и коэффициентов

- В области света при  $\lambda < 0$  пересекаются два луча. Поэтому:

$$\theta = \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2) \quad \lambda = -3 \cdot 2^{-4/3} |\Phi_1 - \Phi_2|^{2/3} \quad (12)$$

- Коэффициенты (10)  $l_1$  и  $l_2$  в первом приближении имеют вид:

$$l_1 \cong \frac{b_1 + b_2}{2\sqrt{\pi}} \sqrt[4]{-3\lambda} \quad l_2 \cong \frac{3(b_1 - b_2)}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt[4]{-3\lambda}} \quad (13)$$

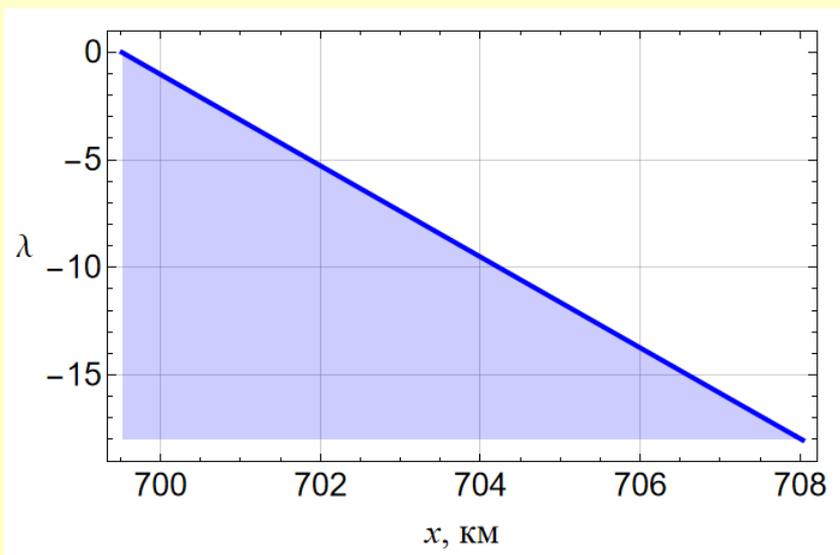
- Как видно из формул (10)-(13), коэффициенты асимптотического разложения, фаза бегущей волны и аргумент функции Эйри, вычисляются через фазы и амплитуды двух лучей в фиксированной точке. Поэтому возникает проблема определения с высокой точностью в каждой точке амплитуд и фаз этих лучей, которые приходят по разным, но близким траекториям, то есть необходимо решать задачу «пристрелки».

Вместо этого реализован другой алгоритм, аналогичный методу интерполяционной локальной асимптотики [Karepov, Kryukovskii, 2001], который отличается от классического локального подхода [Kryukovskii, 1996]. Сначала находится положение каустики  $x_c$  на оси  $x$  и угол выхода луча  $\zeta_c$ , касающегося каустики в этой точке. Если угол  $\zeta < \zeta_c$ , то луч принадлежит к подсемейству лучей, коснувшихся каустики. Если угол  $\zeta > \zeta_c$ , то луч принадлежит к подсемейству лучей, не коснувшихся каустики. Для каждого луча находится точка пересечения с поверхностью земли и вычисляются с ним связанные характеристики (амплитуда, фаза, время прихода и др.). Далее методом наименьших квадратов для каждого подсемейства лучей находятся интерполяционные формулы для амплитудных коэффициентов и фаз. Зная интерполяционные формулы в каждой точке, вычисляются амплитуды и фазы уже двух пересекающихся лучей и находятся лучевые и каустические поля.

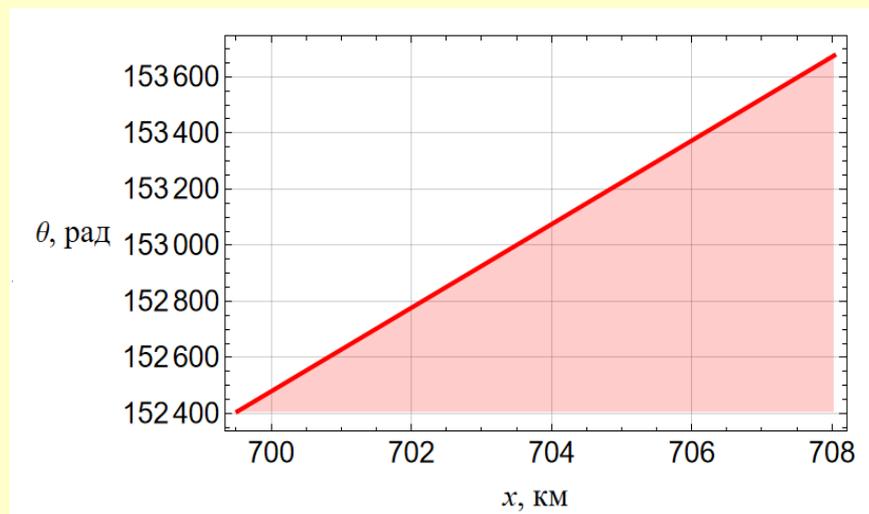
Karepov S.L., Kryukovskii A.S. Calculation of a wave field using the method of local interpolating asymptotics. // Journal of Communications Technology and Electronics. 2001. V. 46, N 1. P. 34–40.

Kryukovskii A.S. Local uniform asymptotics of wave fields in the vicinity of basic and boundary cuspidal caustics // Journal of Communications Technology and Electronics. 1996. V. 41, N 1. P. 51-57.

