

ЛУЧЕВЫЕ МЕТОДЫ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ВОЛНОВЫХ КАТАСТРОФ

А.С. Крюковский

**АНО ВО «Российский Новый Университет»,
Москва, ул. Радио, д.22.**

Рассмотрены асимптотические методы решения задач дифракции, фокусировки и распространения электромагнитных волн в неоднородных анизотропных средах: метод бихарактеристик и волновая теория катастроф. Методом бихарактеристик Гамильтона-Лукина выполнено математическое моделирование лучевых и каустических структур, возникающих при распространении радиоволн в ионосфере Земли. Приведены результаты математического моделирования каустических сечений основных, краевых и угловых волновых катастроф. Рассмотрены равномерные асимптотические решения волновых задач, приводящих к специальным функциям волновых катастроф, и представлены амплитудно-фазовые структуры специальных функций волновых катастроф.

Введение

- При решении задач радионавигации, радиолокации, загоризонтного радиозондирования, обеспечения дальней коротковолновой радиосвязи, при изучении структуры ионосферы Земли методами дистанционного зондирования и радиотомографии активно используются асимптотические методы. Лучевой подход является традиционным инструментом изучения распространения коротких волн в различных средах [Казанцев и др., 1967; Лукин, Спиридонов, 1969; Лукин, Палкин, 1982; Kryukovskii et al., 2012]. В теории дифракции и антенной технике таким лучевым подходом является геометрическая теория дифракции. При решении задач лучевыми методами возникают особенности решения: каустики и их сингулярности. Применение теории волновых катастроф позволяет перейти к корректному описанию полей в окрестности каустик и их особенностей, известных как волновые катастрофы [Kryukovskii et al., 2006; Крюковский и др., 2009]. Они возникают и играют важную роль при решении различных физических задачах в радиофизике, акустике, оптике, квантовой механике и др. [Лукин, Палкин, 1982; Дорохина, 2007].

Бихарактеристическая система Гамильтона-Лукина

- Уравнения для волновых векторов

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \vec{r}} \bigg/ \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega}$$

- Уравнения для координат

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(2c^2 \vec{k} - \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \vec{k}} \right) \bigg/ \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega}$$

Расширенная бихарактеристическая система Д.С. Лукина

- Уравнения для волновых векторов

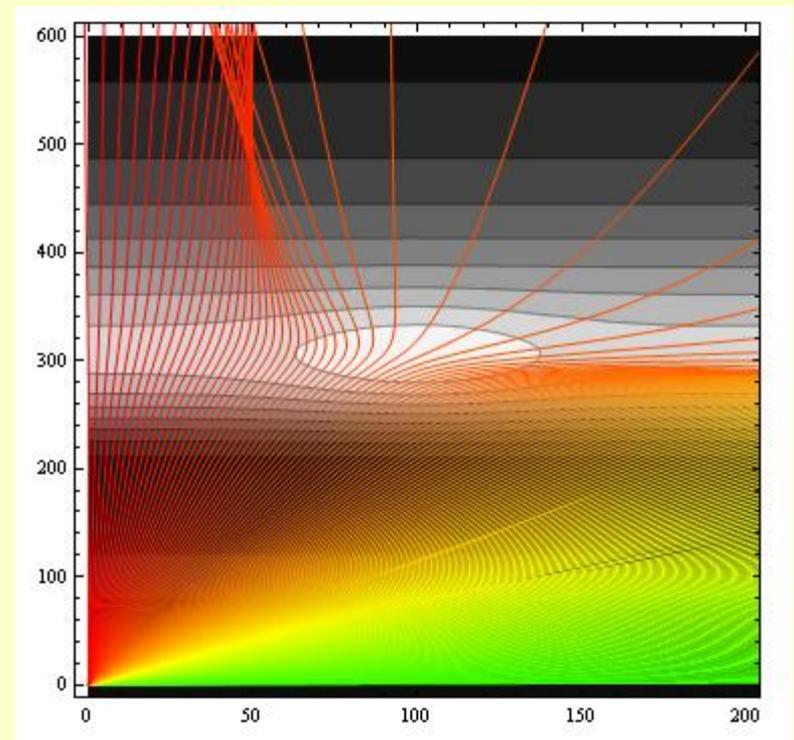
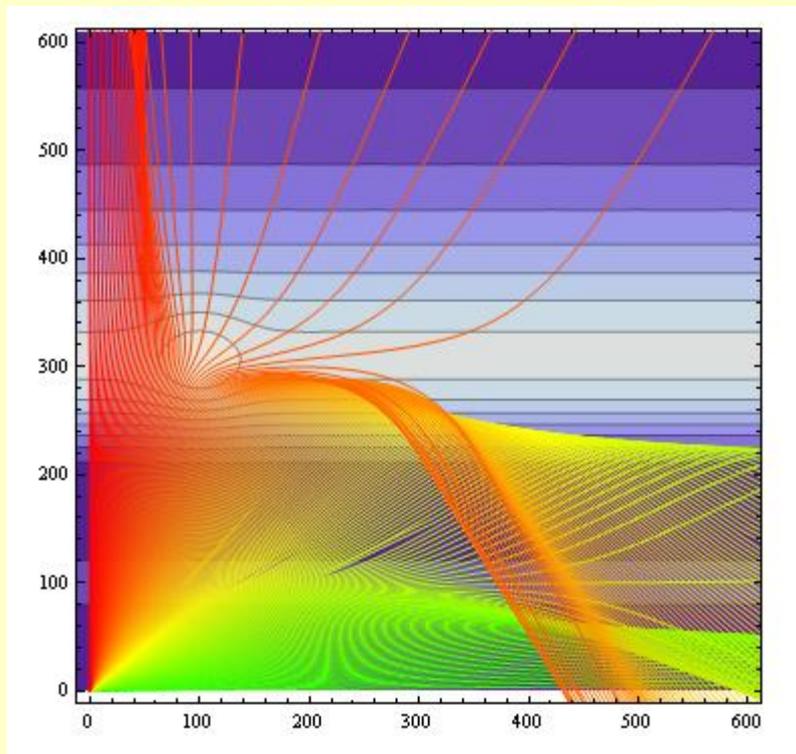
$$\frac{d\vec{k}_{\alpha_0}}{dt} = \frac{\partial}{\partial \alpha_0} \left(\frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \vec{r}} \bigg/ \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega} \right) \quad \frac{d\vec{k}_{\beta_0}}{dt} = \frac{\partial}{\partial \beta_0} \left(\frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \vec{r}} \bigg/ \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega} \right)$$

- Уравнения для координат

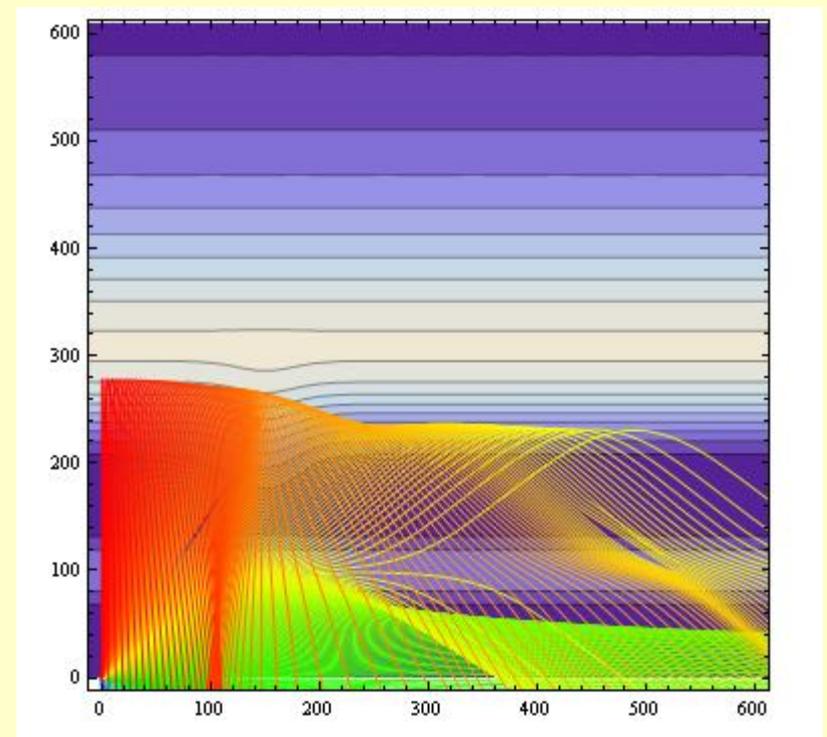
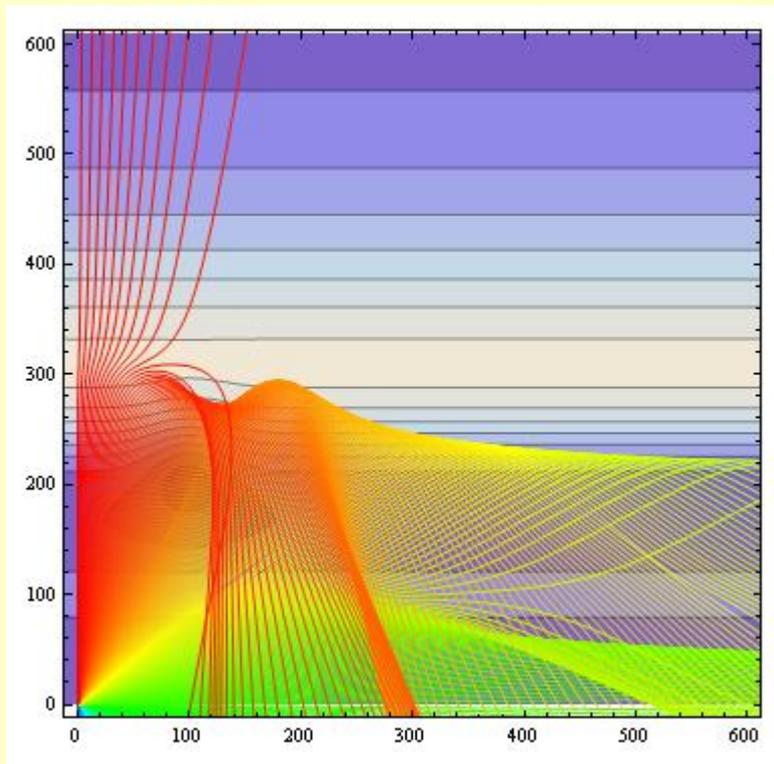
$$\frac{d\vec{r}_{\alpha_0}}{dt} = \frac{\partial}{\partial \alpha_0} \left(\left(2c^2 \vec{k} - \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \vec{k}} \right) \bigg/ \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega} \right)$$

$$\frac{d\vec{r}_{\beta_0}}{dt} = \frac{\partial}{\partial \beta_0} \left(\left(2c^2 \vec{k} - \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \vec{k}} \right) \bigg/ \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega} \right)$$

