

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ КОРОТКИХ РАДИОВОЛН МЕТОДАМИ БИХАРАКТЕРИСТИК И ВОЛНОВОЙ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ

А.С. Крюковский

Российский новый университет, Москва, Россия
kryukovsky56@yandex.ru

SIMULATION OF PROPAGATION OF SHORT RADIO WAVES BY METHODS OF BICHARACTERISTICS AND THE WAVE THEORY OF CATASTROPHES

A.S. Kryukovsky

Russian New University, Moscow, Russia
kryukovsky56@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрены методы моделирования распространения радиоволн декаметрового диапазона в неоднородной анизотропной ионосферной плазме: метод бихарактеристик и волновая теория катастроф. Исследованы лучевая, каустическая и амплитудная структуры электромагнитных полей. Приведены результаты математического моделирования амплитуды поля х- и о-волны в окрестности каустик, полученные на основе решения расширенной бихарактеристической системы Лукина. Рассмотрены равномерные асимптотики, содержащие специальные функции волновых катастроф и описывающие амплитудно-фазовые структуры волновых полей в окрестности особых каустик каспоидного, омбилического и модального типов.

Ключевые слова: распространение, радиоволны, ионосфера, бихарактеристики, лучи, каустики, волновые катастрофы, асимптотики, моделирование, х- и о-волны.

Abstract. Methods for modeling the propagation of decameter radio waves in inhomogeneous anisotropic ionospheric plasma are considered: the method of bicharacteristics and the wave catastrophe theory. The ray, caustic and amplitude structures of electromagnetic fields are investigated. We present the results of mathematical modeling of the amplitude of the x- and o-wave field in the vicinity of caustics obtained through the solution of Lukin's extended bicharacteristic system. Uniform asymptotics are considered that contain special functions of wave catastrophes and describe the amplitude-phase structures of wave fields in the vicinity of singular caustics of cuspid, umbilical, and modal types.

Keywords: propagation, radio waves, ionosphere, bicharacteristics, rays, caustics, wave catastrophes, asymptotics, modeling, x- and o-waves.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая лекция посвящена вопросам моделирования распространения коротких электромагнитных волн методами бихарактеристик и волновой теории катастроф. Актуальность темы определяется активным применением декаметровых радиоволн для решения современных задач радиолокации, радионавигации, дальней радиосвязи, загоризонтного зондирования, а также для исследования верхней атмосферы Земли — ионосферы и магнитосферы.

Теоретическим исследованием распространения радиоволн в ионосфере Земли посвящены классические монографии [Гинзбург, 1967; Дэвис, 1973; Гершман и др., 1984]. В современное понимание проблемы распространения радиоволн в ионосфере важный вклад внесли работы [Краснушкин, 1947; Зернов, 1980; Куркин и др., 1981; Черкашин, 1971; Лукин, Палкин, 1982; Иванов, 2006; Куницын и др., 2007; Иванов и др., 2015;] и др.

Удобным и наглядным инструментом, предназначенным для описания распространения радиоволн коротковолнового диапазона в ионосфере Земли, является лучевой подход, основанный на применении гамильтонова формализма [Казанцев и др., 1967] и численном интегрировании бихарактеристической системы:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{d\tau} &= \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{k}}, \quad \frac{d\vec{k}}{d\tau} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{r}} \\ \frac{dt}{d\tau} &= -\frac{\partial \Gamma}{\partial \omega}, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Gamma = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (2)$$

в которой \vec{k} — волновой вектор; \vec{r} — координаты луча; t — групповое время; τ — параметр интегрирования; ω — круговая частота; Γ — гамильтониан. Решением системы (1), (2) являются функции

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}(\zeta, \eta, t_0; \tau), \quad \vec{k} = \vec{k}(\zeta, \eta, t_0; \tau), \\ t &= t(\zeta, \eta, t_0; \tau), \quad \omega = \omega(\zeta, \eta, t_0; \tau), \end{aligned} \quad (3)$$

зависящие от ζ, η, t_0 и параметра τ , меняющегося вдоль траектории.