# Аргумент функции Эйри и фаза бегущей волны



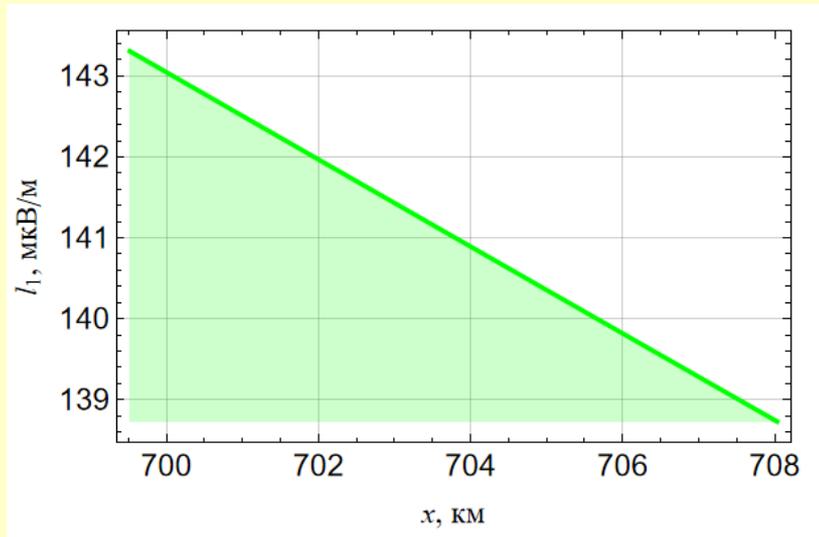
*Рис.6.*



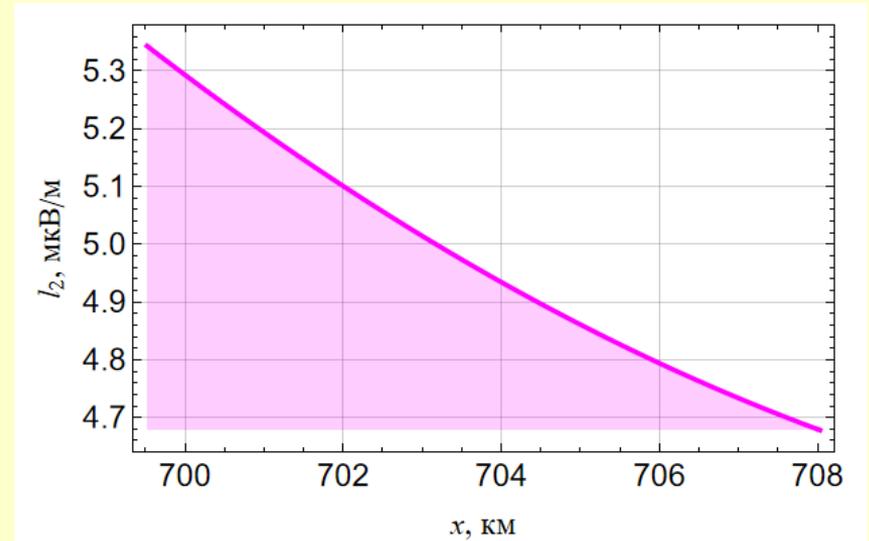
*Рис.7.*

О-ВОЛНА

# Коэффициенты с поглощением, O-волна

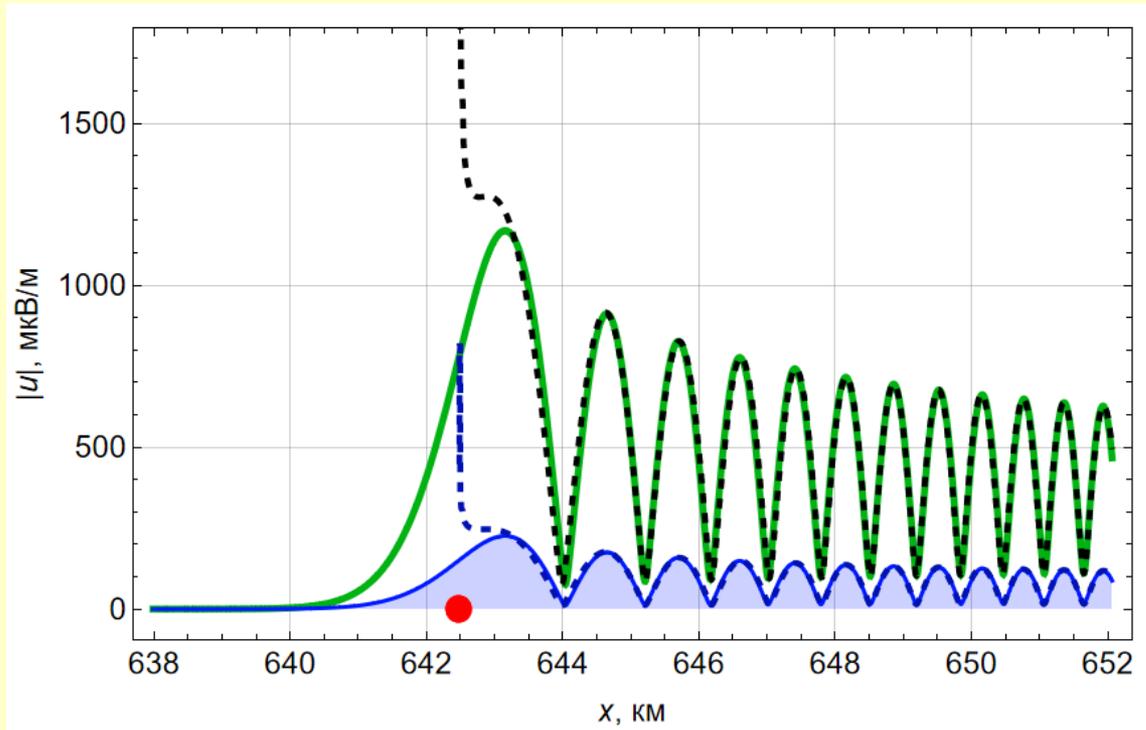


*Рис.8.*



*Рис.9.*

# Амплитуда поля х-волны в окрестности каустики



- *Рис.10.* Каустические решения, вычисленные по формуле (10), показаны сплошными линиями. Пунктиром показаны ГО решения (8). Верхние кривые выполнены без учёта поглощения, а нижнее расчеты с учётом. Максимальное значение амплитуды смещено в область света относительно положения каустики. Каустика отмечена точкой.

Значения амплитуды поля на каустике соответствуют среднему значению амплитуды поля в области света вблизи каустики. При удалении от каустики уменьшаются амплитуды осцилляций и их период ( $\sim 1$  км). Каустическая асимптотика совпадает с ГО приближением всюду в области света, кроме левой окрестности главного максимума амплитуды поля. Чтобы оценить максимальное значение амплитуды поля в окрестности каустики с помощью ГО приближения достаточно определить точку, где кривая образует перегиб, прежде чем уходит на бесконечность.

Kryukovsky A.S., Lukin D.S., Rastyagaev D.V., Bova Y.I. The method of mathematical modeling of wave fields and caustic structures in the process of propagation of electromagnetic radiation in the ionospheric plasma // 2021 XXXIVth General Assembly and Scientific Symposium of the International Union of Radio Science (URSI GASS), 2021. Rome, 28 August – 4 September Publisher: IEEE, P. 1-4.