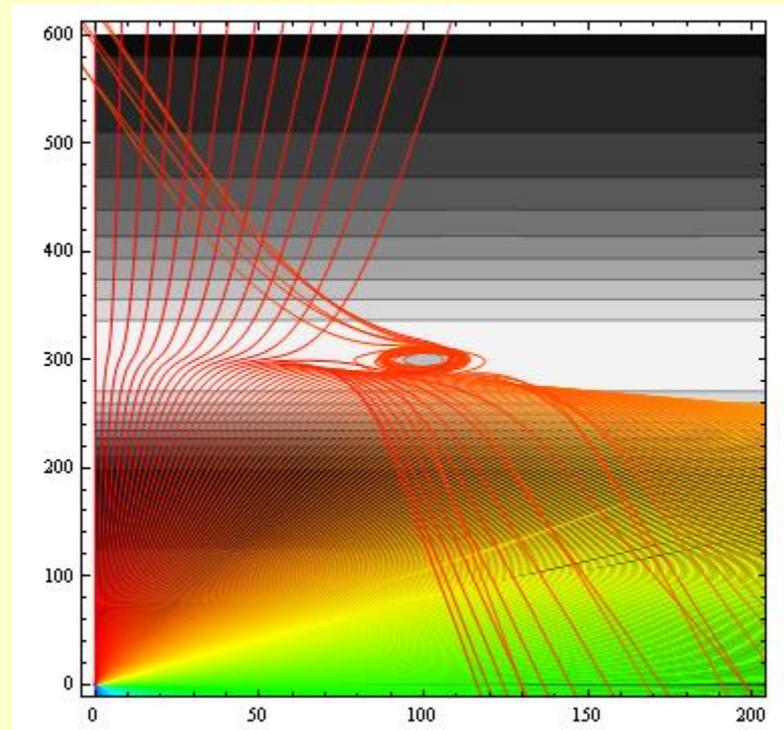
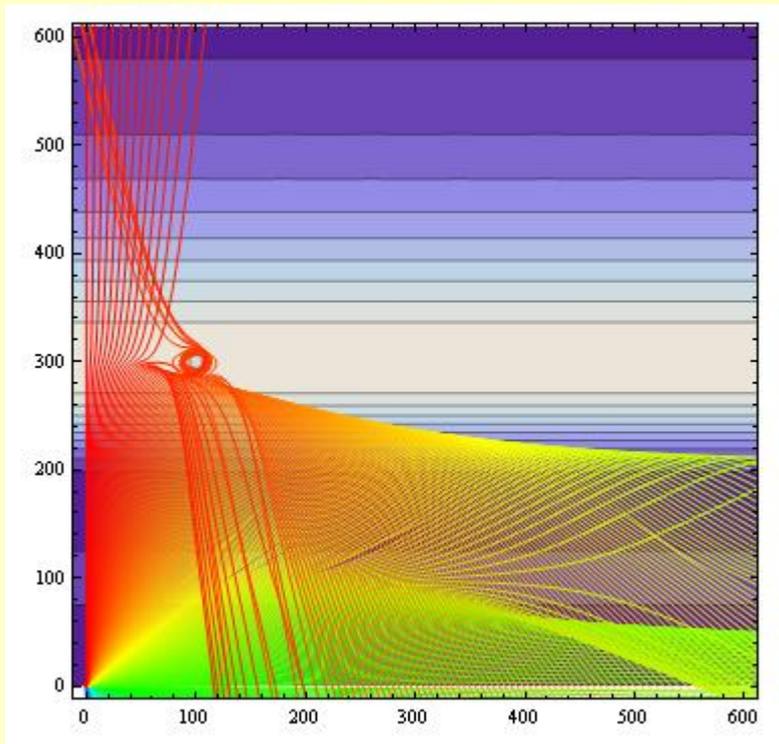
Рассеяние радиоволн на неоднородности с повышенной электронной концентрацией

