

ПОИСК МНОГОСКАЧКОВЫХ ЛУЧЕЙ В ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ О РАСЧЕТЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ПОЛЕЙ

И.А. Носиков^{1,2}, А.А. Толченников³, С.Ю. Доброхотов³, К.В. Бельюченко^{2,4},
В.Н. Боков^{1,2,4}, М.В. Клименко^{1,2}, П.Ф. Бессараб⁵

¹Калининградский филиал Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова
РАН, г. Калининград, Россия

igor.nosikov@gmail.com

²Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

³Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

⁴Балтийский федеральный университет им. И. Канта, г. Калининград, Россия

⁵Университет Исландии, Рейкьявик, Исландия

SEARCH FOR MULTI-HOP RAYS IN THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF CALCULATING HIGH-FREQUENCY FIELDS

I.A. Nosikov^{1,2}, A. A. Tolchennikov³, S. Yu. Dobrokhotov³, K. V. Belyuchenko^{2,4},
V.N. Bokov^{1,2,4}, M. V. Klimenko^{1,2}, P.F. Bessarab⁵

igor.nosikov@gmail.com

Рассмотрена краевая задача о расчете многоскачковых лучей, отраженных от некоторой заданной границы раздела двух сред. Показано, что исходная задача может быть сведена к расчету стационарных точек функционала фазового пути. Информация о целевой функции в области решений траекторной задачи позволила построить систематическую процедуру поиска минимумов и седловых точек. Особенностью данной задачи является оптимизация точки отражения луча вдоль заданной границы раздела двух сред. Обсуждается применение данного подхода для расчета лучей радиоволн и океанических волн.

Ключевые слова: принцип Ферма, граничная задача, радиоволны, волны цунами.

We consider the boundary-value problem of calculating multi-hop rays reflected from a given interface between two media. It is shown that the original problem can be reduced to calculating the stationary points of the phase path functional. Information about the object function in the area of solutions made it possible to construct a systematic procedure for finding minima and saddle points. A feature of this problem is the optimization of the ray's reflection point along a given interface between two media. The application of this approach to the calculation of rays of radio waves and ocean waves is discussed.

Keywords: Fermat's principle, boundary problem, radio waves, tsunami waves.

ВВЕДЕНИЕ

Распространение высокочастотных волн в приближении геометрической оптики описываются характеристическими кривыми — лучевыми траекториями. Особенностью лучевого описания распространения волн различной природы (волны цунами, радиоволны, сейсмические волны и т.д.) является рефракция лучей в плавно неоднородных средах. В результате лучевая картина характеризуется наличием фокусов и каустик, в окрестности которых наблюдается рост амплитуды поля волны, многолучевостью и интерференцией волн в точке приема. Широко известный метод бихарактеристик [Казанцев и др., 1967] позволяет успешно решать задачи лучевой трассировки в неоднородных, анизотропных средах с заданными начальными условиями. На основе алгоритма пристрелки и метода бихарактеристик также успешно решается краевая задача. Дополнением к существующему подходу является разработка вариационных методов к решению краевой задачи на основе принципа Ферма. Ранее в рамках вариационного подхода был предложен метод обобщенной силы, позволяющий рассчитывать односкачковые верхние и нижние лучи [Nosikov et al., 2020]. Данная работа посвящена дальнейшему раз-

витию метода обобщенной силы для расчета лучей, отраженных от гладкой границы раздела двух сред, с заданными граничными условиями.

МЕТОД И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Сформулируем принцип Ферма как требование стационарности фазового пути лучевой траектории:

$$\delta S(\gamma) = \delta \int_A^B n(\vec{r}) dl = 0, \quad (1)$$

где A и B — положения начальной и конечной точек кривой γ , $n(\vec{r})$ — показатель преломления в точке \vec{r} , dl — элемент длины. Предположим, что лучевая траектория γ вдоль пути распространения от точки A до точки B испытывает отражение в точке C от некоторой гладкой границы раздела двух сред с различными показателями преломления. Тогда принцип Ферма можно переписать следующим образом:

$$\delta S[\gamma] = \delta S_1 + \delta S_2 = \delta \int_A^C n(\vec{r}) dl + \delta \int_C^B n(\vec{r}) dl = 0. \quad (2)$$

Следовательно, принцип Ферма накладывает требование стационарности как на каждый фазовый путь двух частей S_1 и S_2 кривой γ , так и на фазовый

путь всей кривой γ . Таким образом, исходная задача состоит в поиске оптимального положения точки отражения C и оптимальной траектории γ в соответствии с выражением (2).

Применение вариационного подхода для расчета лучей, отраженных от некоторой заданной границы раздела, рассмотрим на примере среды, где показатель преломления задается выражением [Доброхотов, Назайкинский, 2016]

$$n(y) = 1/\sqrt{y}. \quad (3)$$

Лучевые траектории, рассчитанные пристрелкой в данной среде, представлены на рис. 1. В данном случае решениями граничной задачи являются три отраженных луча. Далее численно исследуем поведение функционала (2) с использованием понятия «виртуальный луч», аналогично подходу, представленному в работе [Носиков, Клименко, 2017].