# Амплитуда поля о-волны в окрестности каустики

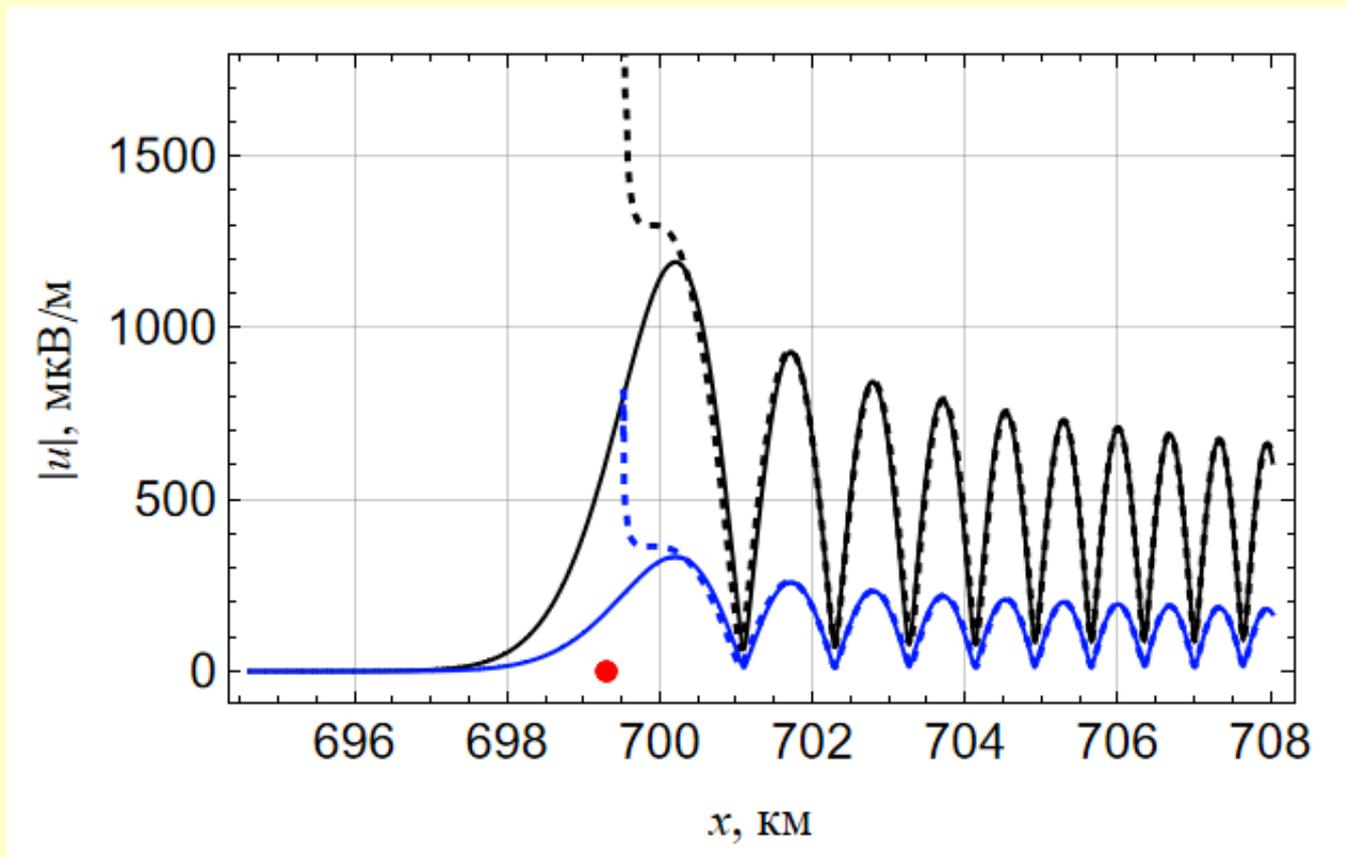
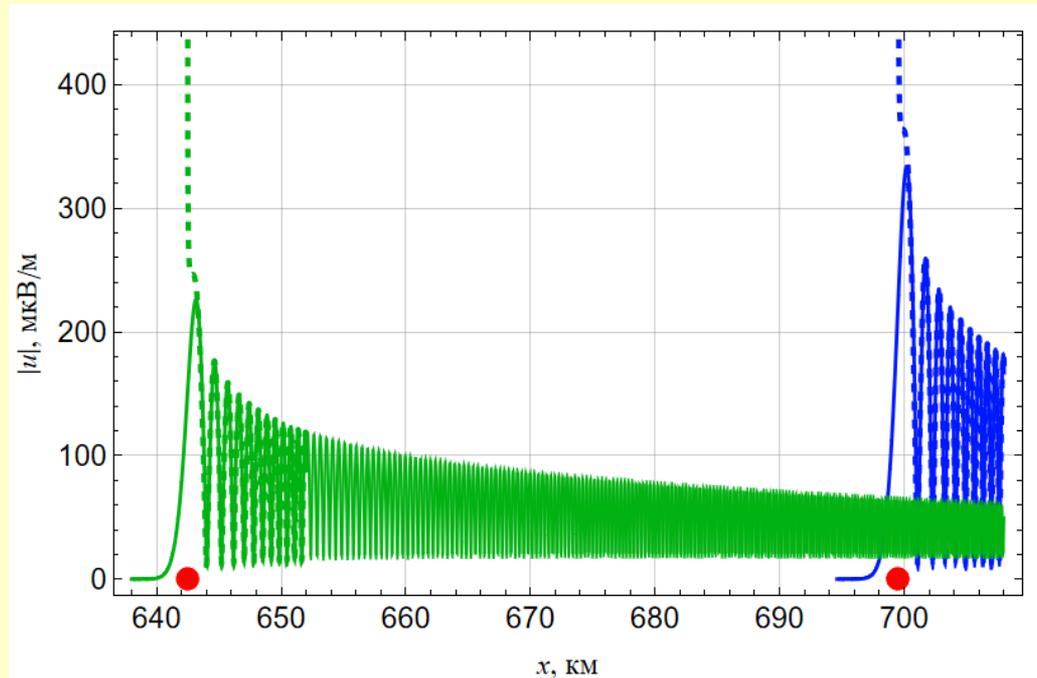


Рис.11.