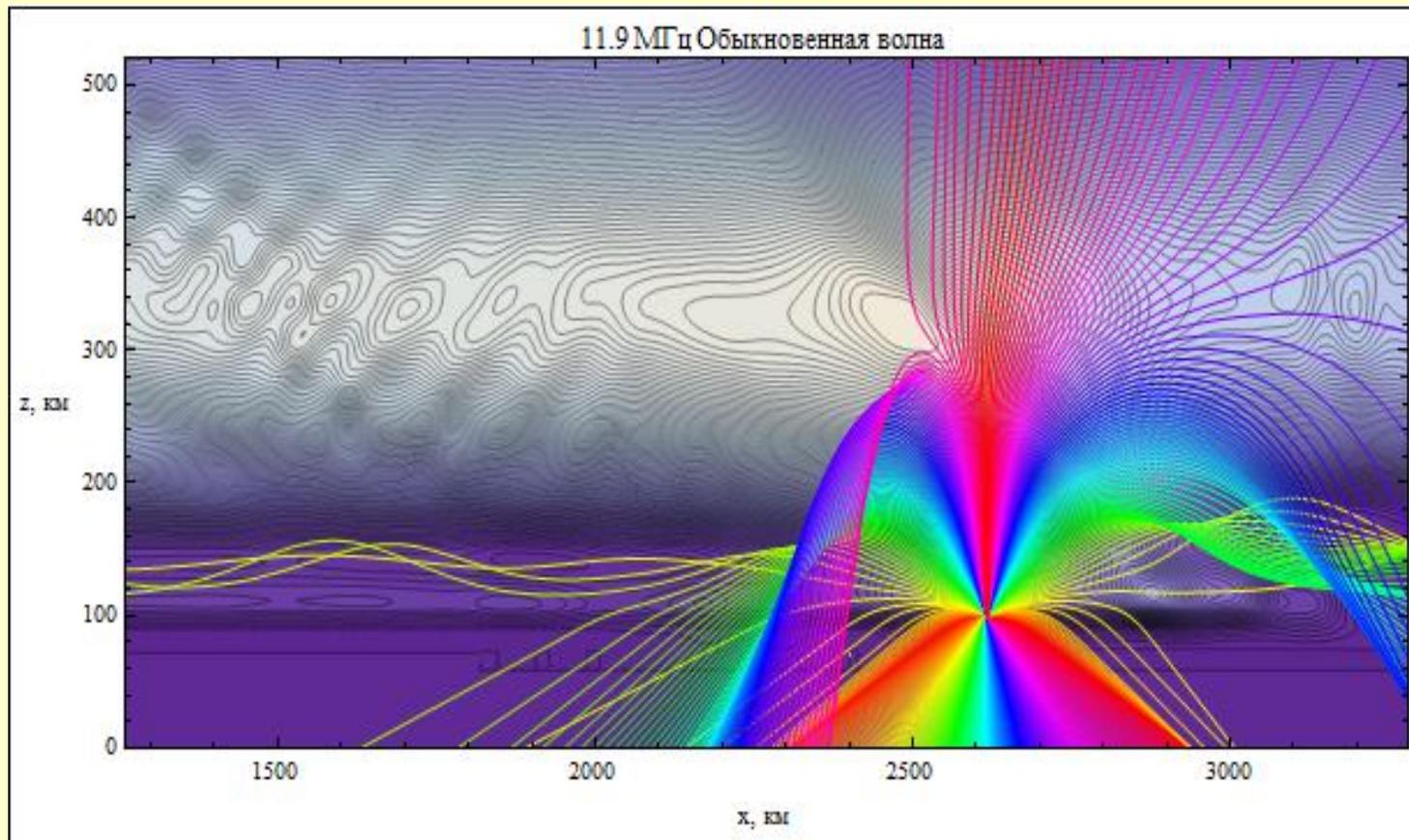


Рассеяние радиоволн на неоднородности с повышенной электронной концентрацией

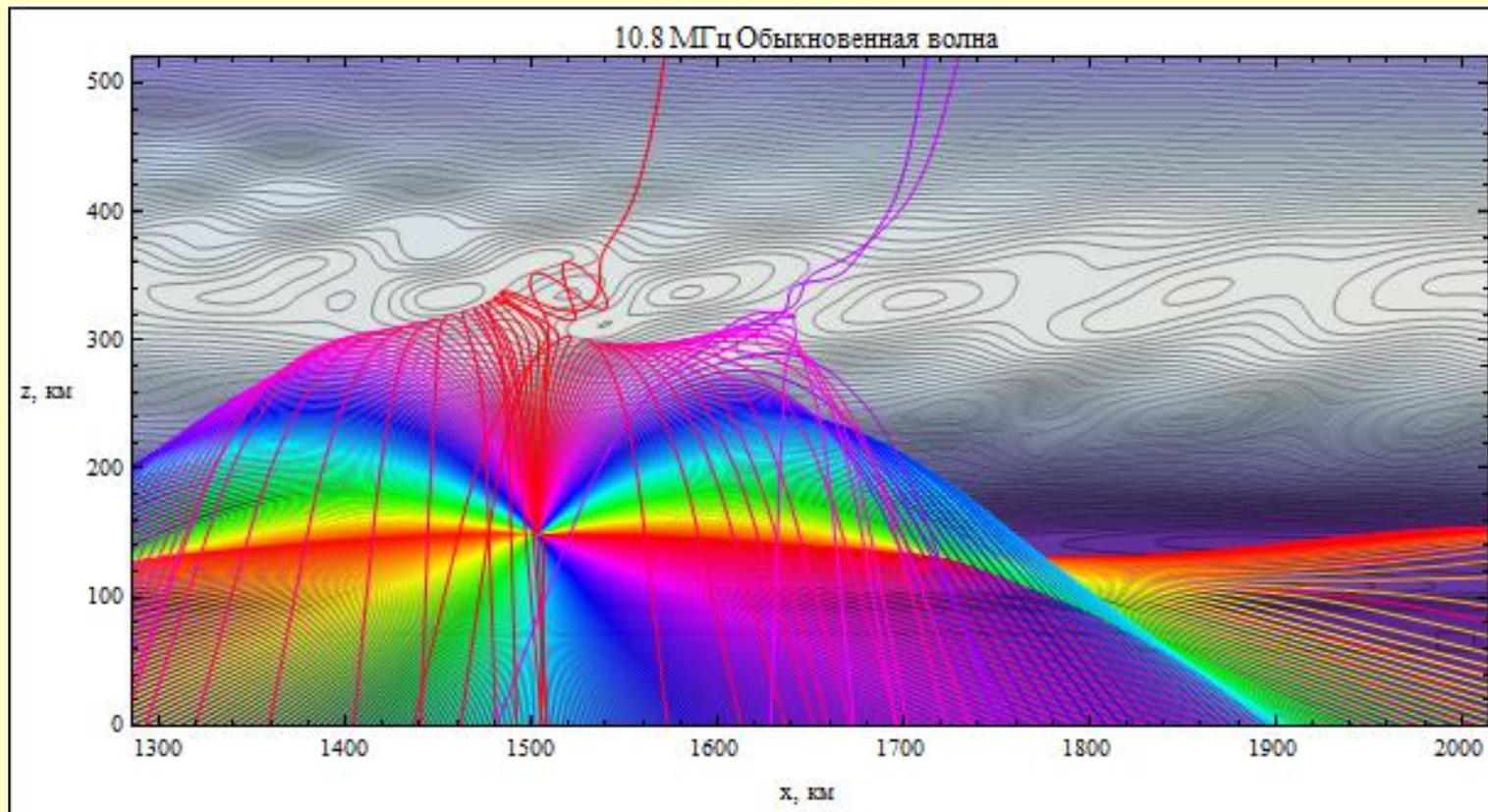


Рассеяние радиоволн на неоднородности с пониженной электронной концентрацией





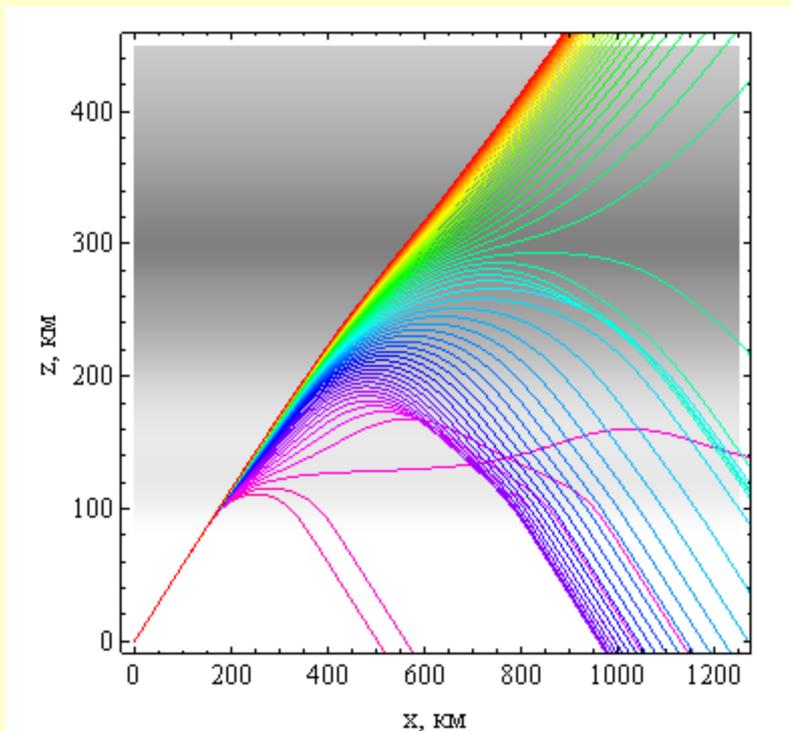
Лучевое распространение в окрестности экваториальной аномалии. Источник излучения приподнят.



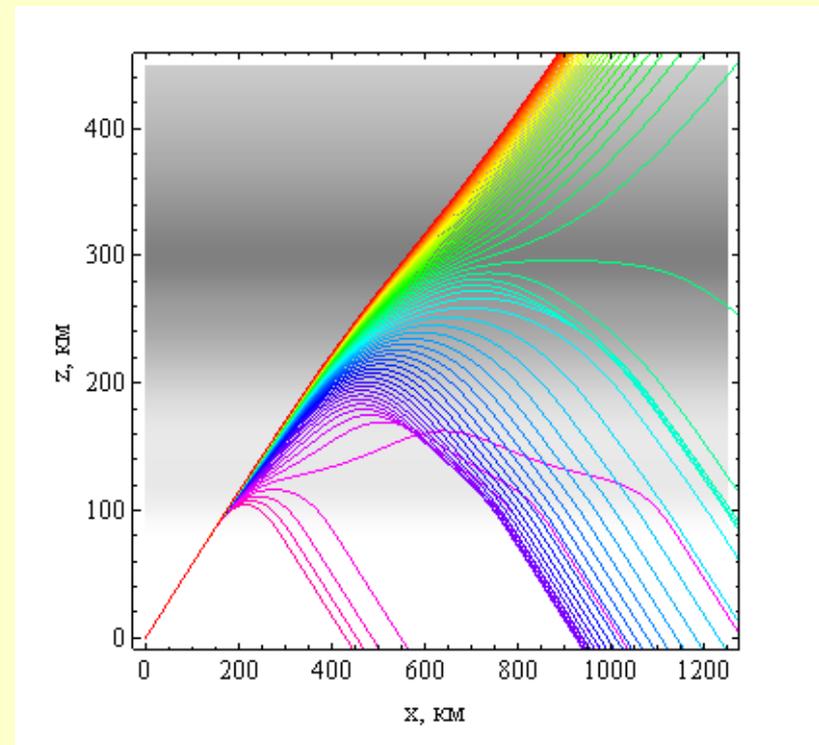
Распространение лучей в периодически возмущенной ионосфере. Источник излучения приподнят.

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала в плоскости (x,z) .

Угол выхода 30° . Ночная ионосфера.

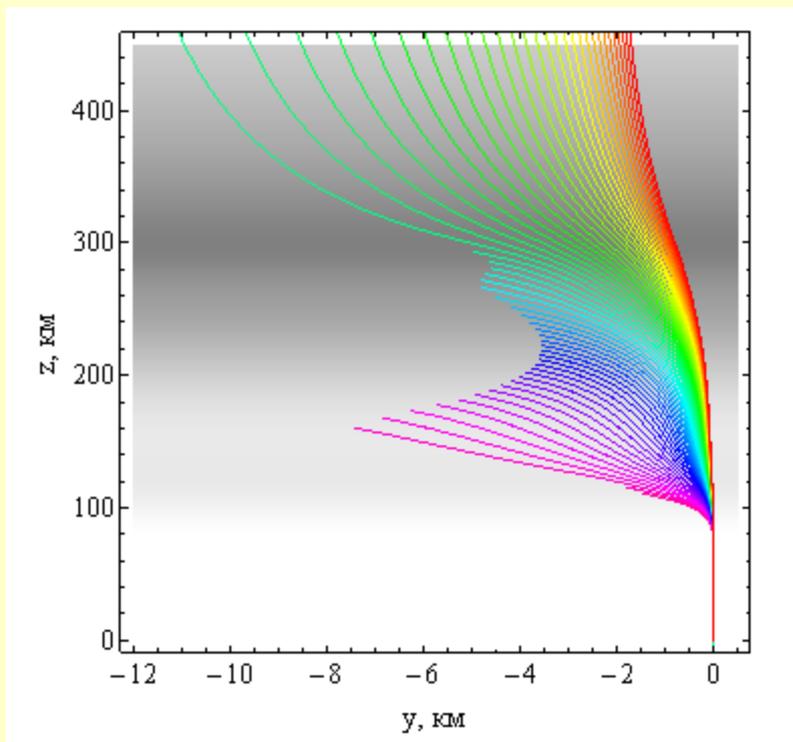


Обыкновенная волна

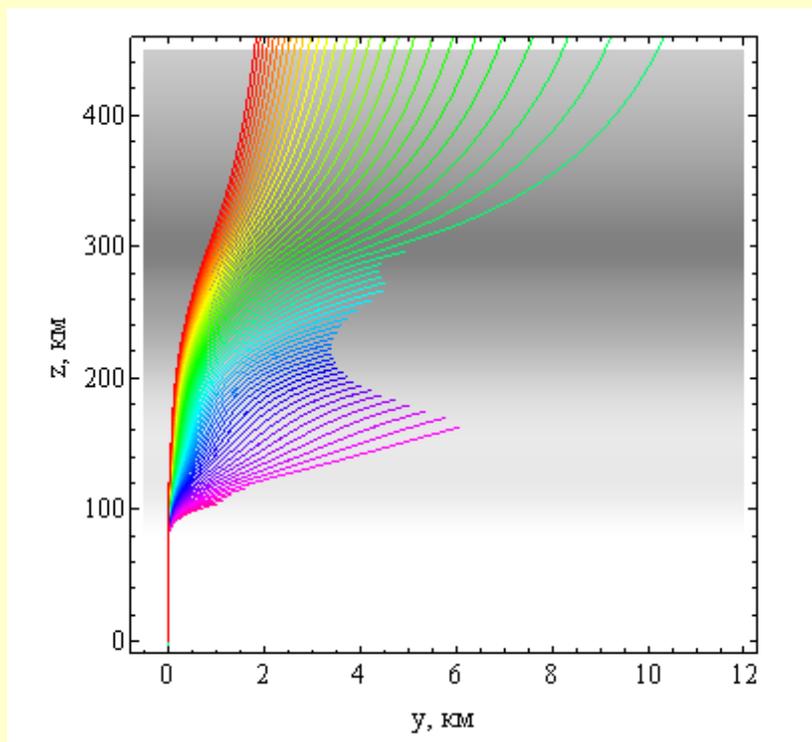


Необыкновенная волна

Лучевые структуры ЛЧМ радиосигнала в плоскости (y,z) . Угол выхода 30° . Ночная ионосфера.

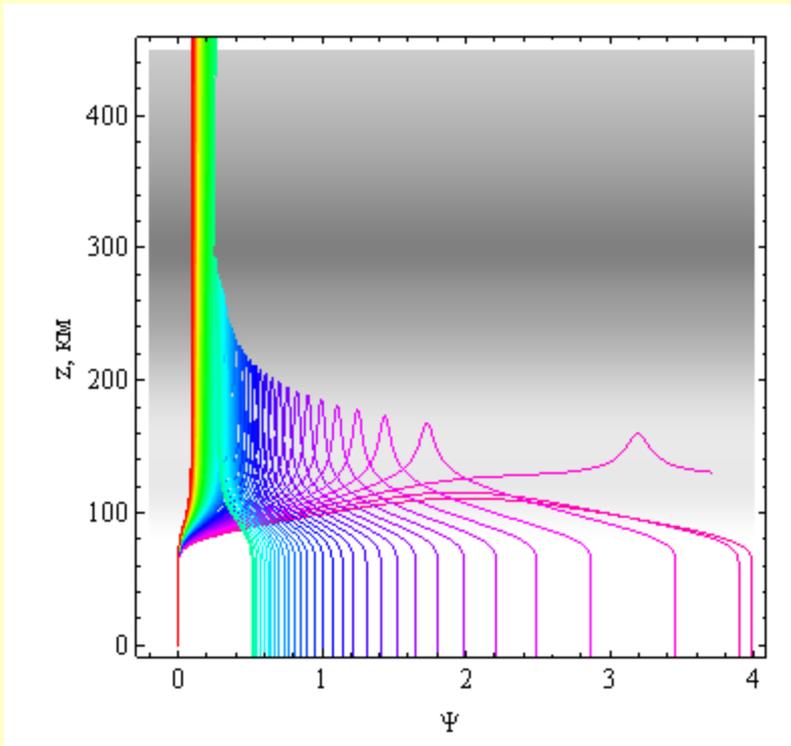


Обыкновенная волна

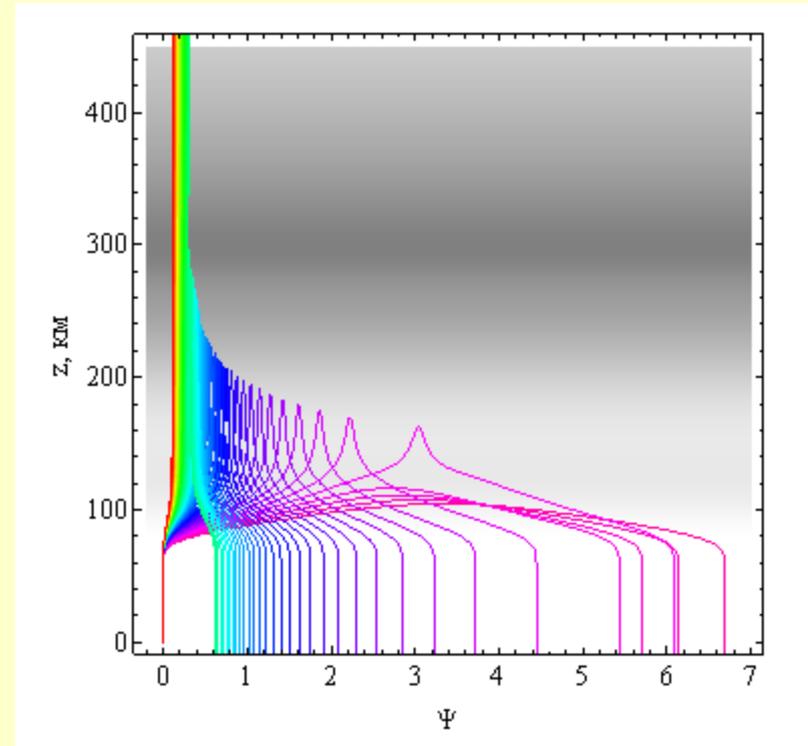


Необыкновенная волна

**Зависимости поглощения Ψ (в Неперах) вдоль траекторий от высоты. Угол выхода 30° .
Ночная ионосфера.**



Обыкновенная волна



Необыкновенная волна

Зависимости расходимости вдоль лучевых траекторий от высоты в дБ. Угол выхода 30° . Ночная ионосфера.

