Секция А. Астрофизика и физика Солнца. БШФФ-2022. С. 27–29.

УДК 537.84

РОЛЬ ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА В ВЫВОДЕ ОСНОВНЫХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМО-ТЕОРИИ

[1]Р.Р. Аллахвердиев, [2]Е.В. Юшков, [2]Д.Д. Соколов

[1]Филиал Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Баку, Азербайджан
ramin.a.verdi@gmail.com
[2]Московский государственный университете им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

ROLE OF VECTOR POTENTIAL IN THE DERIVATION OF DYNAMO THEORY BASIC MODELS

[1]R.R. Allakhverdiev, [2]E.V. Yushkov, [2]D.D. Sokolov

[1]Baku Branch of Lomonosov Moscow State University, Azerbaijan
ramin.a.verdi@gmail.com
[2]Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Аннотация. Вмороженность магнитного поля в турбулентный поток проводящей жидкости или плазмы при больших магнитных числах Рейнольдса может приводить к экспоненциальному росту магнитной энергии за счет накопленной гидродинамической энергии движения среды. Этот процесс описывается теорией магнитогидродинамического динамо и может быть условно разделен на два режима: в первом вместе с энергией растет среднее магнитное поле; во втором растет только энергия, среднее же магнитное поле остается равным нулю. Эти два режима носят названия «динамо среднего поля» и «турбулентное динамо» и описываются соответственно уравнениями Штеенбека—Краузе—Рэдлера и Казанцева. Эти уравнения являются прямым следствием усреднения уравнения магнитной индукции по случайному полю скорости, где в первом случае ищется первый момент магнитного поля, во втором — второй. С помощью метода мультипликативных интегралов мы выводим обе динамо-модели, демонстрируя удобство усреднения векторного потенциала магнитного поля, а не самого поля. Использование векторного потенциала существенно упрощает математический аппарат вывода и, как следствие, выглядит весьма многообещающим для обобщения стандартных моделей на случай неоднородной и анизотропной турбулентности.

Ключевые слова: магнитогидродинамика, конвективная турбулентность, динамо среднего поля, турбулентное динамо, метод мультипликативных интегралов.

Abstract. Magnetic field freezing into turbulent flow of conducting liquid or plasma at high magnetic Reynolds numbers can lead to exponential increase in magnetic energy due to accumulated hydrodynamic energy of medium motion. This process is described by the theory of magneto-hydrodynamic dynamo and can be conditionally classified as two modes: in the first one the average magnetic field increases with the energy, and in the second one only the energy increases while the average magnetic field remains equal to zero. These two regimes are «mean-field dynamo» and «turbulent dynamo», and they are described by the Steenbeck—Krause—Radler and Kazantsev equations, respectively. These equations present a direct consequence of averaging the magnetic induction equation over a random velocity field. In the first case, the first moment is obtained, and in the second — the second moment of the magnetic field. Using the method of multiplicative integrals we derive both dynamo models, demonstrating the convenience of averaging the vector potential of the magnetic field but not the field itself. The use of the vector potential greatly simplifies the mathematical apparatus of the derivation and looks very promising for generalizing standard models to the case of inhomogeneous and anisotropic turbulence.

Keywords: magnetohydrodynamics, convective turbulence, mean-field model, turbulent dynamo, method of functional integrals.

ВВЕДЕНИЕ

Природа формирования устойчивых магнитных оболочек астрофизических тел еще в первой половине прошлого столетия привлекла особое внимание астрофизиков и специалистов теории плазмы [Larmor, 1919]. На первый взгляд казалось, что магнитные поля и магнитная энергия должны были бы диссипировать со временем в любой среде ввиду наличия диффузии, в то время как наблюдения показывали, что у ряда планет, звезд и галактик они не только не затухают, но даже осциллируют или растут со временем [Piddintgton, 1983]. На протяжении долгого времени было непонятно, какие именно условия делают возможным рост среднего магнитного поля и какой механизм его поддерживает. В настоящее время ответ более-менее ясен: считается, что к этому приводит классический эффект магнитной индукции. Другими словами, за счет вмороженности магнитного поля в проводящую среду, гидродинамическая энергия хаотического движения плазмы эффективно трансформируется в энергию магнитного поля. Раздел физики, изучающий условия такой трансформации энергий друг в друга, принято называть магнитным динамо (более подробно о теории динамо см., например, [Zeldovich, 1983]).

МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ РЕШЕНИЕ

В средах с бесконечной проводимостью магнитный поток через замкнутый проводящий контур сохраняется, т. е. магнитные силовые линии оказываются вмороженными в вещество и перемещаются вместе со средой [Alfven, 1942]. Таким образом, поле скорости жидких частиц однозначным образом определяет эволюцию магнитного поля в них. Рассмотрим жидкую частицу, переместившуюся в течение интервала времени (s, $s+ds$) из точки x_1 в точку x_2. Векторный потенциал при таком перемещении изменяется как

$$A_i\left(x_2, s+ds\right) = A_i\left(x_1, s\right) + d_t A_i\left(x_1, s\right) ds,$$

при этом производная векторного потенциала определяется идеальным уравнением магнитной индукции $A_t=[\mathbf{v}, \mathrm{rot}\mathbf{A}]$.

Эволюцию векторного потенциала при перемещении из точки ξ в точку x на интервале времени (t,

$t+\Delta t$) через так называемый мультипликативный интеграл [Davis, 1970]

$$A_i\left(x, t+\Delta t\right) = \prod_t^{t+\Delta t}(\delta_{ij} - \nabla_i v_j(x,s)ds)A_j(\xi, t).$$

Учет магнитной диффузии в решении может быть реализован через замену детерминированной траектории частицы на пучок винеровских траекторий вида

$$\xi_k = x_k - \int_t^{t+\Delta t} v_k\left(x, s\right)ds + \sqrt{2\eta}\omega_k$$

с последующим усреднением. Здесь ω_k — случайный винеровский шум с нулевым первым моментом $<\omega_k>0$ и ненулевым вторым $<\omega_i\omega_k>=\delta_{ik}\Delta t$ [Simon, 1979].

После асимптотического разложения мультипликативного интеграла, тейлоровского разложения векторного потенциала и усреднения по винеровскому шуму выражение для векторного потенциала принимает вид

$$\begin{aligned} &A_i\left(x, t+\Delta t\right) = A_i\left(x, t\right) + \\ &+\varepsilon_{ijk}\left(v_j\Delta t - v_l\nabla_l v_j\frac{\Delta t^2}{4}\right)B_k - \\ &-\left(\varepsilon_{ijk}v_j\nabla_i v_l\frac{\Delta t^2}{4} + \varepsilon_{ijk}v_j\nabla_k v_l\frac{\Delta t^2}{4} + \right)B_k - \\ &-\varepsilon_{ijk}\left(\eta\delta_{lj}\Delta t + v_l v_j\frac{\Delta t^2}{2}\right)\nabla_l B_k. \end{aligned}$$

ДИНАМО СРЕДНЕГО ПОЛЯ

Рассмотрим коротко-коррелированное течение с корреляционным временем τ. Коротко-коррелированость понимается в том смысле, что вне интервала $\Delta t=2\tau$ поле скорости не коррелирует с магнитным потенциалом, но при этом время τ настолько мало, что сам потенциал не успевает измениться на этом промежутке. Это позволяет развязать усреднение магнитного поля и скорости. Тогда, вводя обозначения для средних характеристик

$$V_i = < v_i >, W_i = \frac{\tau}{2} < v_l\nabla_l v_i >,$$

$$\alpha_{ik} = -\frac{\tau}{2}(\varepsilon_{ijk} < v_j\nabla_i v_l > + \varepsilon_{lji} < v_j\nabla_k v_l >),$$

$$\beta_{ik} = \eta\delta_{ik} + \tau < v_i v_k >$$

и оставляя обозначение для усредненного потенциала, перепишем решение в виде

$$\begin{aligned} &A_i\left(x, t+\Delta t\right) = A_i\left(x, t\right) + \varepsilon_{ijk}\left(V_j - W_j\right)B_k\Delta t + \\ &+\alpha_{ik}B_k\Delta t - \varepsilon_{ijk}\ \beta_{lj}\nabla_l B_k\Delta t. \end{aligned}$$

Введенные обозначения W_i, α_{ik}, β_{ik} мы будем называть скоростью турбулентного дрейфа, тензором гидродинамической спиральности и тензором турбулентной диффузии соответственно. Деля теперь все уравнение на Δt и формируя в левой части производную по времени с помощью формулы конечных приращений, получим уравнение для среднего векторного потенциала в коротко-коррелированном потоке

$$\dot{A}_i = \varepsilon_{ijk}\left(V_j - W_j\right)B_k + \alpha_{ik}B_k - \varepsilon_{ijk}\ \beta_{lj}\nabla_l B_k.$$