# Амплитуда поля х-волны (зеленая линия) и о-волны (синяя линия)

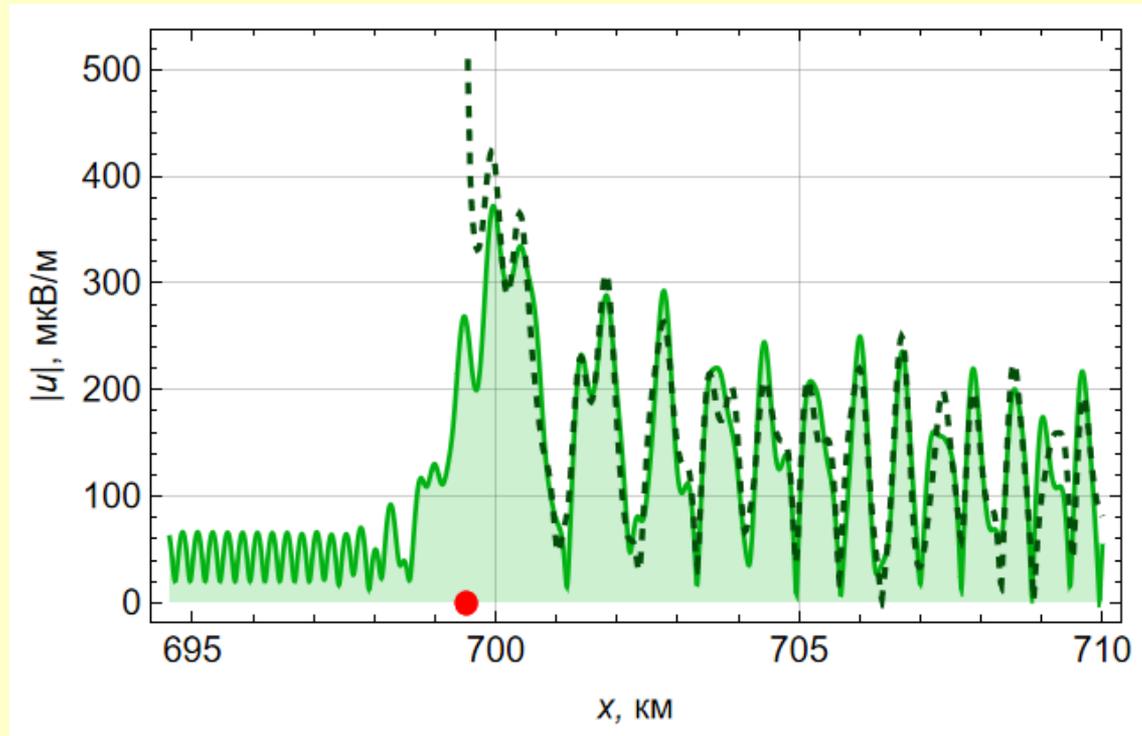


*Рис.12.*

Каустическое приближение (10) - сплошная линия, ГО приближение (8) - пунктир вдоль поверхности земли с учётом поглощения. Положения каустик х- и о-волны показаны красными точками.

Если не учитывать поглощение, то амплитуды поля о- и х- волны в окрестности каустики отличаются не сильно. Однако, при учёте поглощения амплитуда поля в окрестности каустики значительно меньше для х-волны, чем для о-волны.

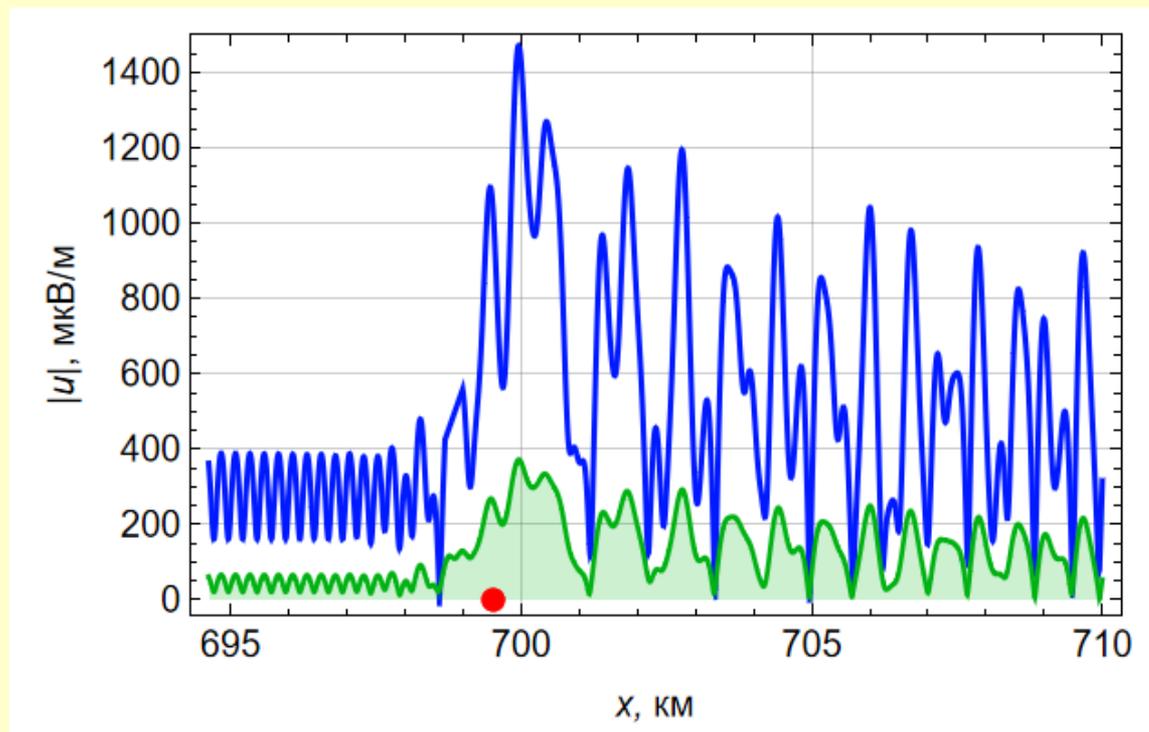
# Амплитуды суммарного поля в ГО (пунктир) и в каустическом приближении (сплошная линия) х- и о-волны в окрестности каустики о-волны



*Рис.13.*

Расчёт выполнен с учётом ионосферного поглощения, но без учёта поляризации и позволяет оценить влияние х-волны на поле о-волны в окрестности каустики о-волны при условии сохранения когерентности. Левее каустики (красная точка) прослеживаются регулярные осцилляции, которые создаёт двухлучёвое поле х-волны.

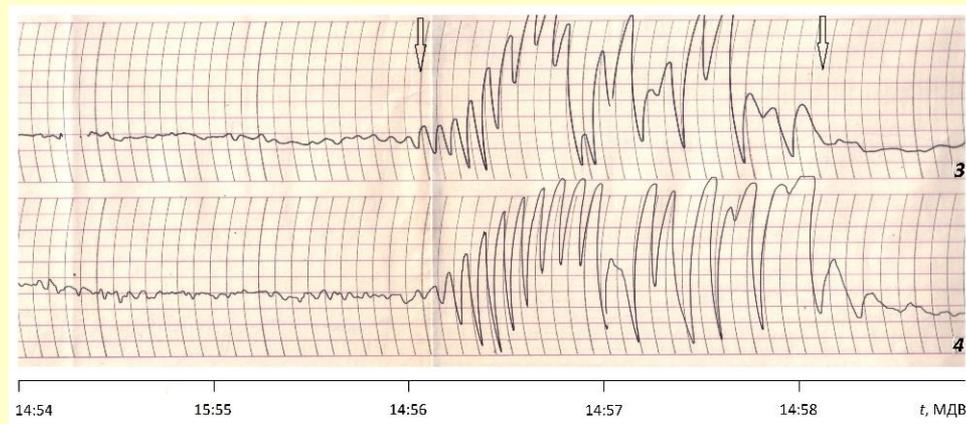
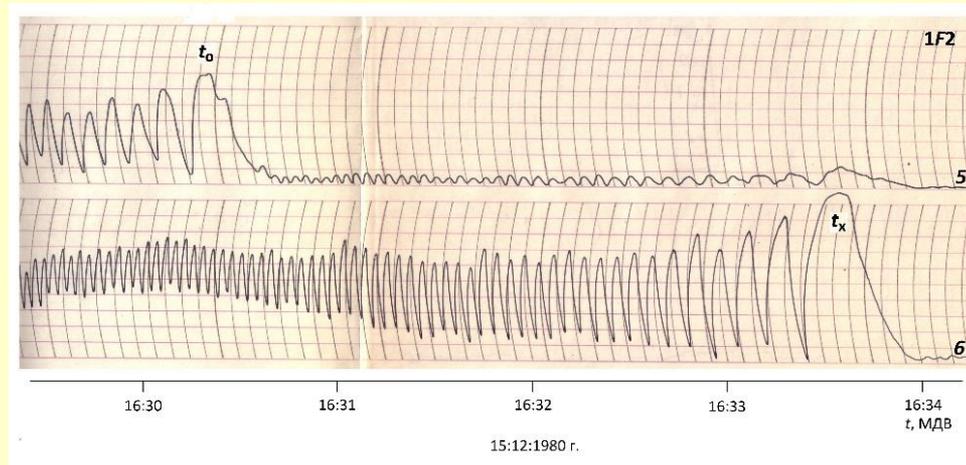
## Амплитуда поля о- и х-волны с учётом поглощения (зелёная линия) и без учёта поглощения (синяя линия)



