

## СРАВНЕНИЕ ГЕНЕРАЦИИ МЕЛКОМАСШТАБНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ В РАМКАХ ДВУХ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

<sup>1</sup>И.З. Абушзаде, <sup>2</sup>Е.В. Юшков, <sup>2</sup>Д.Д. Соколов

<sup>1</sup>Филиал Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Баку, Азербайджан  
ilyasabushzade@gmail.com

<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

## COMPARISON OF SMALL-SCALE MAGNETIC FIELD GENERATION WITHIN TWO TURBULENCE MODELS

<sup>1</sup>I.Z. Abushzada, <sup>2</sup>E.V. Yushkov, <sup>2</sup>D.D. Sokoloff

<sup>1</sup>Baku Branch of Lomonosov Moscow State University, Baku, Azerbaijan  
ilyasabushzade@gmail.com

<sup>2</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

**Аннотация.** Исследуется мелкомасштабная генерация магнитной энергии в турбулентном потоке на основании сравнения двух подходов. В первом используется модель Казанцева с короткими временными корреляциями случайного поля скорости, во втором — магнитогиродинамическая оболочечная (каскадная) модель, описывающая спектральный транспорт гидродинамической и магнитной энергии. Вводя слабое магнитное поле в начальный момент в обеих моделях, при достаточно больших магнитных числах Рейнольдса мы наблюдаем экспоненциальный рост магнитной энергии и пытаемся ответить на вопрос, имеет ли этот эффект одинаковую природу в обеих моделях. Показано, что в общем случае скорости роста и масштабы локализации магнитной энергии могут сильно различаться в двух подходах, но, несмотря на это, мы предлагаем способ выбора корреляционного времени случайного поля и спектрального энергетического диапазона, при котором оба подхода демонстрируют совпадающие результаты.

**Ключевые слова:** МГД-динамо, колмогоровский спектр, турбулентный каскад энергии, коротко-коррелированное во времени случайное поле скорости.

**Abstract.** Small-scale generation of magnetic energy in a turbulent flow is studied based on a comparison of two approaches. The first one uses the Kazantsev model with short time correlations of a random velocity field, and the second one uses the magnetohydrodynamic shell model, which describes the spectral transport of hydrodynamic and magnetic energy. By introducing a weak magnetic field at the initial moment in both models, at sufficiently large magnetic Reynolds numbers, we observe an exponential growth of magnetic energy and try to answer the question whether this effect has the same nature in both models. We show that, in general case, the growth rates and scales of magnetic energy localization can differ greatly in the two approaches but despite this we propose a method for choosing the correlation time of a random field and spectral energy range, in which both approaches demonstrate coinciding results.

**Keywords:** MHD dynamo, Kolmogorov spectrum, turbulent energy cascade, short-time-correlated random velocity field.

### ВВЕДЕНИЕ

Крупномасштабные магнитные поля звезд и галактик формируются в процессе работы механизма МГД-динамо, преобразующего кинетическую энергию конвективного движения плазмы в энергию генерируемого магнитного поля. Исторически выделяют два типа работы динамо: крупномасштабное, или динамо среднего поля, работающее на пространственных масштабах, сопоставимых с размерами астрофизических объектов, и мелкомасштабное, или турбулентное динамо, в котором магнитное поле генерируется на масштабах, сравнимых с корреляционной длиной поля скорости или меньших ее.

Мелкомасштабное магнитное динамо представляет собой необычное явление, в котором переход энергии гидродинамической турбулентности в энергию магнитного поля может происходить при нулевом среднем поле. Другой особенностью является то, что мелкомасштабное динамо не требует никаких специфических условий, таких как, например, зеркальная асимметричность потока или наличие дифференциального вращения. Другими словами, этот тип динамо существенно отличается от более привычного для астрофизиков крупномасштабного динамо, поэтому изучен он гораздо хуже. Тем не менее, во многих физических системах при доста-

точно больших значениях магнитного числа Рейнольдса на начальных временах мелкомасштабное динамо может быть даже более важным, чем крупномасштабное динамо, из-за существенно больших скоростей роста и возможности работы в большем диапазоне масштабов.

Стандартным подходом при исследовании мелкомасштабной генерации является модель коротко-коррелированной турбулентности, предложенная А.П. Казанцевым, в рамках которой им было выведено эволюционное уравнение для корреляционной функции магнитного поля (позже данная модель была развита в работах Вайнштейна и Кичатинова (см., например, [Вайнштейн, 1986])). Самым слабым местом этой модели является не столько предположение о временах корреляции поля скорости, много меньших характерного корреляционного времени магнитного поля, сколько заведомо ложная гипотеза о равенстве корреляционных времен на разных масштабах. Окончательная проверка противоречий, вносимых этой гипотезой, остается за экспериментом (см., например, [Tzeferacos, 2018])). В настоящей же работе мы делаем попытку проверить эту гипотезу, сравнивая мелкомасштабную генерацию в модели Казанцева с генерацией магнитной энергии в оболочечной комплекснозначной модели. Заметим, что

множество таких моделей было разработано во второй половине прошлого века для систем гидродинамического типа (см., например, работу [Гледзер, 1981] и библиографию в ней). Эти модели описывают спектральный транспорт магнитной энергии в реалистичной колмогоровской турбулентности, что помогает избежать предположения о коротко коррелированности и проверить корректность стандартного подхода.