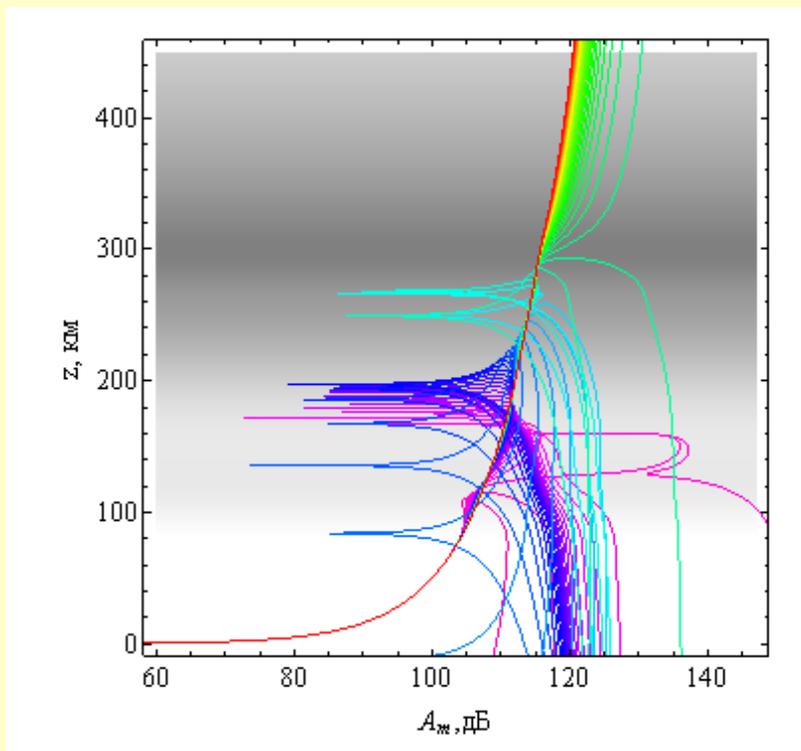


Рис. 5 а
Обыкновенная волна

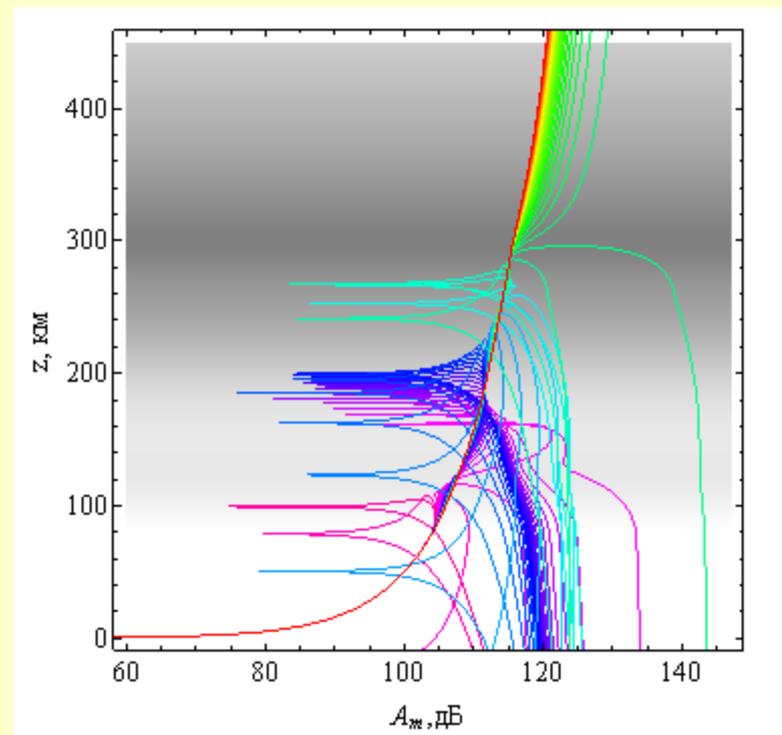
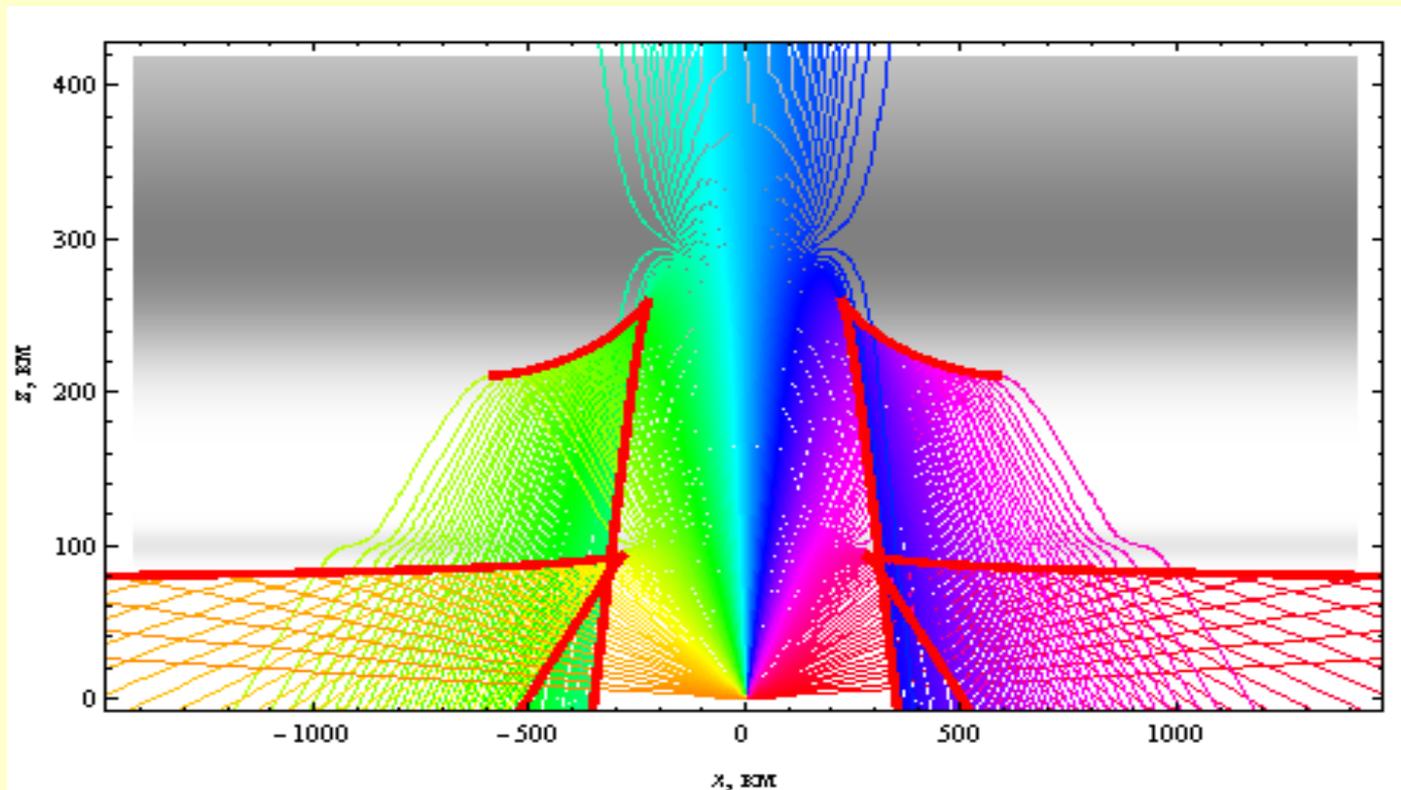
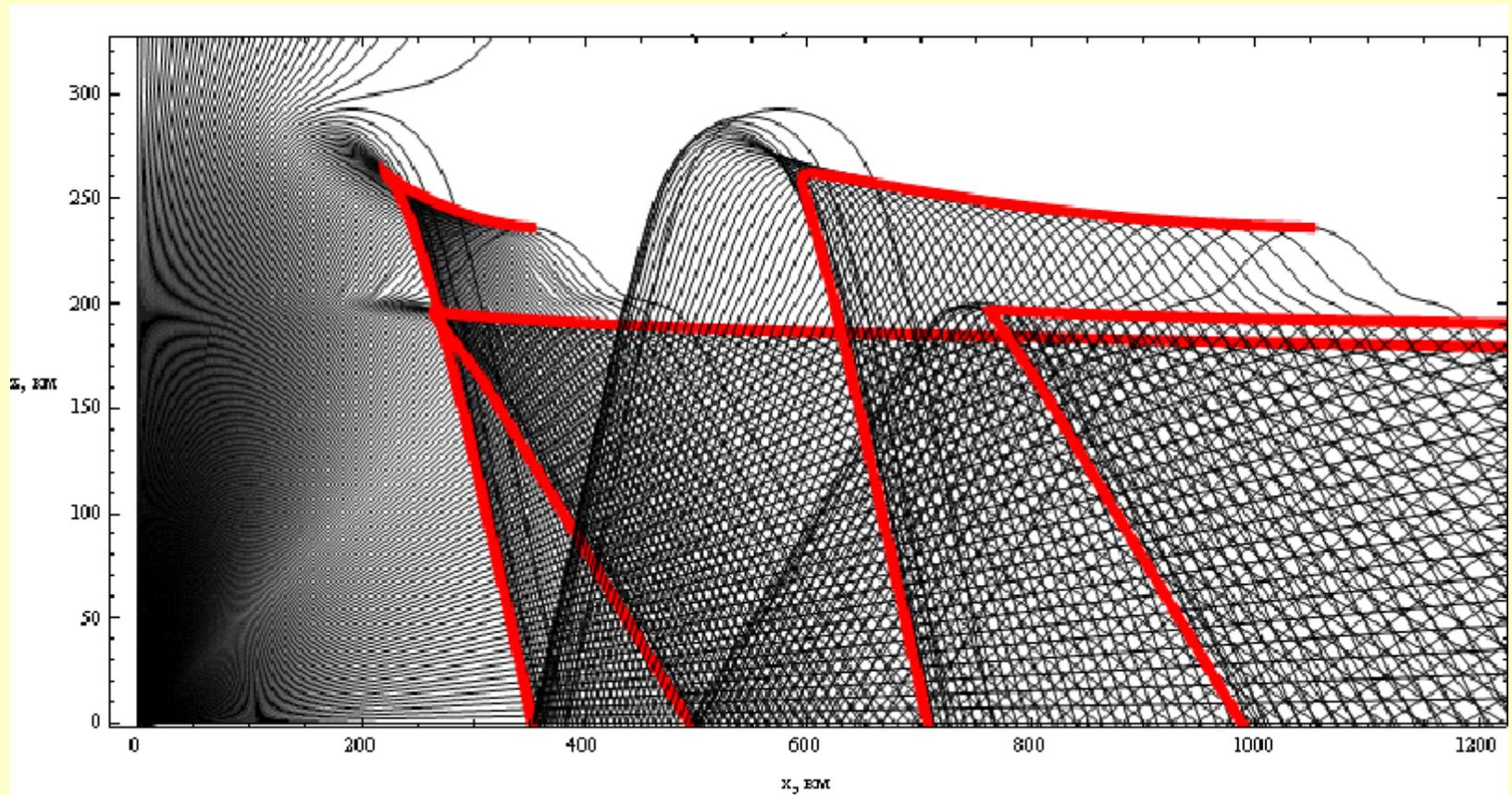