*Рис.14.*

Абсолютные значения амплитуд отличаются более чем в 3 раза, хотя структуры амплитуд поля качественно совпадают. При отсутствии поглощения главный максимум сопоставим с соседними вершинами. При учёте поглощения по первому минимуму ГО поля справа от каустики можно судить о максимальном значении амплитуды поля вблизи каустики, так как в этом случае классическая структура амплитуды поля в окрестности каустики сохраняется.

# Экспериментальные результаты [Нагорский П.М.]



# ОСНОВЫ ВОЛНОВОЙ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ

Помимо гладкой каустики на рис. 2 хорошо видны две точки возврата – два каустических острия. Это волновые катастрофы  $A_3$ . В окрестности каустического острия волновое поле выражается через функцию Пирси и две её первые производные [Budden, 1976]:

$$u_c \cong \exp(i\theta) \left( l_1 \cdot I^{A_3}(\lambda_1, \lambda_2) + l_2 \cdot \partial I^{A_3}(\lambda_1, \lambda_2) / \partial \lambda_1 + l_3 \cdot \partial I^{A_3}(\lambda_1, \lambda_2) / \partial \lambda_2 \right) \quad (14)$$

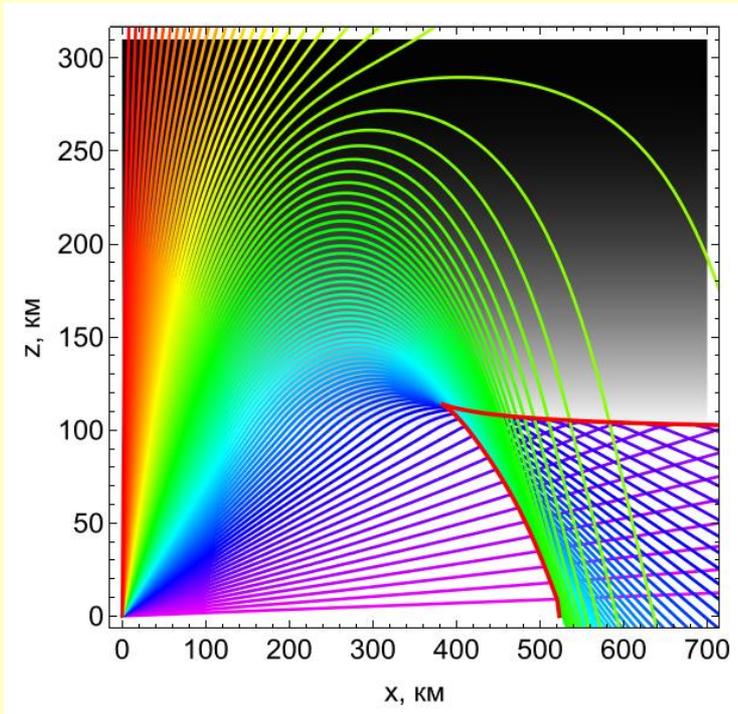
$$I^{A_3}(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i(\xi^4 + \lambda_2 \xi^2 + \lambda_1 \xi)) d\xi \quad - \text{ функция Пирси,} \quad (15)$$

$\theta$  – фаза бегущей волны,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  – аргументы функции Пирси [Pearcey, 1946],  $l_1, l_2, l_3$  – коэффициенты равномерного асимптотического разложения, которые выражаются, как в случае с функцией Эйри, через фазы и амплитуды, но уже трёх лучей.

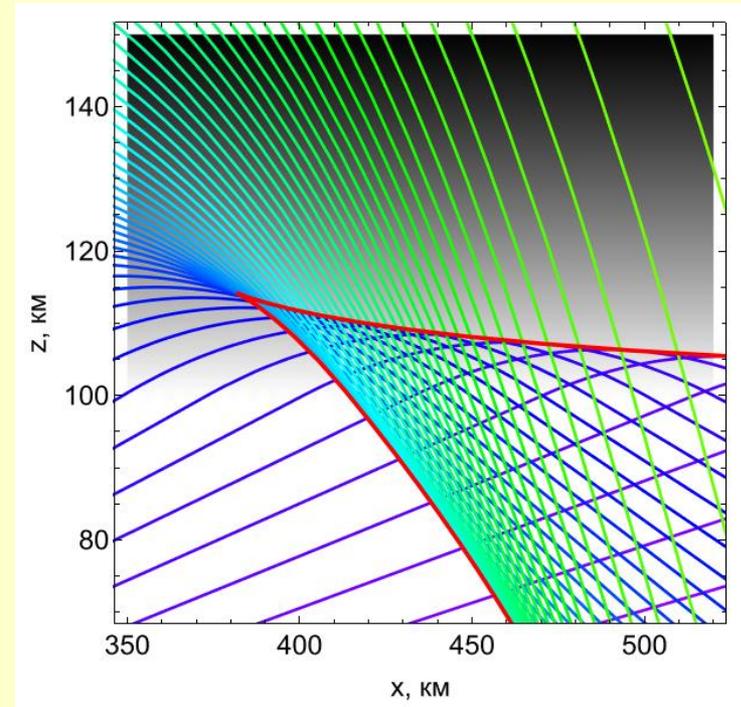
Budden K.G. Radio caustics and cusps in the ionosphere // Proc. Roy. Soc. London. 1976. V. A350. № 1661. P. 143 – 164.

Pearcey T. The structure of an electromagnetic field in the neighborhood of a cusp of a caustic // Philos. Mag., 1946. V. 37. P. 311 – 317.