Бихарактеристическая система описывает траектории лучей и волновые вектора в неоднородной магнитоактивной (возможно нестационарной) среде. На основе решения бихарактеристической системы можно рассчитать фазу, учесть поглощение вдоль траекторий и вращение вектора поляризации.

Помимо лучевого метода, существует ряд альтернативных подходов к решению задач о распространении радиоволн в ионосфере. Это метод параболического уравнения, метод нормальных волн, метод суммирования гауссовых пучков, метод интерференционного интеграла и др.

Обобщением метода бихарактеристик является метод расширенной бихарактеристической системы Лукина [Лукин, Спиридонов, 1969; Kryukovskii et al., 2012]:

$$\frac{d\vec{r}_\zeta}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{k}} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \right), \quad (4)$$

$$\frac{d\vec{k}_\zeta}{dt} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{r}} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \right),$$

$$\frac{d\vec{r}_\eta}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{k}} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \right), \quad (5)$$

$$\frac{d\vec{k}_\eta}{dt} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{r}} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \right),$$

который стал основой определения напряженности волновых полей, поскольку позволяет вычислять якобианы расходимости лучевого потока. Методом расширенной бихарактеристической системы можно найти не только поля в регулярных областях, но и поле на каустике. Каустики — это огибающие лучевых семейств. В лучевом приближении на каустиках интенсивность поля обращается в бесконечность, поскольку якобиан расходимости равен нулю. В действительности на каустике интенсивность поля существенно возрастает, но остается конечной.

Поскольку в фазовом координатно-импульсном пространстве траектории не пересекаются, на основе решения бихарактеристической системы можно рассчитать каустическую структуру волнового поля методом канонического оператора Маслова (КОМ) [Маслов, 1965] с использованием специальных функций волновых катастроф (СВК) [Лукин, Палкин, 1982].

На основе теории особенностей дифференцируемых отображений [Арнольд и др., 1982, 1984] и метода КОМ для решения задач о распространении и дифракции коротковолнового излучения в неоднородных средах с частотной дисперсией построена волновая теория катастроф (ВТК) [Крюковский, Лукин, 1998; Крюковский и др., 2006].

ВТК позволила получить наглядную геометрическую (лучевую и каустическую) интерпретацию особых фокальных дифракционных структур электромагнитных полей и рассчитать значения полей в этих областях.

СТРУКТУРА ПОЛЯ В ОКРЕСТНОСТИ КАУСТИКИ

В качестве примера рассмотрим амплитудную структуру электромагнитного поля на поверхности земли в окрестности каустики. В декаметровом диапазоне выражение для эффективной диэлектрической проницаемости можно представить в виде формулы Эпплтона—Хартли [Дэвис, 1973]:

$$\varepsilon_\pm = 1 - \frac{2\nu(1-\nu)}{2(1-\nu) - u \sin^2 \alpha \pm \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u(1-\nu)^2 \cos^2 \alpha}}. \quad (6)$$

В (6) знак «+» соответствует обыкновенной волне (о-волна), а знак «-» — необыкновенной (х-волна). Угол между вектором напряженности магнитного поля Земли и волновым вектором \vec{k} обозначен как α , ν и u — это отношения квадратов плазменной частоты и гирочастоты к квадрату рабочей частоты:

$$\nu = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{4\pi e^2 N}{m_e \omega^2}, \quad u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} = \frac{e^2 H_0^2}{m_e^2 c^2 \omega^2}, \quad (7)$$

где $N(\vec{r})$ — концентрация электронов; e — заряд электрона; m_e — масса электрона; H_0 — напряженность магнитного поля Земли. Углы γ и φ определяют ориентацию напряженности магнитного поля. На рис. 1 представлена модель среднеширотной дневной ионосферы, использованная при вычислениях.

Источник излучения монохроматический (частота $f=9.5$ МГц), расположен на поверхности земли в начале координат. Лучи выходят из источника в плоскости (x, z) , т. е. $\eta=0$.