### МОДЕЛЬ КАЗАНЦЕВА

Модель Казанцева — стандартная модель для изучения мелкомасштабной генерации, которая описывает поведение корреляционного тензора магнитного поля в коротко-коррелированной турбулентности, где время корреляции поля скорости много меньше корреляционного времени магнитного поля (детали см. например [Казанцев, 1967]). В зеркально-асимметричном изотропном случае корреляционный тензор магнитного поля определяется следующим образом:

$$B_i(x_1, t_1)B_j(x_2, t_2) = \left( M + \frac{r}{2} \frac{\partial M}{\partial r} \right) \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{2r} \frac{\partial M}{\partial r}.$$

При этом единственным исходным уравнением является уравнение магнитной индукции, которое усредняется по случайному полю скорости с короткими временными корреляциями

$$\partial_t \mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B}.$$

Для корреляционного тензора, определенного через функцию  $M$ , зеркально симметричное уравнение Казанцева выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{2}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^4 \eta \frac{\partial M}{\partial r} \right) + \frac{2M}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^4 \frac{\partial \eta}{\partial r} \right),$$

где  $\eta$  — турбулентная диффузия, зависящая от корреляционной функции поля скорости  $F$  как

$$\eta(r) = \frac{1}{R_m} + \tau \frac{F(0) - F(r)}{3}.$$

Здесь  $R_m$  — магнитное число Рейнольдса;  $\tau$  — корреляционное время поля скорости, одинаковое на всех масштабах, что, как было сказано выше, является основным тонким местом подхода.

### КАСКАДНАЯ МОДЕЛЬ

Чтобы проверить справедливость предположения о коротко-коррелированности, воспользуемся каскадным подходом, описывающим каскадные процессы переноса энергии по спектру от интегрального масштаба до диссипативного, идея которого состоит в рассмотрении цепочки переменных, каждая из которых описывает пульсации поля скорости  $U_n$  и магнитного поля  $B_n$  в интервале волновых чисел  $k_n < |\mathbf{k}| < k_{n+1}$ , где  $k_n = 1/\lambda^n$  (см., например, [Фрик, 2010]). Используемая нами модель определяется системой уравнений

$$d_t U_n = ik_n (\Lambda_n(U, U) - \Lambda_n(B, B)) - \frac{k_n^2 U_n}{R_\epsilon},$$

$$d_t B_n = ik_n (\Lambda_n(U, B) - \Lambda_n(B, U)) - \frac{k_n^2 B_n}{R_m},$$

в которой нелинейное слагаемое имеет вид

$$\begin{aligned} \Lambda_n(X, Y) = & q^2 (X_{n+1} Y_{n+1} + X_{n+1}^* Y_{n+1}^*) - \\ & - X_{n-1}^r Y_n - X_n Y_{n-1}^r + \\ & + iq (2X_n^* Y_{n-1}^i + X_{n+1}^r Y_{n+1}^i - X_{n+1}^i Y_{n+1}^r) + \\ & + X_{n-1} Y_{n-1} + X_{n-1}^* Y_{n-1}^* - q^2 (X_{n+1}^r Y_n + X_n Y_{n+1}^r) + \\ & + iq (2X_n^* Y_{n+1}^i + X_{n-1}^r Y_{n-1}^i - X_{n-1}^i Y_{n-1}^r). \end{aligned}$$

При выполнении законов сохранения полной энергии, магнитной и перекрестной спиральностей, решая систему дифференциальных уравнений, можно получить эволюцию магнитного и гидродинамического спектра в виде весьма реалистичной картины. Важно отсутствие утверждения, что используемая каскадная модель точная или единственно возможная, но при этом она физически осмысленна и лишена основных недостатков подхода Казанцева, в частности, не имеет ограничений на времена корреляций и неизменность поля скорости.