# Каустическое острие $A_3$



*a*



*б*

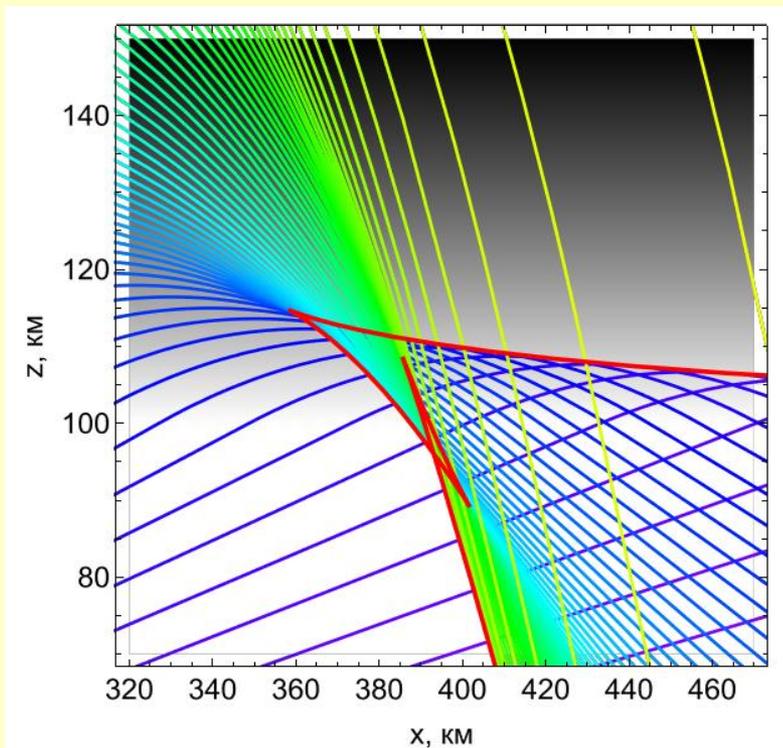
Рис.15.  $a = \sqrt{v} = 0.9$ ;  $z_0 = 200$  км;  $z_h = 100$  км;  $f = 14.1088$  МГц

Однако в ионосфере встречаются и гораздо более сложные фокусировки. Это каспоидные особенности  $A_N$  («ласточкин хвост» –  $N=4$ , «бабочка» –  $N=5$ , «вигвам» –  $N=6$ ) [Лукин, Палкин, 1982], а также омбилические особенности: простые  $D_4^\pm$ ,  $D_5, \dots$  и модальные  $P_9$ ,  $X_9$ ,  $J_{10}$  [Крюковский и др., 2006].

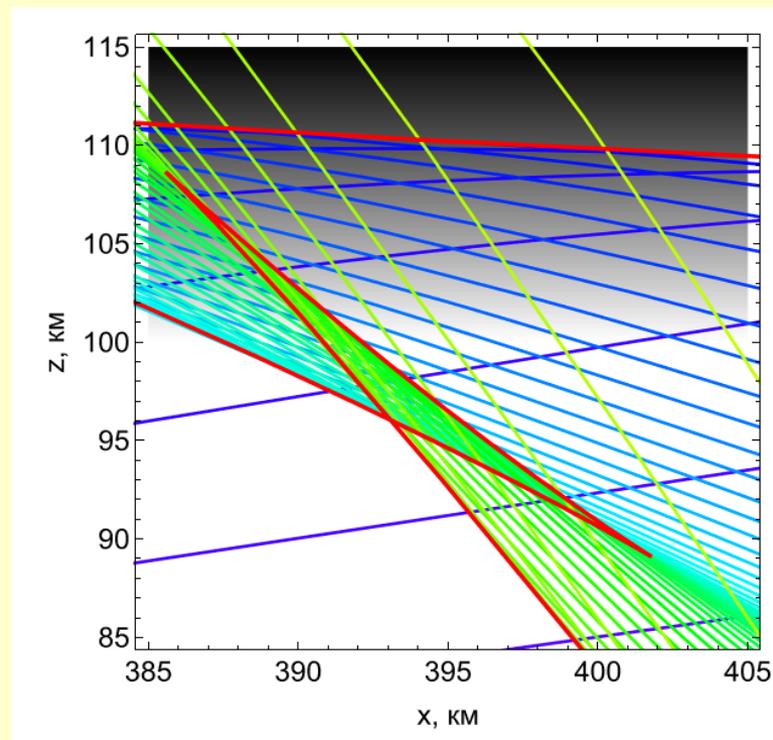
Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. М.: МФТИ, 1982. 159 с.

Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Волновые катастрофы – фокусировки в дифракции и распространении электромагнитных волн. // РЭ, 2006. Т.51. №10. С. 1155–1192.