На рис. 2 а, б показаны лучевые траектории в плоскостях (x, z) и (y, z) для х-волны. В виде фона на рис. 1, 2 приведено распределение электронной концентрации в ионосфере. Семейства обыкновенных и необыкновенных лучей образуют структуры, содержащие два каустических острия. Лучи с большими углами выхода просачиваются сквозь ионосферу, а с небольшими углами отражаются от слоев E и F и возвращаются на землю. Из-за влияния магнитного поля Земли лучи при распространении покидают начальную плоскость (x, z) (рис. 2, б), но, так как горизонтальные градиенты отсутствуют, $\varphi=90^\circ$ и магнитное поле постоянное, то, достигая земли, они возвращаются в плоскость (x, z) .

Верхнее каустическое острие определяется слоем F, образующим главный максимум, а нижнее каустическое острие (катастрофа A_3) вызвано слоем E. Лучевая структура для о-волны похожа на лучевую структуру х-волны, но первая каустика, пересекающая поверхность земли, в случае х-волны расположена ближе к источнику (642.5 км), а в случае о-волны дальше (699.5 км) [Kryukovskii et al., 2020; Kryukovsky et al., 2021].

При движении от источника вдоль поверхности, сначала возникает каустика х-волны, которая является границей «мертвой зоны», а затем каустика о-волны. Поле х-волны формируют два луча: луч, коснувшийся каустики х-волны и луч, не коснувшийся этой каустики. Каустическое поле о-волны взаимодействует с полем х-волны.

Рассмотрим структуру электромагнитного поля в окрестности первой каустики. Поле х-волны правее каустики х-волны определяется как сумма вкладов двух лучей ($\kappa=x$):

$$u_g^\kappa \cong b_1^\kappa \cdot \exp\left(i\left(\Phi_1^\kappa - \pi/2\right)\right) + b_2^\kappa \cdot \exp\left(i\Phi_2^\kappa\right). \quad (8)$$

Луч с индексом 1 уже коснулся каустики, а луч с индексом 2 — нет. Геометрооптическое (ГО) поле о-волны, формирующееся правее каустики о-волны, тоже двухлучевое (8) ($\kappa=o$). Амплитудные коэффициенты b_j в (10) имеют вид

$$b_j = E_0 \exp[-\psi_j] \sqrt{|J_0 J_j^{-1}|}. \quad (9)$$

В выражении (9) ψ_j — поглощение, определяемое частотой соударения электронов; J_j — якобиан расходимости, вычисленный на основе расширенной бихарактеристической системы Лукина (4), (5);

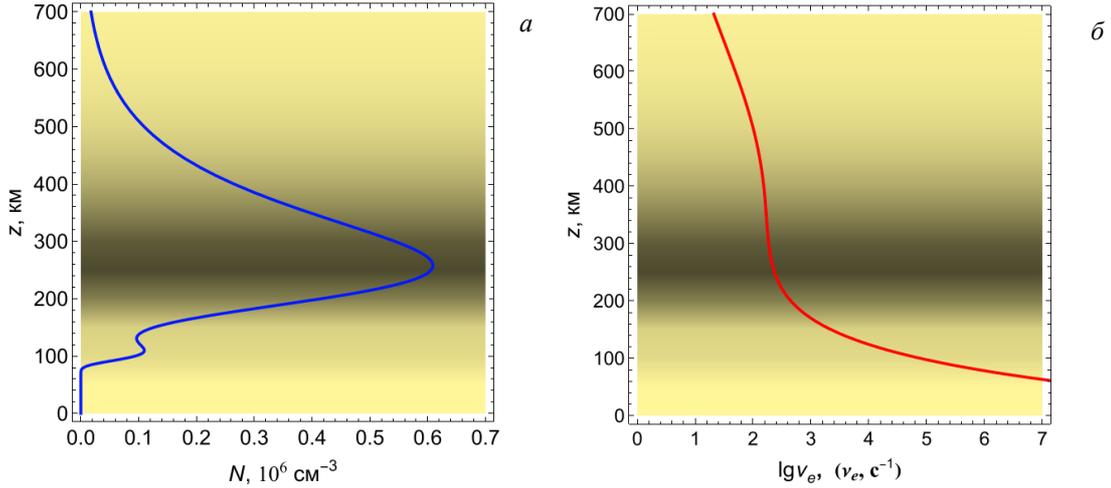


Рис. 1. Зависимость от высоты электронной концентрации N (а) и эффективной частоты соударений электронов v_e (б) [Bova et al., 2019; Kryukovskii et al., 2020]