Взяв ротор от левой и правой части уравнения, несложно прийти к уравнению для среднего магнитного поля, которое традиционно мы называем обобщенным уравнением Штеенбека—Краузе—Рэдлера:

$$\begin{aligned} &\dot{B}_i = \varepsilon_{inm}\nabla_n \times \\ &\times\left(\varepsilon_{mjk}\left(V_j - W_j\right)B_k + \alpha_{mk}B_k - \varepsilon_{mjk}\beta_{lj}\nabla_l B_k\right). \end{aligned}$$

Отличие от классического уравнения Штеенбека—Краузе—Рэдлера связано с рассмотрением локально анизотропной и неоднородной структуры турбулентности, по которой проводится усреднение. Если же мы предположим изотропность и однородность, то скорость турбулентного дрейфа можно занулить, а симметричные тензора спиральности α_{ik} и турбулентной диффузии β_{ik} записать через символ Кронекера:

$$\alpha_{ik} = \alpha\delta_{ik}, \beta_{ik} = \beta\delta_{ik},$$

где $\alpha = -\frac{\tau}{3} < (\mathbf{v}, \mathrm{rot}\ \mathbf{v}) >$, $\beta = \eta + \frac{\tau}{3} < (\mathbf{v}, \mathbf{v}) >$.

Таким образом, уравнение среднего поля примет классический вид:

$$\dot{\mathbf{B}} = \mathrm{rot}\left(\left[\mathbf{V}, \mathbf{B}\right] + \alpha\mathbf{B} - \beta\mathrm{rot}\mathbf{B}\right).$$

МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОГО ДИНАМО

Турбулентное или мелкомасштабное динамо в случайном потоке описывает генерацию магнитной энергии, при этом среднее (крупномасштабное) магнитное поле может расти, а может и не меняться, а это значит, что модель турбулентного динамо должна описывать эволюцию второго момента магнитного поля или корреляционной функции. Общий вид тензора второго ранга можно записать в разных формах (см., например, [Batchelor, 1953; Monin, 2007]) и др., но традиционная форма записи для изотропного соленоидального однородного случайного магнитного поля описывается двумя функциями, $M(r, t)$ и $K(r, t)$, первая из которых отвечает за зеркально-симметричную часть тензора, а вторая — за зеркально-антисимметричную:

$$\begin{aligned} &\left\langle B_i\left(r_1, t_1\right)B_j\left(r_2, t_2\right)\right\rangle = \left\langle B_i B_j\right\rangle\left(r, t\right) = \\ &= \left(M + \frac{r}{2}M'\right)\delta^{ij} - \frac{M'}{2r}r^i r^j + \\ &+K\varepsilon^{ijk}r^k. \end{aligned}$$

здесь $r = r_1 - r_2, t = t_1 - t_2$, а производная по r обозначается штрихом. Аналогично выглядит и тензор поля скорости, который также описывается зеркально-симметричной функцией $F(r)$ и антисимметричной $G(r)$.

Воспользуемся тем, что ранее мы получили выражение для векторного потенциала и перепишем корреляционный тензор магнитного поля через ротор

$$B_i B_j = \varepsilon^{jlm}\nabla_l(A_m B_i).$$

Предположим, что произведение векторного потенциала в одной точке на произведение магнитного поля в другой точке определяется следующим выражением:

$$A_i B_j = \left(L + \frac{r}{2} L_r\right)\delta^{ij} - \frac{L_r}{2r} r^i r^j + \frac{1}{2} r^t \varepsilon^{ijt} M,$$

где L — это некоторая функция, которую можно связать с функцией K как

$$K = -\frac{rL_{rr} + 4L_r}{2r}.$$

Используя метод мультипликативных интегралов, записываем выражение для векторного потенциала и индукции магнитного поля в следующий момент времени в точке x и y. Перемножив эти уравнения, и воспользовавшись формулой конечных приращений Лагранжа, записываем производную от произведения векторного потенциала и индукции магнитного поля по времени:

$$\left(A_l B_j\right) = 2\left(\eta + \frac{F_0 \Delta t}{2}\right)\delta^{mk}\nabla_m \nabla_k A_i B_j -$$

$$-2G_0 B_i B_j + \Delta t \nabla\left(\varepsilon^{\mathrm{mik}} v_m v_j\right) B_c B_k +$$

$$+\Delta t \nabla_k \left(\varepsilon^{mic} B_m B_j\right) v_c v_k.$$

Чтобы получить уравнение для $\dot{M}$ умножаем левую и правую часть уравнения на $r^s \varepsilon^{ijs}$ и после ряда арифметических преобразований получаем:

$$\dot{M} = 2r^{-4}\left(r^4 \tilde{\eta} M'\right)' + 2M r^{-4}\left(r^4 \tilde{\eta}'\right)' - 4\alpha K,$$