# Ласточкин хвост $\Lambda_4$



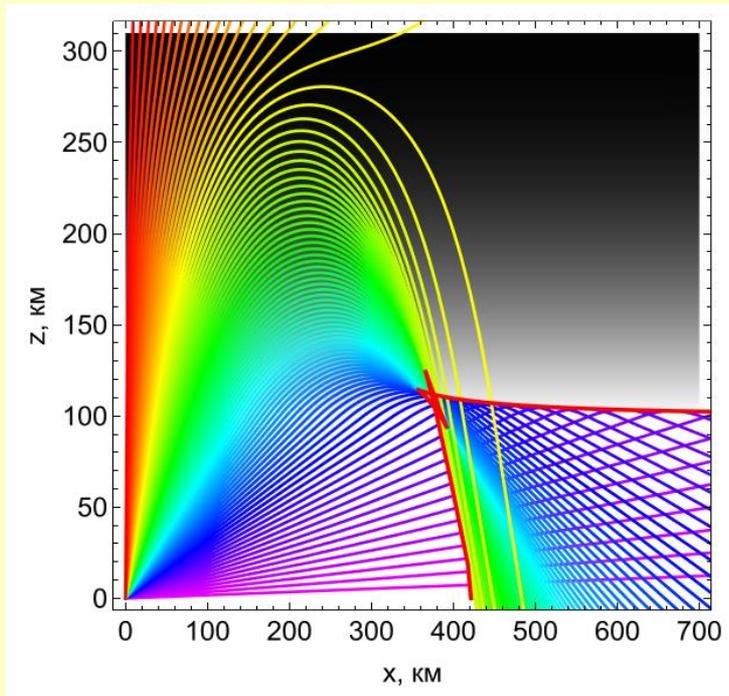
*a*



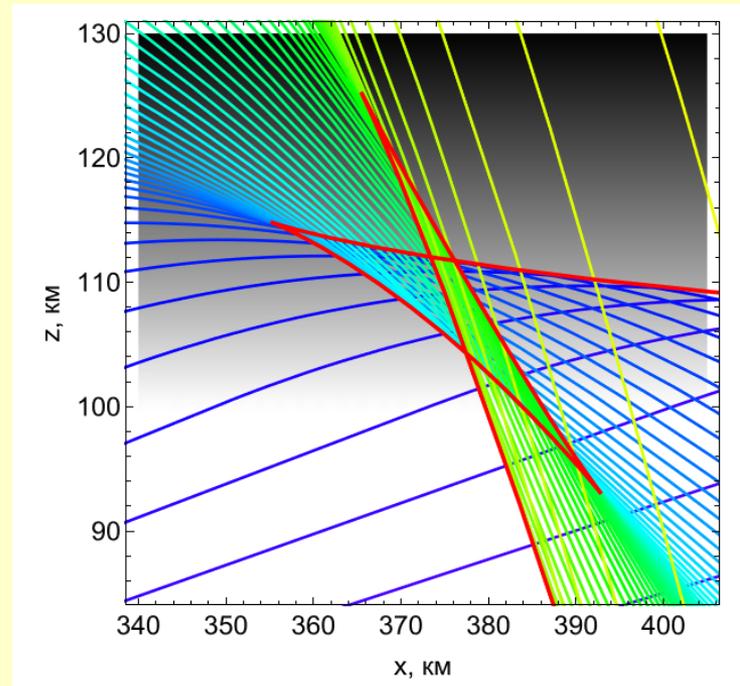
*б*

*Рис.16.  $a=0.944$   $f = 13.4512$  МГц*

# Бабочка $A_5$

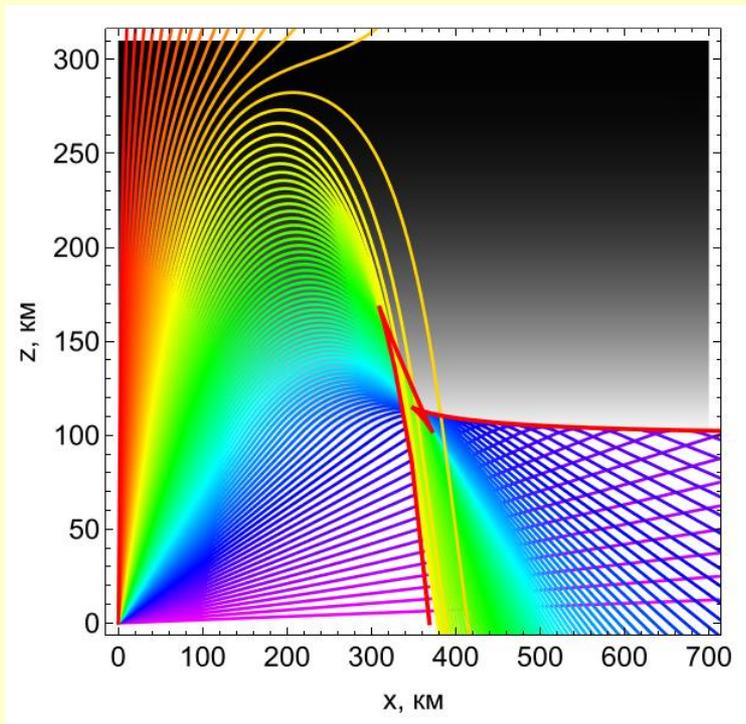


*a*

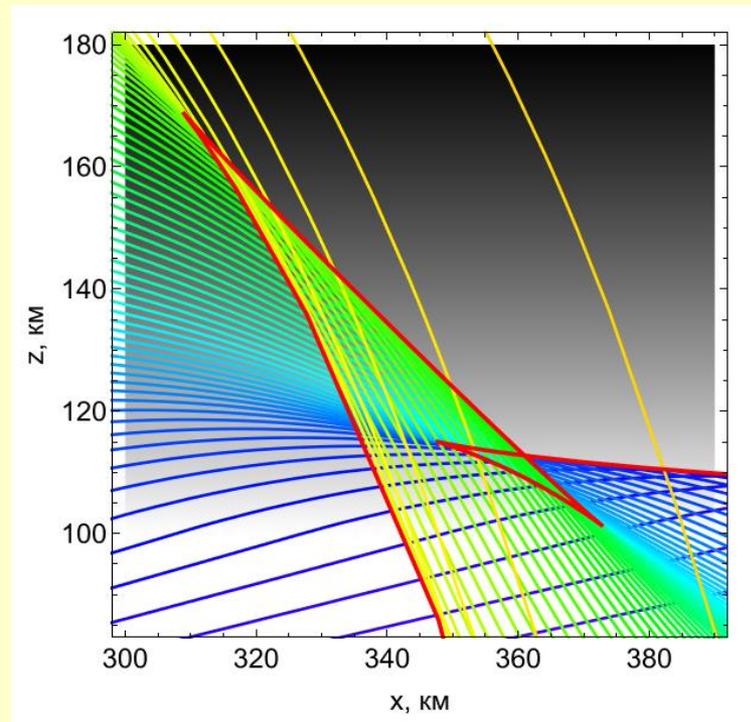


*б*

Рис.17.  $a=0.95$   $f = 13.3662$  МГц



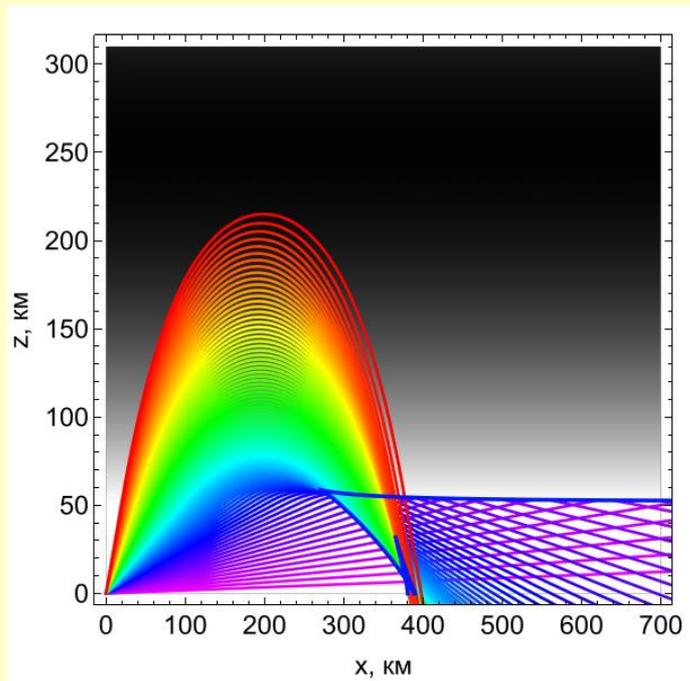
*a*



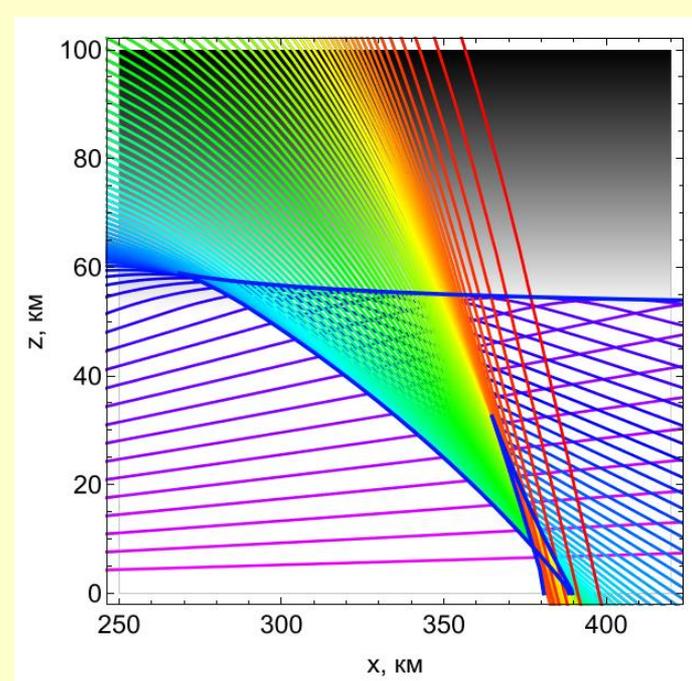
*б*

*Рис.18.  $a=0.96$*

$$f = 13.15845 \text{ МГц}$$



*a*



*б*

*Рис.19.  $a=0.95$*

$$f = 13.3662 \text{ МГц}; \quad z_0 = 200 \text{ км}; \quad z_h = 52 \text{ км}$$