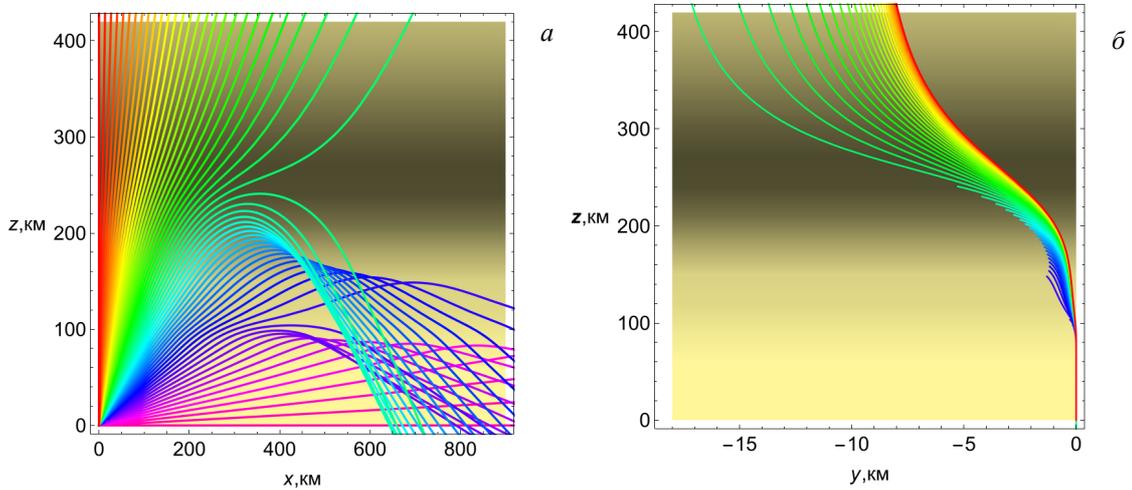


Рис. 2. Проекция лучей: а — на плоскость (x, z) , б — на плоскость (y, z)

J_0 — начальное значение якобиана; E_0 — начальное значение поля. Поглощение ψ_j , как и фаза Φ_j , вычисляются вдоль лучевой траектории [Kryukovskii et al., 2020]. Мощность изотропного источника излучения 1 кВт.

Поскольку на каустике якобиан J_j обращается в нуль, в окрестности каустики коэффициенты b_j , а вместе с ними и решения (8) стремятся к бесконечности, что неверно. Поле на каустике и в ее окрестности находится с помощью равномерной асимптотики, содержащей функцию Эйри и ее производную [Лукин, Палкин, 1982; Кравцов, 1964]:

$$u_c \cong \exp(i\theta) (l_1 \cdot Ai(\lambda) - i l_2 \cdot dAi(\lambda)/d\lambda), \quad (10)$$

В формуле (10) $Ai(\lambda)$

$$Ai(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i(\xi^3 + \lambda \xi)) d\xi \quad (11)$$

— функция Эйри [Airy, 1838], θ — фаза бегущей волны, λ — аргумент функции Эйри. При $\lambda < 0$, т. е. в области света, пересекаются два луча. Поэтому

$$\theta = 0.5(\Phi_1 + \Phi_2), \quad \lambda = -3 \cdot 2^{-4/3} |\Phi_1 - \Phi_2|^{2/3}. \quad (12)$$

Коэффициенты (10) l_1 и l_2 в первом приближении имеют вид:

$$l_1 \cong \frac{b_1 + b_2}{2\sqrt{\pi}} \sqrt[4]{-3\lambda}, \quad l_2 \cong \frac{3(b_1 - b_2)}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt[4]{-3\lambda}}. \quad (13)$$

Как видно из формул (10)–(13), коэффициенты асимптотического разложения, фаза бегущей волны и аргумент функции Эйри вычисляются через фазы и амплитуды двух лучей в фиксированной точке. Поэтому возникает проблема определения с высокой точностью в каждой точке амплитуд и фаз этих лучей, которые приходят по разным, но близким траекториям, т. е. необходимо решать задачу «пристрелки».