Рис. 5 б
Необыкновенная волна



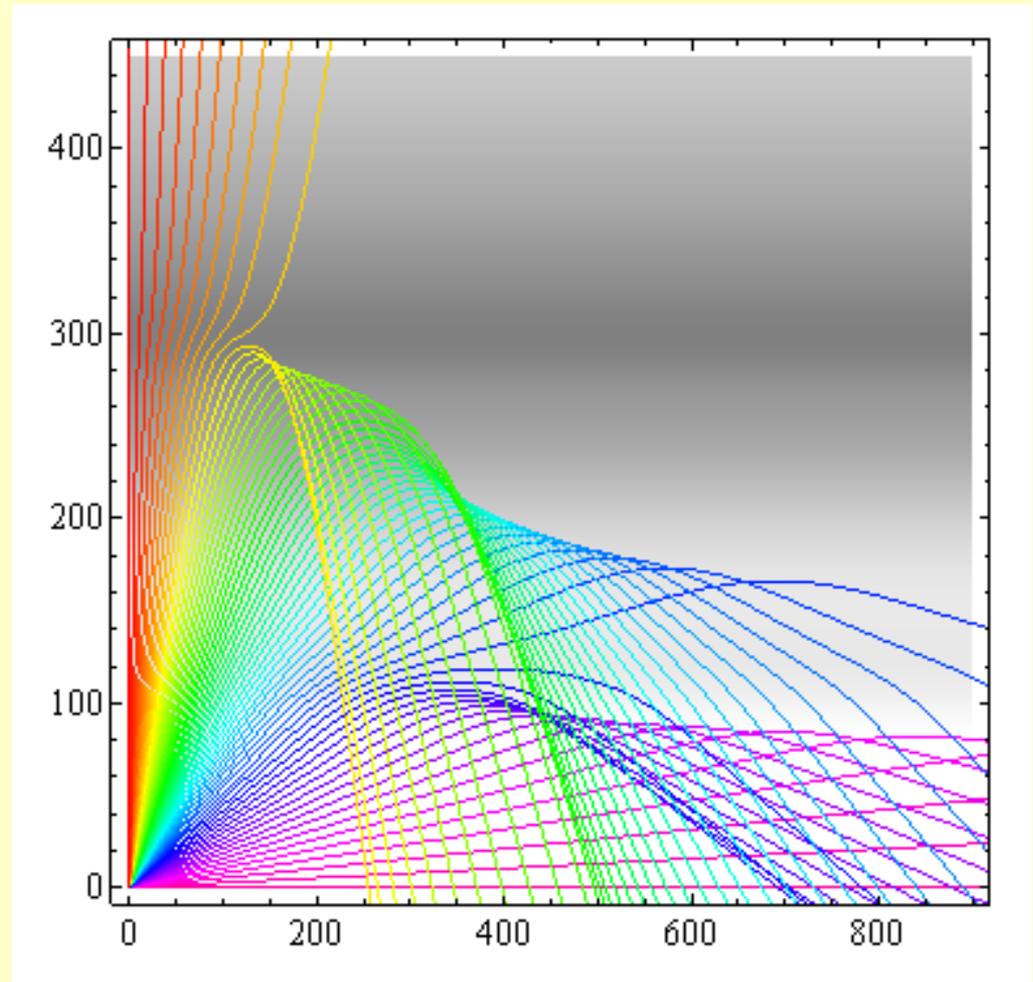
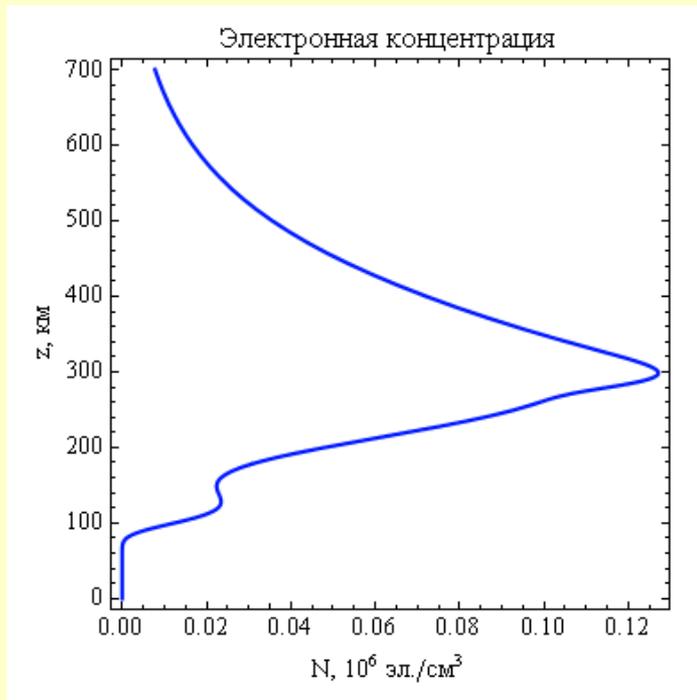
Лучевая и каустическая структура в двухслоевой модели (каустики – толстые линии, лучи – тонкие)



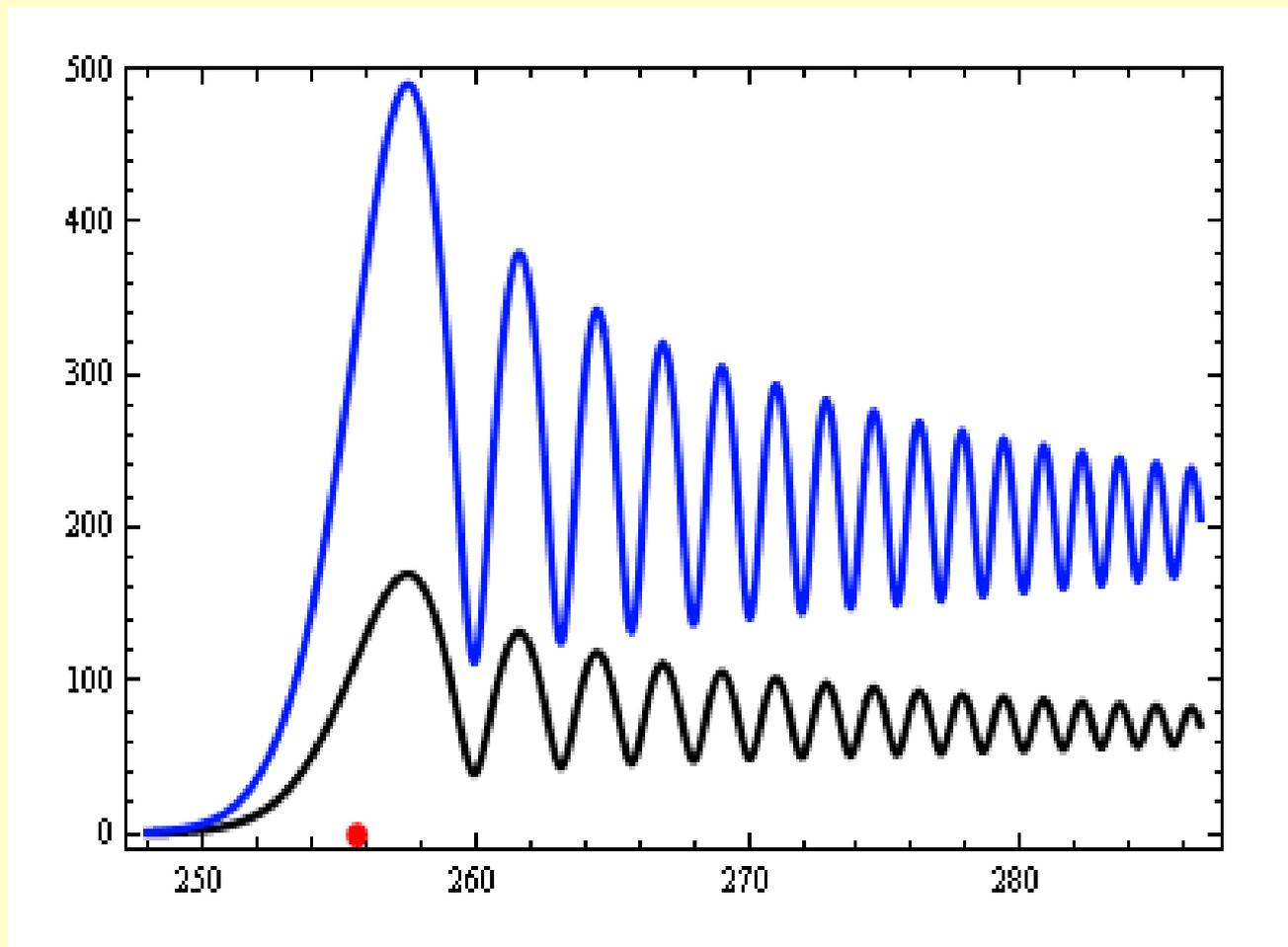
Лучевая и каустическая структуры с учётом отражения от поверхности Земли (каустики – красные линии, лучи – чёрные).