где $\tilde{\eta} = \eta + \frac{\Delta t}{2}\left(F(0) - F\right)$.

Чтобы получить уравнение для $\dot{K}$ мы должны свернуть уравнение по индексам i и j, взять производную по r от левой и правой части и поделить на $-2r$:

$$\dot{K} = -\frac{\left(\dot{A}_i B_i\right)}{2r} = -\frac{1}{2r}\frac{d}{dr}\left(2\left(\eta + \frac{F_0 \Delta t}{2}\right)\right.$$

$$\delta^{mk}\nabla_m \nabla_k A_i B_i - 2G_0 B_i B_j + \Delta t \nabla_k \left(\varepsilon^{mic} \nu_m \nu_i\right) B_c B_k +$$

$$\left.+\Delta t \nabla_k \left(\varepsilon^{mic} B_m B_i\right) \nu_c \nu_k\right).$$

Подставив свертки тензоров, взяв производные и сделав ряд арифметических преобразований, мы можем записать уравнение для $\dot{K}$:

$$\dot{K} = r^{-4}(r^4(\alpha M + 2\tilde{\eta} K)')'.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Модель среднего поля и модель Казанцева являются одними из основных в теории МГД-динамо. Первая модель описывает генерацию крупномасштабных магнитных полей, и несмотря на то, что требует специфических условий генерации, используется как основная для описания формирования магнитных полей планет, звезд и галактик. Вторая модель для генерации не требует, например, зеркальной асимметрии или дифференциального вращения, но и не генерирует среднее поле, а осуществляет лишь перекачку энергий на малых масштабах. Однако и первая, и вторая модель, для изучения баланса энергии и спиральности в турбулентном потоке играют в теории динамо принципиальную роль.

Используемый нами метод мультипликативных интегралов позволяет получить уравнение как для среднего поля, так и для энергии. При этом мы показали, что если при выводе пользоваться выражением для векторного потенциала вместо магнитного поля, как это делается в классическом подходе, то существенно уменьшается количество выкладок, и более того, проявляются и дополнительные преимущества. Так при использовании выражения для векторного потенциала при выводе уравнения для модели среднего поля мы получаем сначала уравнение для эволюции векторного потенциала, а взяв от него ротор получаем само уравнение среднего поля. Таким образом, та величина, которая стоит под ротором является так называемой турбулентной электродвижущей силой в явном виде, более того наличие ротора в правой части обеспечивает бездивергентность среднего поля. Кроме того, уравнения полученные для векторного потенциала естественным образом обобщаются на локально неизотропную и неоднородную турбулентность, эффекты которой еще предстоит изучить в будущем. Наконец, применение данного подхода к выводу модели Казанцева позволяет сразу напрямую получить выражения для $\dot{M}$ и $\dot{K}$ не проводя каких-то дополнительных преобразований, например, вынесение производной, что приходилось делать в классическом подходе. Работа проводилась при поддержке гранта фонда БАЗИС № 21-1-3-63-1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Alfven H. *Nature*. 1942. Vol. 150 (3805). P. 405.

Batchelor G.K. *The Theory of Homogeneous Turbulence*. Cambridge University Press, 1953.

Davis W.P., Chatfield J.A. Concerning product integrals and exponentials. *Proc. Am. Math. Soc.* 1970.

Larmor J. *Rept. Brit. Assoc. Sci*, 1919. P. 159.

Monin A.S., Yaglom A.M. *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence*. Mineola: Dover, 2007.

Piddington J. *Astrophys. Space Sci. J.* 1983. Vol. 90, iss. 1. P. 217–230.

Simon B. *Functional Integration and Quantum Physics*. Academic Press, 1979.

Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D. *Magnetic Fields in Astrophysics*. New York, 1983.