Вместо этого реализован другой алгоритм, аналогичный методу интерполяционной локальной асимптотики [Кагеров, Kryukovskii, 2001], который отличается от классического локального подхода [Kryukovskii, 1996]. Сначала находится положение каустики x_c на оси x и угол выхода луча ζ_c , касающегося каустики в этой точке. Если угол $\zeta < \zeta_c$, луч принадлежит подсемейству лучей, коснувшихся каус-

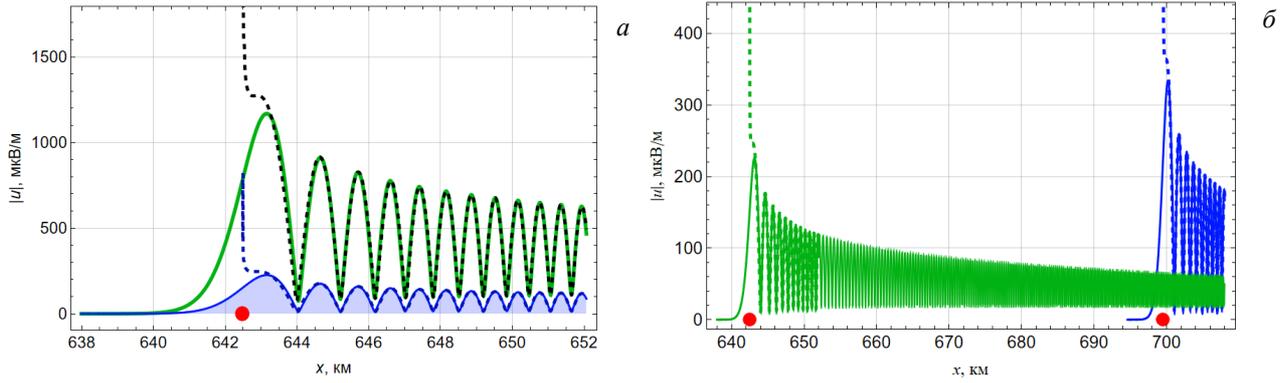


Рис. 3. Амплитуда волнового поля: в окрестности каустики x-волна с учетом и без учета поглощения (а); x- и o-волны с учетом поглощения (б)

тики. Если угол $\zeta > \zeta_c$, луч принадлежит подсемейству лучей, не коснувшихся каустики. Для каждого луча находится точка пересечения с поверхностью Земли и вычисляются связанные с ним характеристики (амплитуда, фаза, время прихода и др.). Далее методом наименьших квадратов для каждого подсемейства лучей находятся интерполяционные формулы для амплитудных коэффициентов и фаз. Зная интерполяционные формулы в каждой точке, вычисляются амплитуды и фазы уже двух пересекающихся лучей и находятся лучевые и каустические поля.

На рис. 3, а показана амплитуда поля x-волны в окрестности каустики [Kryukovsky et al., 2021]. Каустические решения, вычисленные по формуле (10), показаны сплошными линиями. Штриховой линией показаны ГО решения (8). Верхние кривые выполнены без учета поглощения, а нижнее расчеты — с учетом. Максимальное значение амплитуды смещено в область света относительно положения каустики. Каустика отмечена точкой.

Значения амплитуды поля на каустике соответствуют среднему значению амплитуды поля в области света вблизи каустики. При удалении от каустики уменьшаются амплитуды осцилляций и их период (~ 1 км). Каустическая асимптотика совпадает с ГО-приближением всюду в области света, кроме левой окрестности главного максимума амплитуды поля. Чтобы оценить максимальное значение амплитуды поля в окрестности каустики с помощью ГО-приближения, достаточно определить точку, где кривая образует перегиб, прежде чем уходит на бесконечность. Аналогичный результат получается и для o-волны.