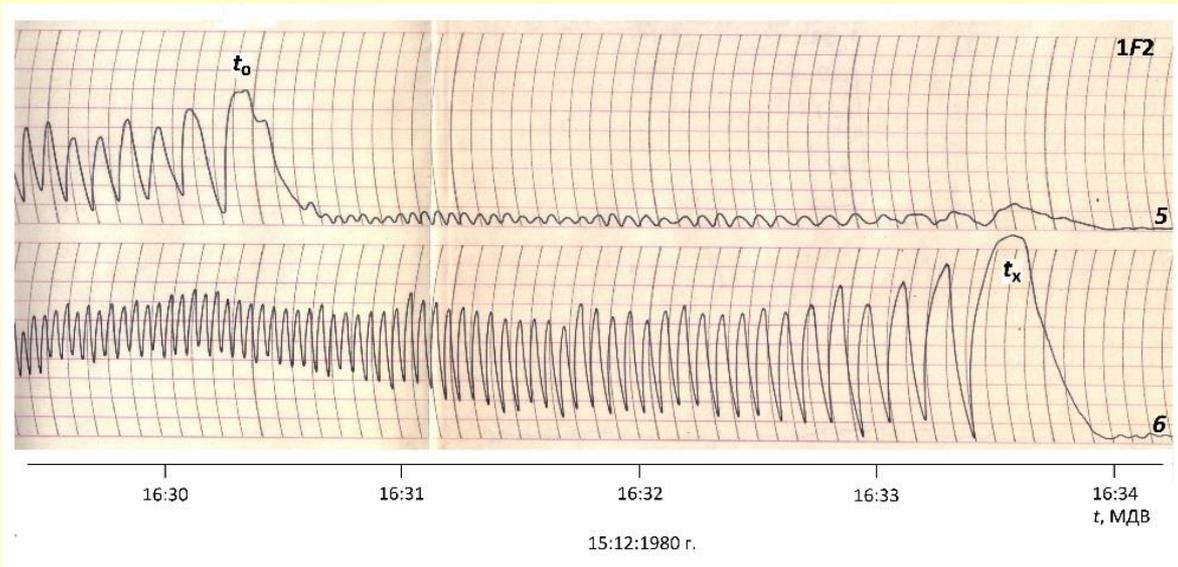
Лучевая структура

$f=3,3$ МГц



Поле на каустике в мкВ/м



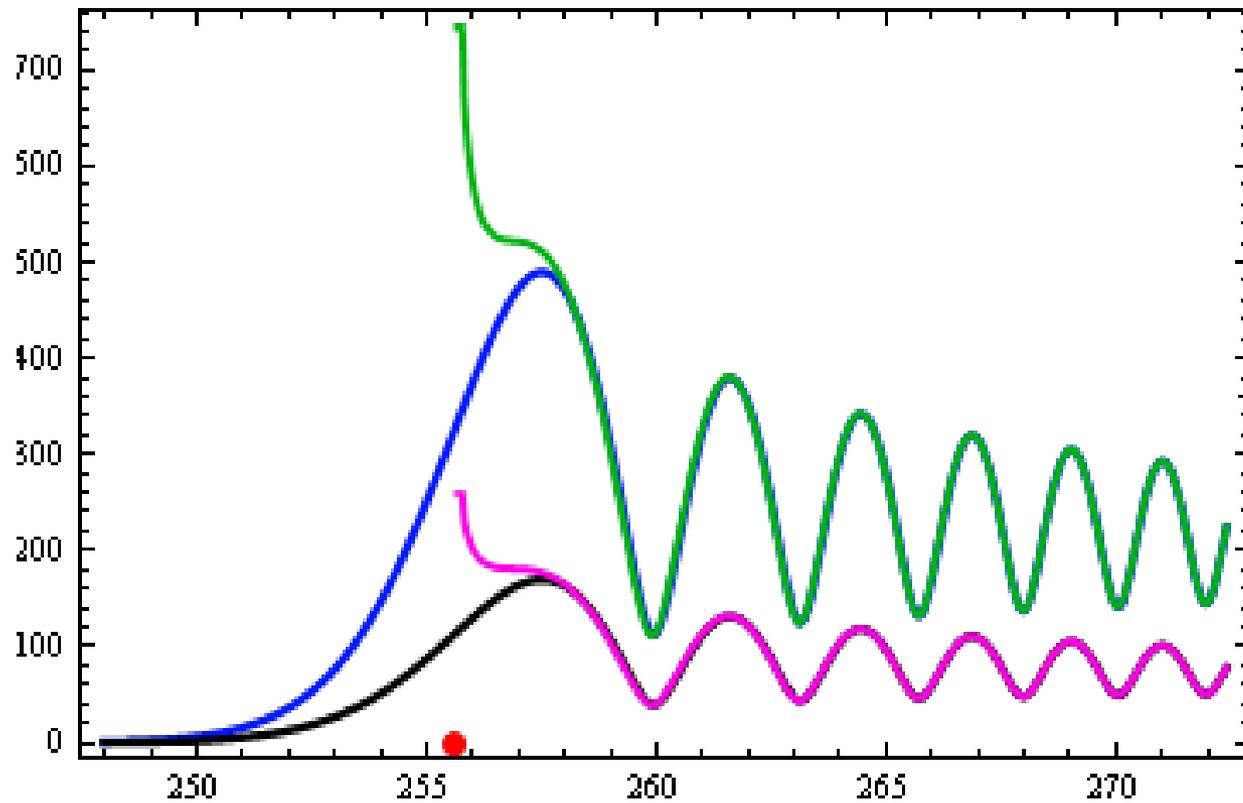


Сравнение лучевого и каустического решений

$$u_c \cong \exp(i\theta) \left(l_1 \cdot Ai(\lambda) + l_2 \cdot \frac{dAi(\lambda)}{d\lambda} \right)$$

$$u_g \cong b_1 \cdot \exp(i(\Phi_1 - \pi/2)) + b_2 \cdot \exp(i\Phi_2)$$

Сравнение лучевого и каустического решений



Волновая теория катастроф (катастрофы без ограничений)

Опираясь на теорию особенностей дифференцируемых отображений [Арнольд и др., 1982; 1984], ВТК позволяет построить классификацию структурно устойчивых фокальных областей и равномерные асимптотические решения в виде [Крюковский и др., 1984; Kryukovsky et al., 1987; Kryukovskii et al., 2006; Kryukovskii et al., 2009]:

$$U(\Lambda, \vec{q}) \cong \exp[i\Lambda\Theta(\vec{q})] \times \left[l_1 I^\Sigma(\vec{S}(\Lambda, \vec{q})) + \sum_{j=2}^N l_j \frac{\partial I^\Sigma(\vec{S})}{\partial S_{j-1}} \right]$$

$$l_j = \sum_{n=0}^{+\infty} l_j^{(n)}(\Lambda, \vec{q}) = \Lambda^{\sigma_j} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\Lambda^n} \tilde{l}_j^{(n)}(\vec{q}) \quad \vec{S} = (\vec{\lambda}, \vec{a})$$

Специальные функции волновых катастроф – СВК

$$I^\Sigma(\vec{\lambda}, \vec{a}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[i F_\Sigma(\vec{\xi}, \vec{a}, \vec{\lambda}) \right] d\vec{\xi}$$

Универсальная деформация F_Σ имеет вид:

$$F_\Sigma(\vec{\xi}, \vec{a}, \vec{\lambda}) = \varphi_0^\Sigma(a, \xi_1, \dots, \xi_{\bar{\kappa}}) + \sum_{j=1}^L \lambda_j \varphi_j^\Sigma(\xi_1, \dots, \xi_{\bar{\kappa}}) + \sum_{j=1+\bar{\kappa}}^{\kappa} \pm \xi_j^2$$

Нормальная форма (особый росток) и возмущения:

$$\varphi_0^\Sigma(a, \xi_1, \dots, \xi_{\bar{\kappa}})$$

$$\varphi_j^\Sigma(\xi_1, \dots, \xi_{\bar{\kappa}})$$

Таблица основных катастроф

№	Σ	Особый росток $\varphi_0^\Sigma(x, y, z, a)$	N	Ограничения на функциональный модуль a	$\dim \bar{a}$	\bar{k}	K
1	A_N	$\pm x^{N+1}, N > 0$	N	—	0	(0)1	$N+1$
2	D_4^\pm	$(1/3)x^3 \pm xy^2$	4	—	0	2	3
3	D_5	$x^4 + xy^2$	5	—	0	2	4
5	E_6^\pm	$x^4 \pm y^3$	6	—	0	2	4
6	E_7	$x^3y + y^3$	7	—	0	2	4
7	E_8	$x^5 + y^3$	8	—	0	2	5
8	X_9	$\pm x^4 + ax^2y^2 \pm y^4$	9	$a^2 \neq 4$ если “+ +” или “- -”	1	2	4
9	J_{10}	$x^3 + ax^2y^2 \pm xy^4$	10	$a^2 \neq 4$ если “+”	1	2	5
10	Z_{11}	$x^3y + y^5 + axy^4$	11	—	1	2	5
11	P_8	$x^3 + ax^2z \pm xz^2 + y^2z$	8	$a^2 \neq 4$ если “+”	1	3	3
12	Q_{10}	$x^3 \pm y^4 + yz^2 + axy^3$	10	—	1	3	4
13	Q_{11}	$x^3 + y^2z \pm xz^3 + az^5$	11	—	1	3	5
14	S_{11}	$\pm x^4 + y^2z + xz^2 + ax^3z$	11	—	1	3	4

Определение коэффициентов асимптотического разложения

Для определения коэффициентов асимптотического разложения на основе амплитуды и фазы подынтегрального выражения построены цепочки рекуррентных соотношений [Kryukovskii, Lukin, 1998; Крюковский, 2013]:

$$\Lambda^{\frac{\delta}{2}} f|\Delta| = \left(l_1^{(0)}\right)_g + i \sum_{j=2}^{N_g} \frac{\partial F_{\Sigma}}{\partial S_{j-1}^g} \left(l_j^{(0)}\right)_g + \sum_{j=1}^{\delta} \frac{\partial F_{\Sigma}}{\partial \xi_j} \left(H_j^{(0)}\right)_g$$

$$i \sum_{j=1}^{\delta} \frac{\partial \left(H_j^{n-1}\right)_g}{\partial \xi_j} = \left(l_1^{(n)}\right)_g + i \sum_{j=2}^{N_g} \frac{\partial F_{\Sigma}}{\partial S_{j-1}^g} \left(l_j^{(n)}\right)_g + \sum_{j=1}^{\delta} \frac{\partial F_{\Sigma}}{\partial \xi_j} \left(H_j^{(n)}\right)_g$$

Математическое моделирование -3

- Универсальная деформация имеет вид:

$$F_{\Sigma}(\vec{\xi}, \vec{a}, \vec{\lambda}) = \varphi_0^{\Sigma}(a, \xi_1, \dots, \xi_{\bar{K}}) + \sum_{j=1}^L \lambda_j \varphi_j^{\Sigma}(\xi_1, \dots, \xi_{\bar{K}}) + \sum_{j=1+\bar{K}}^K \pm \xi_j^2$$

- Нормальная форма:

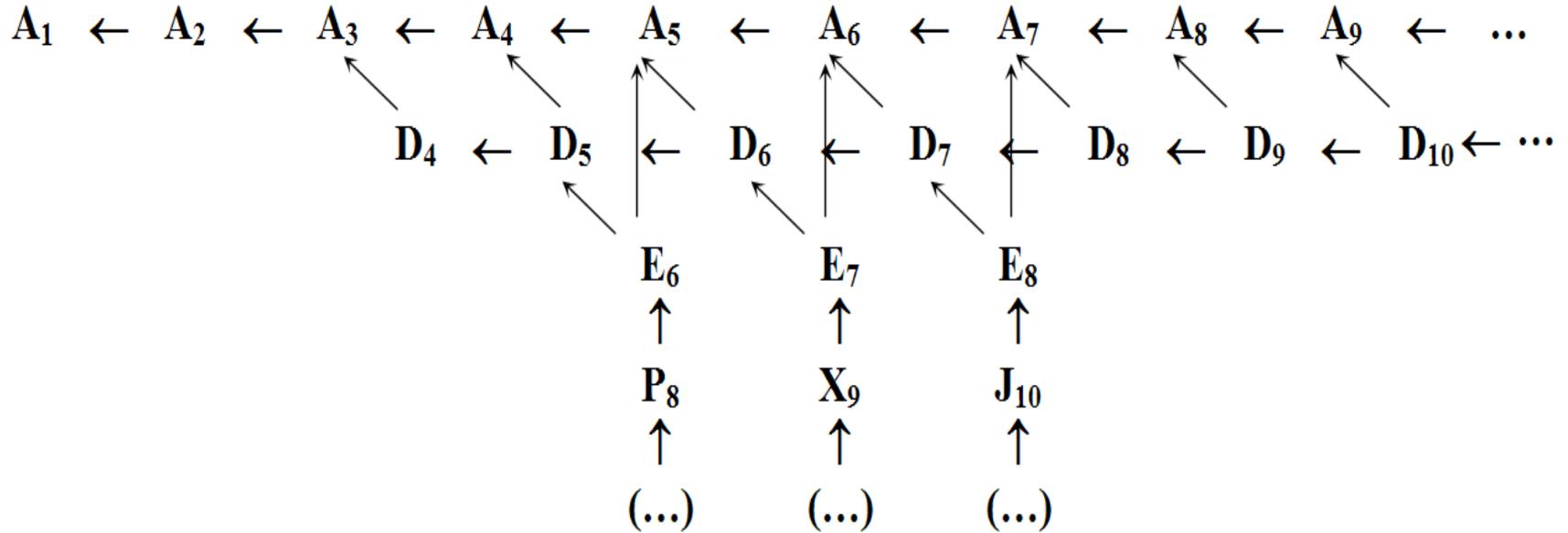
$$\varphi_0^{\Sigma}(a, \xi_1, \dots, \xi_{\bar{K}})$$

- Возмущения

$$\varphi_j^{\Sigma}(\xi_1, \dots, \xi_{\bar{K}})$$

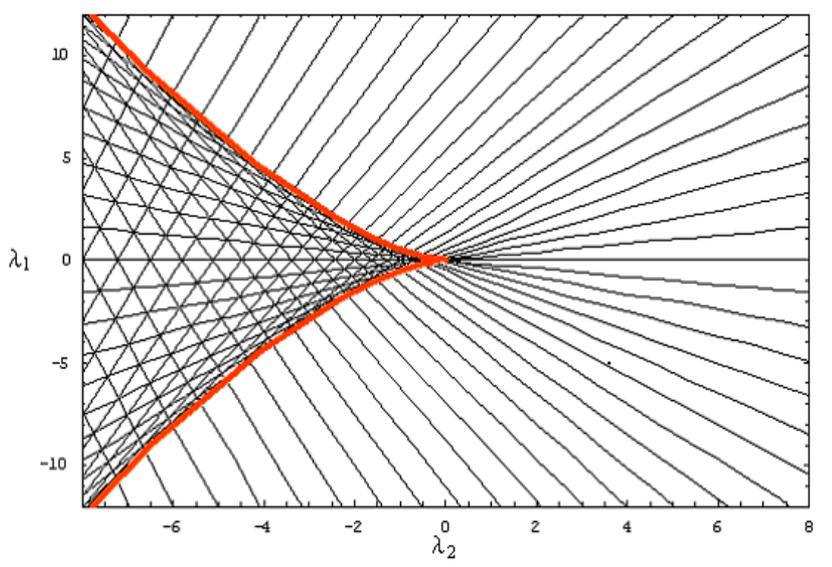
- Аналогичные результаты получены нами при решении задач дифракции на телах с границами, в которых возникают краевые и угловые катастрофы [6,8,9].

Схема подчинений (примыканий) основных катастроф

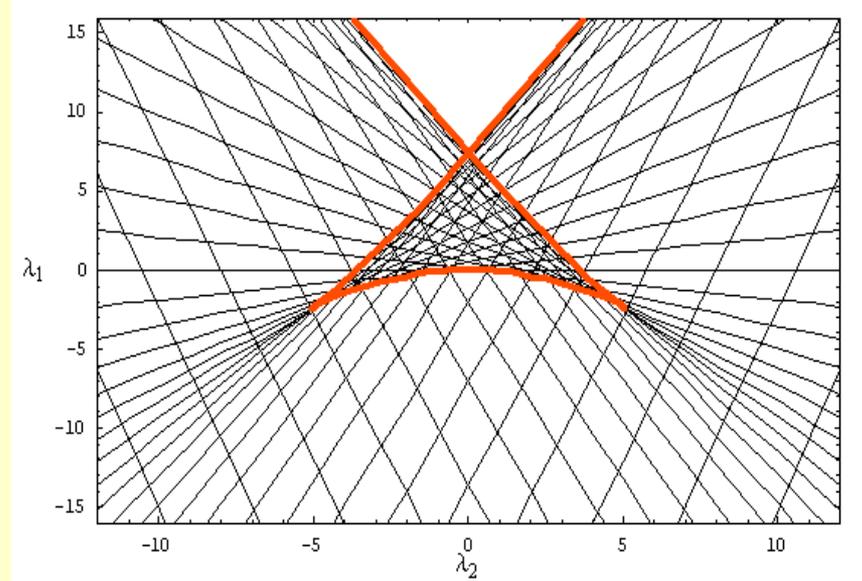


Каустики

Сечения каустических (красным) и лучевых (чёрным) структур основных катастроф [Дорохина и др., 2007].



A_3 — каустическое остриё,
«КЛЮВ»



A_4 — «ласточкин хвост»,
 $\lambda_3 = -4$

Универсальная деформация : $F_{A_N} = \xi_1^{N+1} + \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_1^2 + \dots + \lambda_{N-1} \xi_1^{N-1}$

Каспoidные каустики: «ВИГВАМ»

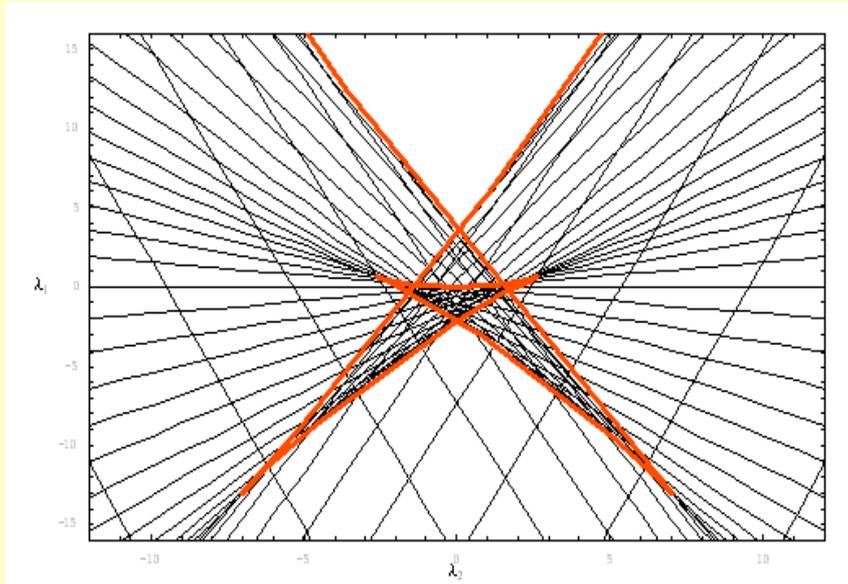


Рис. 9 а

\mathbf{A}_6 – «ВИГВАМ»,
 $\lambda_3=4, \lambda_4=0, \lambda_5=-4$

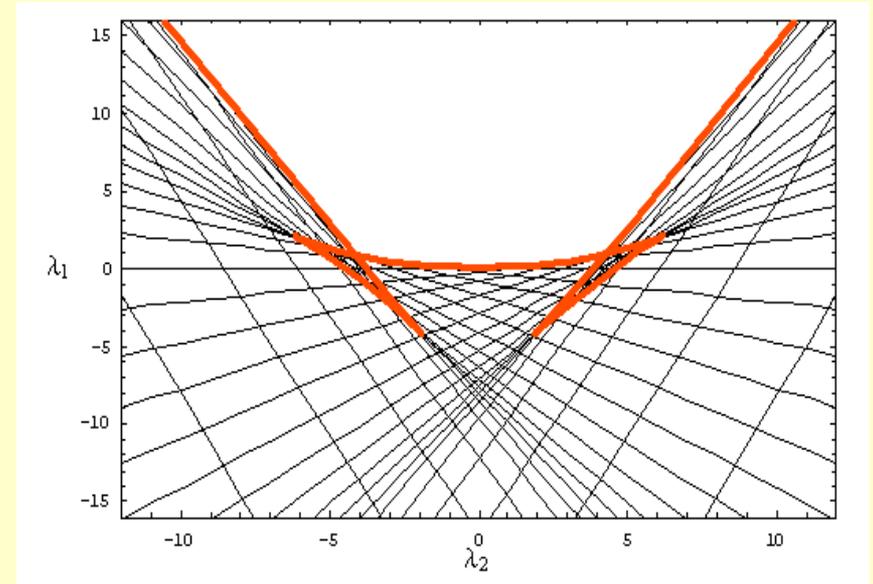
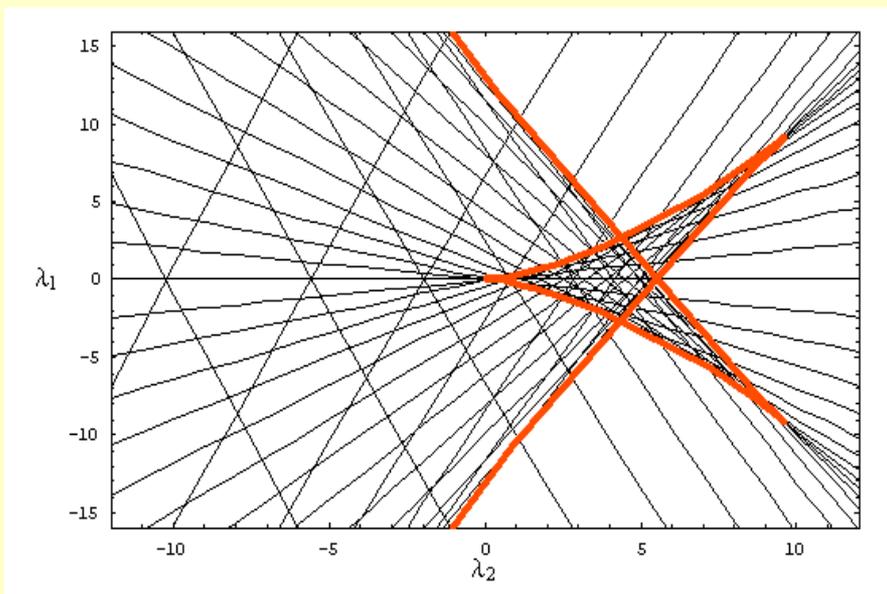