Согласно ВТК, равномерная асимптотика в окрестности таких особенностей (катастроф) имеет вид [Крюковский, 2013]:

$$u_c \cong \exp(i\theta) \left( l_1 \cdot I^\Sigma(\vec{\lambda}, a) + \sum_{j=2}^{N_c+1} l_j \frac{\partial I^\Sigma}{\partial \lambda_{j-1}} + \sum_{j=N_c+2}^N l_j \frac{\partial I^\Sigma}{\partial a_{j-N_c-1}} \right) \quad (16)$$

где  $N_c$  – коразмерность особенности,

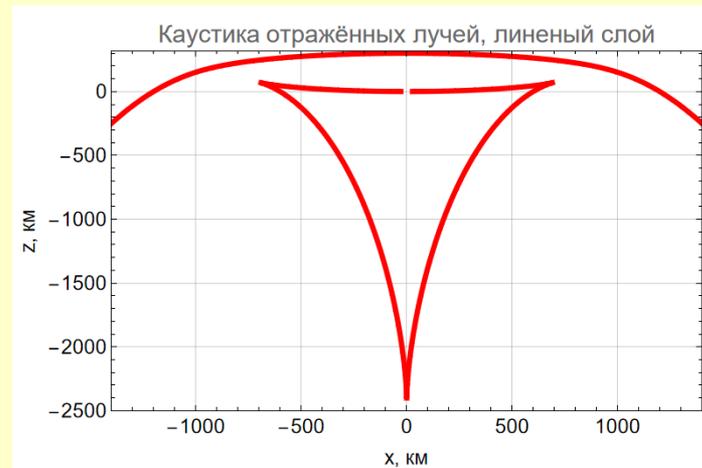
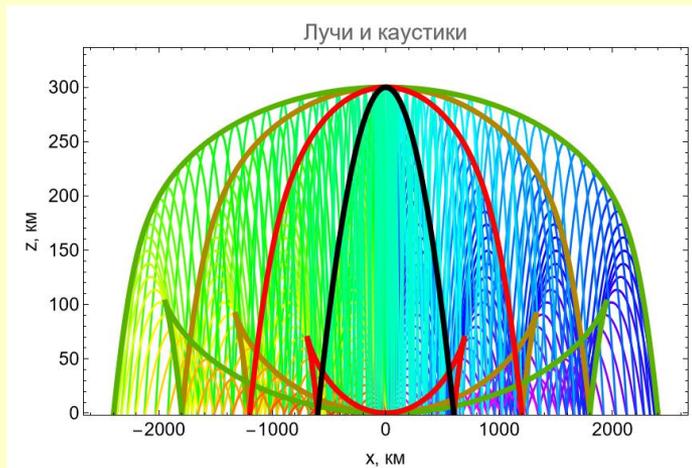
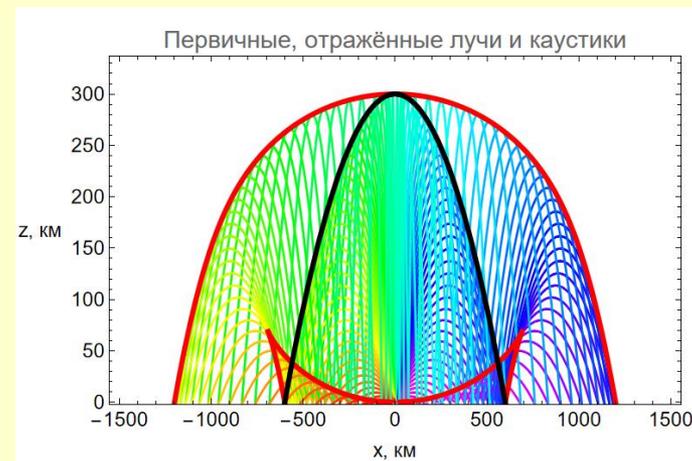
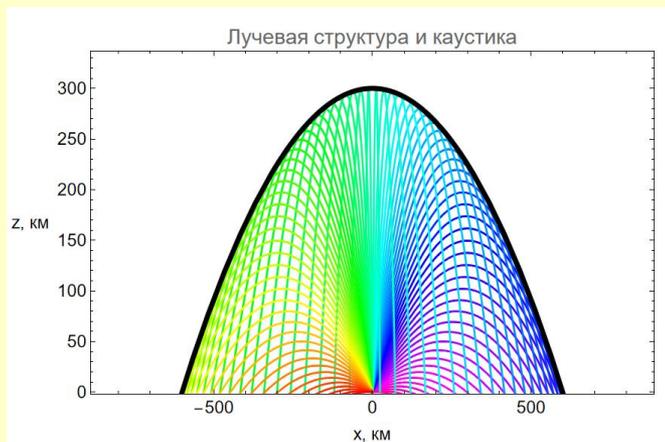
$$N = N_c + \dim \vec{a} + 1 \quad \text{– кратность особенности,}$$

$$I^\Sigma(\lambda_1, \dots, \lambda_{N_c}; \vec{a}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i F_\Sigma(\vec{\xi}, \vec{a}, \vec{\lambda})) d\xi_1 \dots d\xi_k \quad (17)$$

– СВК катастрофы типа  $\Sigma$ ,  $F_\Sigma(\vec{\xi}, \vec{a}, \vec{\lambda})$  – универсальная деформация,  $\dim \vec{a}$  – модальность.

Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. Монография. М.: РосНОУ, 2013. 368 с.

# Каустики отраженных лучей



# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Таким образом, в лекции рассмотрено моделирование распространения радиоволн декаметрового диапазона в неоднородной ионосферной плазме методом бихарактеристик и методами волновой теории катастроф. Исследованы лучевая, каустическая и амплитудная структуры электромагнитных полей с учетом магнитного поля Земли. Представлены результаты моделирования амплитуды поля х- и о-волн в окрестности каустик, полученные на основе решения расширенной бихарактеристической системы Лукина. Сопоставлено равномерное (каустическое) приближение и неравномерное (лучевого, ГО) приближение. Выполнена оценка влияния х-волны на амплитуду поля о-волны в окрестности каустики. Рассмотрены равномерные асимптотики, описывающие амплитудно-фазовые структуры волновых полей в окрестности особых каустик.
- Работа поддержана Российским научным фондом (грант № 20-12-00299).

Спасибо за внимание!