На рис. 3, б сопоставлены амплитуда поля x-волны (зеленая линия) и o-волны (синяя линия), вычисленные в каустическом (10) (сплошная линия) и ГО-приближении (8) (штриховая линия) вдоль поверхности земли с учетом поглощения. Положения каустик x- и o-волны показаны красными точками.

Если не учитывать поглощение, амплитуды поля o- и x- волны в окрестности каустики отличаются незначительно. Однако при учете поглощения амплитуда поля в окрестности каустики значительно меньше для x-волны, чем для o-волны.

Амплитуды суммарного поля в ГО (штриховая линия) и в каустическом приближении (сплошная

линия) x- и o-волны в окрестности каустики o-волны показаны на рис. 4, а. Расчет выполнен с учетом ионосферного поглощения, но без учета поляризации и позволяет оценить влияние x-волны на поле o-волны в окрестности каустики o-волны при условии сохранения когерентности. Левее каустики (красная точка) прослеживаются регулярные осцилляции, которые создает двухлучевое поле x-волны.

При учете поглощения по первому минимуму ГО поля справа от каустики можно судить о максимальном значении амплитуды поля вблизи каустики, так как в этом случае классическая структура амплитуды поля в окрестности каустики сохраняется.

Амплитуда поля o- и x-волны с учетом поглощения (зеленая линия) и без учета поглощения (синяя линия) показаны на рис. 4, б. Абсолютные значения амплитуд отличаются более чем в три раза, хотя структуры амплитуд поля качественно совпадают. При отсутствии поглощения главный максимум сопоставим с соседними вершинами.

ОСНОВЫ ВОЛНОВОЙ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ

Помимо гладкой каустики, на рис. 2, а хорошо видны две точки возврата — два каустических острия. Это волновые катастрофы A_3 . В окрестности каустического острия волновое поле выражается через функцию Пирси и две ее первые производные [Budden, 1976]:

$$u_c \cong \exp(i\theta) \left(l_1 \cdot I^{A_3}(\lambda_1, \lambda_2) + l_2 \cdot \partial I^{A_3}(\lambda_1, \lambda_2) / \partial \lambda_1 + l_3 \cdot \partial I^{A_3}(\lambda_1, \lambda_2) / \partial \lambda_2 \right), \quad (14)$$

В формуле (14) $I^{A_3}(\lambda_1, \lambda_2)$

$$I^{A_3}(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i(\xi^4 + \lambda_2 \xi^2 + \lambda_1 \xi)) d\xi \quad (15)$$

— функция Пирси, θ — по-прежнему фаза бегущей волны; λ_1, λ_2 — аргументы функции Пирси [Pearcey, 1946], l_1, l_2, l_3 , — коэффициенты равномерного асимптотического разложения, которые выражаются, как в случае с функцией Эйри, через фазы и амплитуды уже трех лучей.

Однако в ионосфере встречаются и гораздо более сложные фокусировки. Это каспоидные особенности A_N («ласточкин хвост» — $N=4$, «бабочка» — $N=5$,

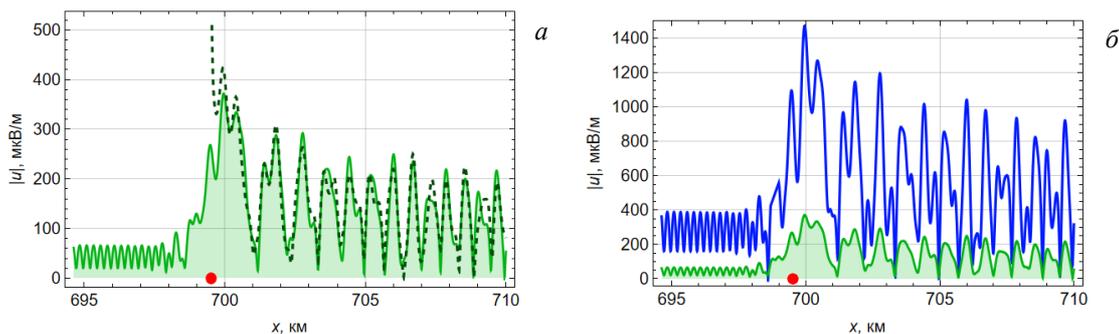


Рис. 4. Амплитуды поля х- и о-волны в окрестности х-каустики с учетом поглощения, ГО и равномерная асимптотика (а); с учетом поглощения и без учета поглощения (б)