### СРАВНЕНИЕ ДВУХ МОДЕЛЕЙ

Зная спектр энергии гидродинамического поля, из каскадной модели можно восстановить спектр энергии магнитного поля. Обычно в модели Казанцева применяют гауссов спектр для описания гидродинамической энергии, но мы пользуемся гидродинамической энергией из каскадной модели, по спектру которой считаем корреляционную функцию, отвечающую за поле скорости:

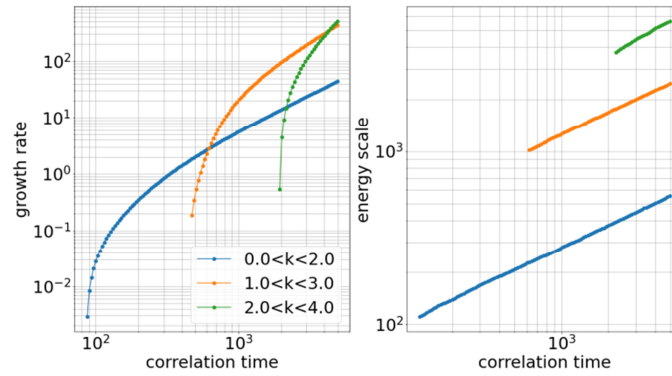
$$F(r) = \frac{1}{4\pi^3} \int_0^\infty E_v(k) \frac{\sin(kr) - kr \cos(kr)}{(kr)^3} dk.$$

По данной корреляционной функции считаем турбулентную диффузию  $\eta$ , после чего вводим ее в уравнение Казанцева и смотрим, как меняется корреляционная функция магнитного поля  $M$ . Наконец, по функции  $M$  восстанавливаем спектр энергии магнитного поля

$$E_B(k) = 4\pi \int_0^\infty M(r) (\sin(kr) - kr \cos(kr)) dr.$$

При сопоставлении результатов двух моделей было показано, что масштаб и скорость генерации в модели Казанцева гораздо больше, чем в каскадной. Но это происходило при пересчете всего гидродинамического спектра, что как раз не стыкуется с предположением о равенстве корреляционных времен на всех масштабах. Чтобы это проверить, мы брали спектр гидродинамической энергии, делили его на промежутки, для каждого из которых считали скорость генерации и масштабы генерации (волновое число, соответствующее максимуму плотности энергии).

Было показано, что генерация сильно зависит от корреляционного времени, носит пороговый характер и останавливается при достаточно малых корреляционных временах. Для разных масштабов такой



Зависимости скорости генерации (слева) и масштаба генерации (справа) от корреляционного времени. Разные цвета соответствуют трем спектральным интервалам, выбираемым из спектра гидродинамической энергии: синий — интервал волновых чисел 0–2; оранжевый — 1–3; зеленый — 2–4.

порог начала генерации оказывался разным, но все равно при достаточно больших временах скорость генерации оказывалась тем больше, чем меньший масштаб выбирается из гидродинамического спектра. Так, для мелкомасштабной части гидродинамического спектра при любых корреляционных временах, при которых наблюдается генерация, не удастся сделать масштаб генерации таким же малым, как для каскадной генерации. Другими словами, для мелкомасштабной части гидродинамического спектра не удастся добиться совпадения масштабов и скоростей генерации в обеих моделях. Если же брать крупномасштабную часть гидродинамического спектра, можно подобрать корреляционное время, так что скорость генерации получается порядка 1 и масштабы лежат в диапазоне  $10^2 < k < 10^3$ , что отлично совпадает с каскадной моделью (см. рисунок).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено численное сравнение двух подходов к анализу МГД-генерации магнитного поля в случайных плазменных средах: модели Казанцева и оболочечной (каскадной) модели. При сравнении энергетический колмогоровский спектр оболочечной модели, преобразовывался в корреляционную функцию поля скорости и вкладывался в модель Казанцева. В модели Казанцева определялось корреляционное время поля скорости, для которого масштабы и скорости генерации магнитного поля совпадали бы в обеих моделях. Сравнение моделей показало, что только для крупномасштабной части гидродинамического спектра можно подобрать такое время корреляции, что масштабы генерации и скорости

генерации в двух моделях будут совпадать. Напротив, если брать развитый гидродинамический спектр вплоть до диссипативного масштаба, в модели Казанцева скорости генерации оказываются гораздо больше, масштабы генерации — много меньше, чем в каскадной, а порог генерации при этом чрезвычайно высок. Таким образом, если предполагать, что обе модели описывают один и тот же эффект мелкомасштабной генерации, рецепт их применимости заключается в том, что за работу мелкомасштабной генерации ответственна крупномасштабная часть гидродинамического спектра. Работа выполнена при поддержке гранта фонда БАЗИС № 21-1-3-63-1.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. *Системы гидродинамического типа и их применение*. М.: Наука, 1981. 368 с.
- Казанцев А.П. *ЖЭТФ*. 1967. Т. 53, № 5. С. 1806–1813.
- Фрик П.Г. *Турбулентность: подходы и модели*. Изд. 2-е, испр. и доп. М.—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 332 с.
- Vainshtein S., Kichatinov L. The dynamics of magnetic fields in a highly conducting turbulent medium and the generalized Kolmogorov—Fokker—Planck equations. *J. Fluid Mech.* 1986. Vol. 168. P. 73–87.