Под термином «виртуальный луч» будем понимать траекторию, соединяющую точки A , B и C , причем для каждого участка траектории AC и CB независимо решается минимизация с соответствующими граничными точками. Рассчитав виртуальные лучи для набора положений точки C в диапазоне $x=[0:5]$ (см. рис. 1), определяем функциональную зависимость фазового пути множества виртуальных лучей от положения точки отражения (рис. 2).

Кривая фазового пути характеризуется наличием трех стационарных точек, соответствующих трем искомым решениям. Таким образом, построение вариационной процедуры поиска отраженных лучей возможно на основе оптимизации положения точки отражения. Тогда в общем случае, учитывая кусочно-линейное представление траектории, выражение для обобщенной силы, действующей на отраженную точку, запишем в виде

$$\vec{F}_c = -\frac{dS}{d\vec{r}_c} = -\frac{dS}{d\vec{r}_c} - \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{r}_i}{d\vec{r}_c} \frac{dS}{d\vec{r}_i}, \quad (4)$$

где $\vec{r}_c, \vec{\tau}_c$ — положение точки C и касательная к границе раздела в этой же точке, \vec{r}_i — положение подвижных точек кусочно-линейной траектории, N — число подвижных точек. Выражение (4) представляет собой отрицательный градиент функционала \vec{r}_c по переменной позволяющий реализовать процедуру минимизации. Для определения максимума (см. рис. 2) достаточно применить оптимизацию напрямую вдоль градиента. В случае поиска решения седлового типа необходима оценка гессиана фазового пути, что является предметом дальнейших исследований. Далее на основе (4) была реализована процедура последовательного поиска стационарных точек вариационным способом, аналогично алгоритму, представленному в работе [Nosikov et al., 2020]. В результате были успешно определены все три искомым решения (см. рис. 1).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен вариант вариационного метода определения лучевых траекторий, отраженных от границы раздела, с заданными граничными условиями. Идея метода основана на оптимизации фазового пути луча в зависимости от положения точки отражения. Показано, что проблема многолучевости отраженных

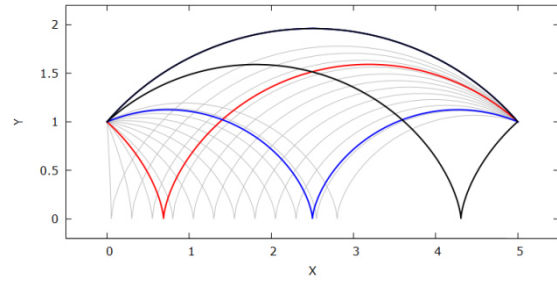


Рис. 1. Лучевые траектории и виртуальные лучи, соединяющие крайние точки A и B . Лучевые траектории, рассчитанные методом пристрелки, представлены в виде цветных линий (красные, синие и черные). Виртуальные лучи, рассчитанные прямой минимизацией с закрепленным положением точки отражения, представлены в виде серых линий. Граница раздела совпадает с осью OX

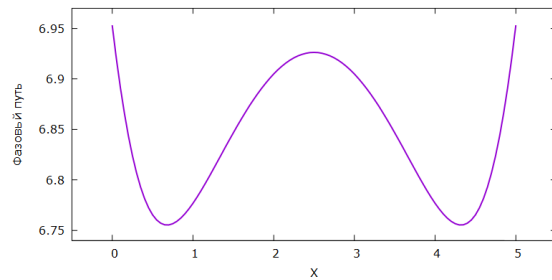


Рис. 2. Зависимость фазового пути виртуальных траекторий, представленных на рис. 1 (серые линии), от гипотетического положения точки отражения. Три стационарные точки соответствуют трем решениям граничной задачи — лучевым траекториям, рассчитанным методом пристрелки

лучей может быть преодолена последовательной процедурой оптимизации стационарных точек. Результаты расчетов имеют прикладное значение для расчета лучей океанических волн (волн цунами), отраженных от береговой линии, а также прогноза радиосвязи при многоскачковом распространении.

Работа по реализации вариационного метода выполнена при поддержке проекта Минобрнауки России № 075-15-2021-583 (Носиков И.А., Клименко М.В.). Расчеты методом бихарактеристик (Толченников А.А., Доброхотов С.Ю.) выполнены при поддержке гранта РФФИ № 21-71-30011.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Nosikov I.A., Klimenko M.V., Zhabankov G.A., et al. Generalized force approach to point-to-point ionospheric ray tracing and systematic identification of high and low rays. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2019. Vol. 68, no. 1. P. 455–467.
- Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е. Характеристики с особенностями и граничные значения асимптотического решения задачи Коши для вырождающегося волнового уравнения. *Математические заметки*. 2016. Т. 100, № 5. С. 710–731.
- Казанцев А.Н., Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Метод исследования распространения радиоволн в неоднородной магнитоактивной ионосфере. *Косм. иссл.* 1967. Т. 5, № 4. С. 593–600.
- Носиков И.А., Клименко М.В. Исследование функционала верхних и нижних лучей в задаче расчета радиотрасс в модельной ионосфере. *Химическая физика*. 2017. Т. 36, № 12. С. 61–65.