«вигвам» — $N=6$) [Лукин, Палкин, 1982], а также омбилические особенности: простые D_4^\pm , D_5, \dots и модальные P_9 , X_9 , J_{10} [Крюковский и др., 2006]. Согласно ВТК, равномерная асимптотика в окрестности таких особенностей (катастроф) имеет вид [Крюковский, 2013]

$$u_c \cong \exp(i\theta) \times \left(l_1 \cdot I^\Sigma(\vec{\lambda}, \vec{a}) + \sum_{j=2}^{N_c+1} l_j \frac{\partial I^\Sigma}{\partial \lambda_{j-1}} + \sum_{j=N_c+2}^N l_j \frac{\partial I^\Sigma}{\partial a_{j-N_c-1}} \right), \quad (16)$$

где N_c — коразмерность особенности; $N = N_c + \dim \vec{a} + 1$ — кратность особенности,

$$I^\Sigma(\lambda_1, \dots, \lambda_{N_c}; \vec{a}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i F_\Sigma(\vec{\xi}, \vec{a}, \vec{\lambda})) d\xi_1 \dots d\xi_x \quad (17)$$

— СВК катастрофы типа Σ , $F_\Sigma(\vec{\xi}, \vec{a}, \vec{\lambda})$ — универсальная деформация, $\dim \vec{a}$ — модальность

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в лекции рассмотрено моделирование распространения радиоволн декаметрового диапазона в неоднородной ионосферной плазме методом бихарактеристик и методами волновой теории катастроф. Исследованы лучевая, каустическая и амплитудная структуры электромагнитных полей с учетом магнитного поля Земли. Представлены результаты моделирования амплитуды поля х- и о-волн в окрестности каустик, полученные на основе решения расширенной бихарактеристической системы Лукина. Сопоставлено равномерное (каустическое) приближение и неравномерное (лучевое, ГО) приближение. Выполнена оценка влияния х-волны на амплитуду поля о-волны в окрестности каустики. Рассмотрены равномерные асимптотики, описывающие амплитудно-фазовые структуры волновых полей в окрестности особых каустик.

Работа поддержана Российским научным фондом (грант № 20-12-00299).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. *Особенности дифференцируемых отображений*. Ч. I. М.: Наука,

1982. 304 с.; ч. II. М.: Наука, 1984. 335 с.

Гершман Б.Н., Ерухимов Л.М., Яшин Ю.Я. *Волновые явления в ионосферной и космической плазме*. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 392 с.

Гинзбург В.Л. *Распространение электромагнитных волн в плазме*. 2-е изд. М.: Наука, 1967. 684 с.

Дэвис К. *Радиоволны в ионосфере*. М.: Мир, 1973. 502 с.

Зернов Н.Н. Рассеяние волн КВ-диапазона при наклонном распространении в ионосфере. *Изв. вузов. Радиофизика*. 1980. Т. 23, № 2. С. 151–158.

Иванов Д.В. *Методы и математические модели исследования распространения в ионосфере сложных декаметровых сигналов и коррекции их дисперсионных искажений*. Монография. Йошкар-Ола: Марийский гос. технический ун-т, 2006. 266 с.

Иванов В.А., Иванов Д.В., Михеева Н.Н., Рябова М.И. *Дисперсионные искажения системных характеристик широкополосных ионосферных радиоканалов*. Йошкар-Ола: ПГТУ, 2015. 159 с.

Казанцев А.Н., Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Метод исследования распространения радиоволн в неоднородной магнитоактивной ионосфере. *Косм. иссл.* 1967. Т. 5. Вып. 4. С. 593–600.

Кравцов Ю.А. Об одной модификации метода геометрической оптики. *Изв. вузов. Радиофизика*. 1964. Т. 7, № 4. С. 664–673.

Краснушкин П.Е. *Метод нормальных волн в применении к проблеме дальних радиосвязей*. М.: МГУ, 1947. 52 с.

Крюковский А.С. *Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф*. Монография. М.: РосНОУ, 2013. 368 с.

Крюковский А.С., Лукин Д.С. Построение равномерной геометрической теории дифракции методами краевых и угловых катастроф. *Радиоэлектроника*. 1998. Т. 43, № 9. С. 1044–1060.

Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Волновые катастрофы — фокусировки в дифракции и распространении электромагнитных волн. *Радиоэлектроника*. 2006. Т. 51, № 10. С. 1155–1192.

Куницын В.Е., Терещенко Е.Д., Андреева Е.С. *Радиотомография ионосферы*. М.: Физматлит, 2007. 345 с.

Куркин В.И., Орлов И.И., Попов В.Н. *Метод нормальных волн в проблеме коротковолновой радиосвязи*. М.: Наука, 1981. 124 с.

Лукин Д.С., Палкин Е.А. *Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах*. М.: МФТИ, 1982. 159 с.

Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Применение метода характеристик для численного решения задач распространения радиоволн в неоднородной и нелинейной среде. *Радиоэлектроника*. 1969. Т. 14, № 9. С. 1673–1677.

Маслов В.П. *Теория возмущений и асимптотические методы*. М.: МГУ, 1965. 553 с.

Черкашин Ю.Н. Применение метода параболического уравнения для расчета волновых полей в неоднородных средах. *Радиотехника и электроника*. 1971. Т. 16, № 1. С. 173–174.

Airy G.B. On the intensity of light in the neighborhood of a caustic. *Trans. Camb. Phil. Soc.* 1838. Vol. 6. P. 379–402.

Bova Yu.I., Kryukovsky A.S., Lukin D.S. Propagation of frequency-modulated electromagnetic radiation in the Earth's ionosphere with allowance for absorption and the external magnetic field. *J. Communications Technology and Electronics*. 2019. Vol. 64, no. 1. P. 1–12.

Budden K.G. Radio caustics and cusps in the ionosphere. *Proc. Roy. Soc. London*. 1976. Vol. A350, no. 1661. P. 143–164.

Karepov S.L., Kryukovskii A.S. Calculation of a wave field using the method of local interpolating asymptotics. *J. Communications Technology and Electronics*. 2001. Vol. 46, no. 1. P. 34–40.

Kryukovskii A.S. Local uniform asymptotics of wave fields in the vicinity of basic and boundary cuspidal caustics. *J. Communications Technology and Electronics*. 1996. Vol. 41, no. 1. P. 51–57.

Kryukovskii A.S., Lukin D.S., Bova Yu.I. Simulation of the field in the vicinity of caustics of ordinary and extraordinary waves during ionospheric propagation. *J. Communications Technology and Electronics*. 2020. Vol. 65, no. 12. P. 1364–1373.

Kryukovskii A.S., Lukin D.S., Kir'yanova K.S. Method of extended bicharacteristic system in simulating wave propagation in ionospheric plasma. *J. Communications Technology and Electronics*. 2012. Vol. 57, no. 9. P. 1039–1045.

Kryukovsky A.S., Lukin D.S., Rastyagaev D.V., Bova Y.I. The method of mathematical modeling of wave fields and caustic structures in the process of propagation of electromagnetic radiation in the ionospheric plasma. *Proc. XXXIVth General Assembly and Scientific Symposium of the International Union of Radio Science (URSI GASS)*. 2021. Rome, 28 August – 4 September Publisher: IEEE, P. 1–4.

Pearcey T. The structure of an electromagnetic field in the neighborhood of a cusp of a caustic. *Philos. Mag.* 1946. Vol. 37. P. 311–317.