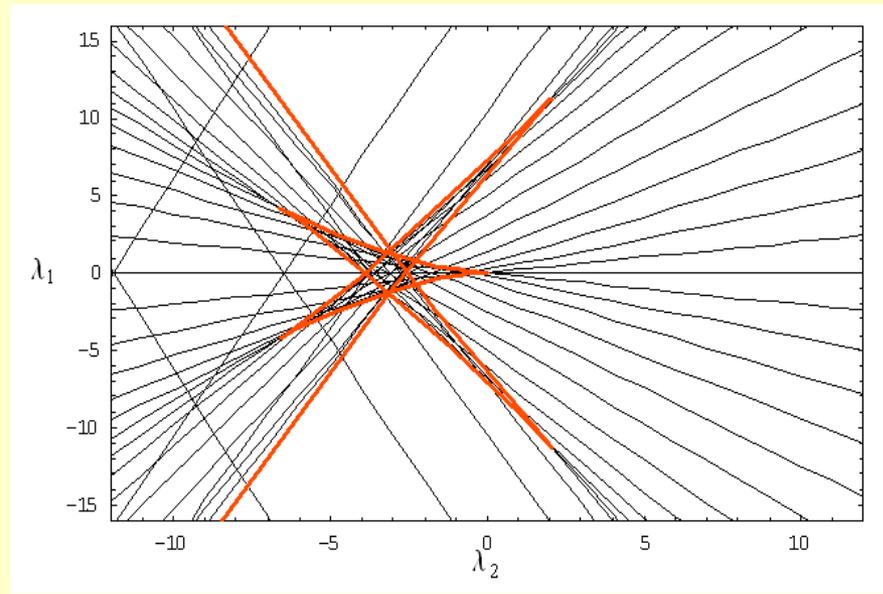
Рис. 9 б

\mathbf{A}_6 – «ВИГВАМ»,
 $\lambda_3=7, \lambda_4=0, \lambda_5=-4$

Каспидные каустики: «бабочка» и «звезда»

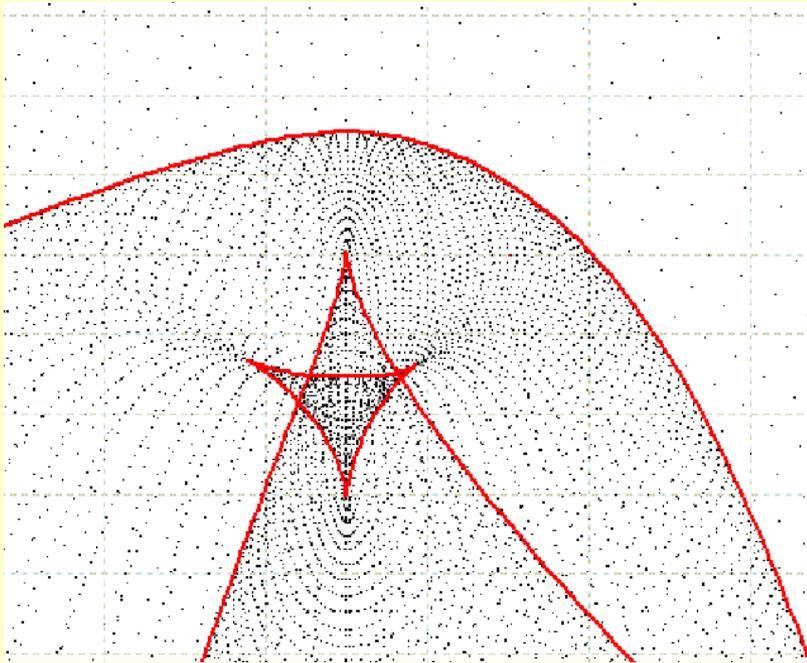


\mathbf{A}_5 – «бабочка»,
 $\lambda_3=0, \lambda_4=-4$

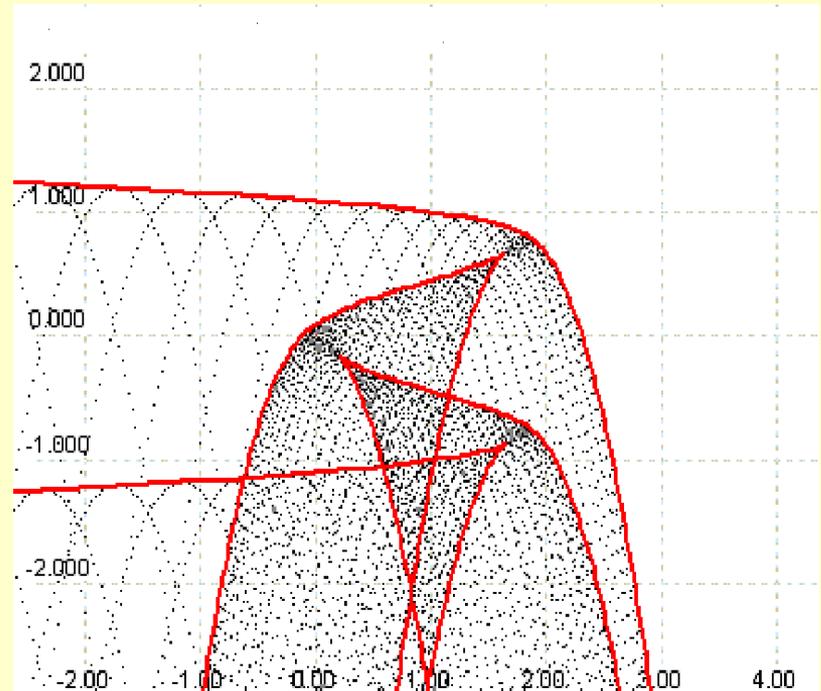


\mathbf{A}_7 – «звезда»,
 $\lambda_3=0, \lambda_4=6,5, \lambda_5=0,$
 $\lambda_6=-4,5$

Простые катастрофы коранга 2

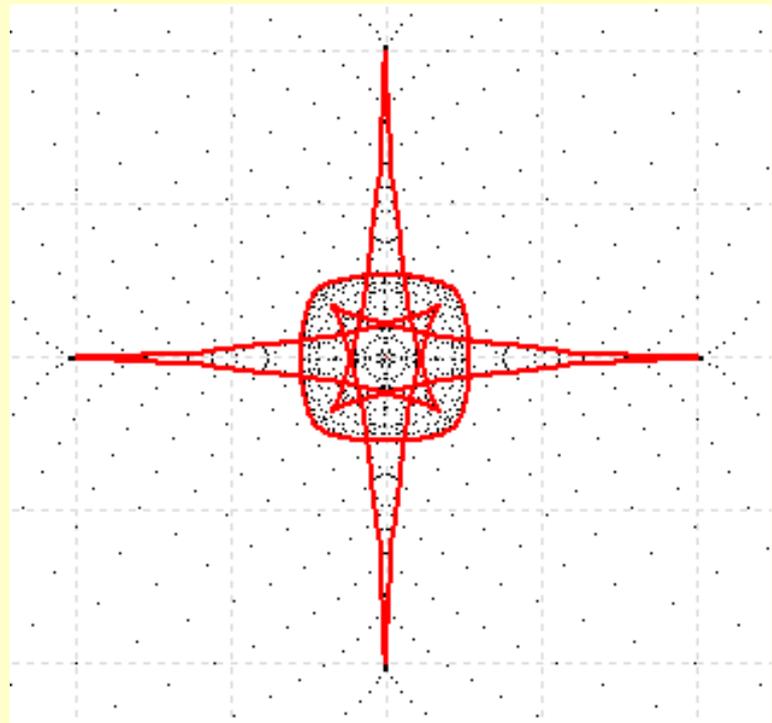
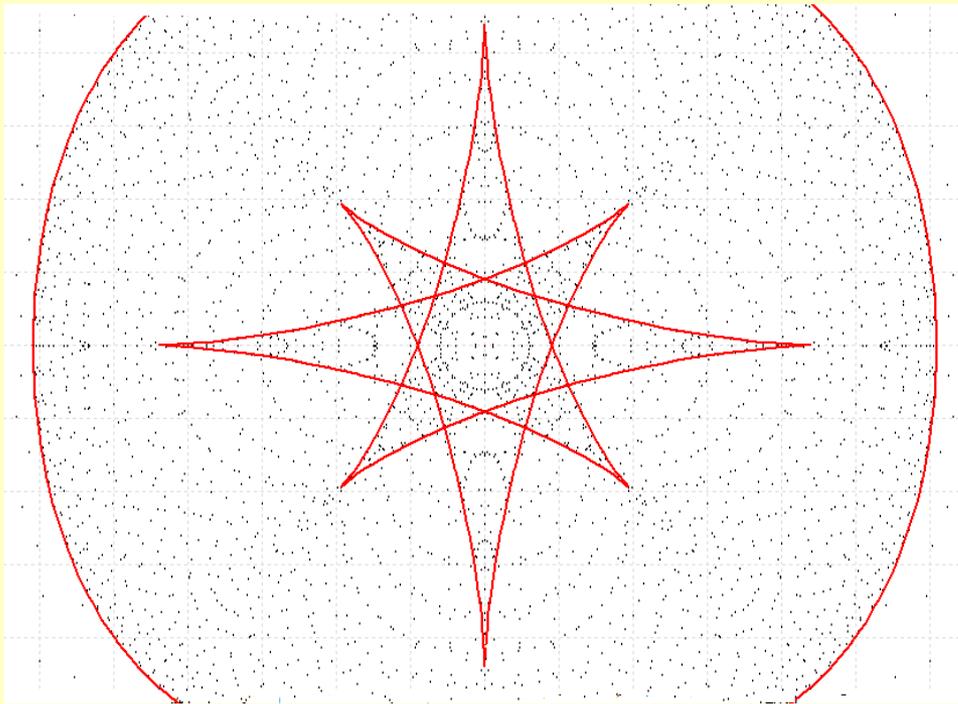


Катастрофа E_7

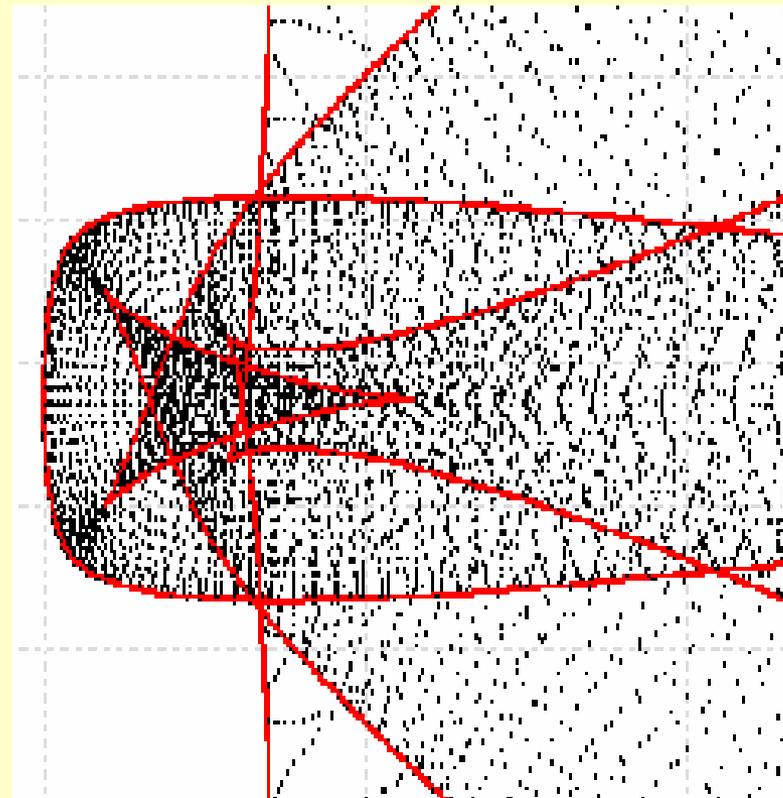
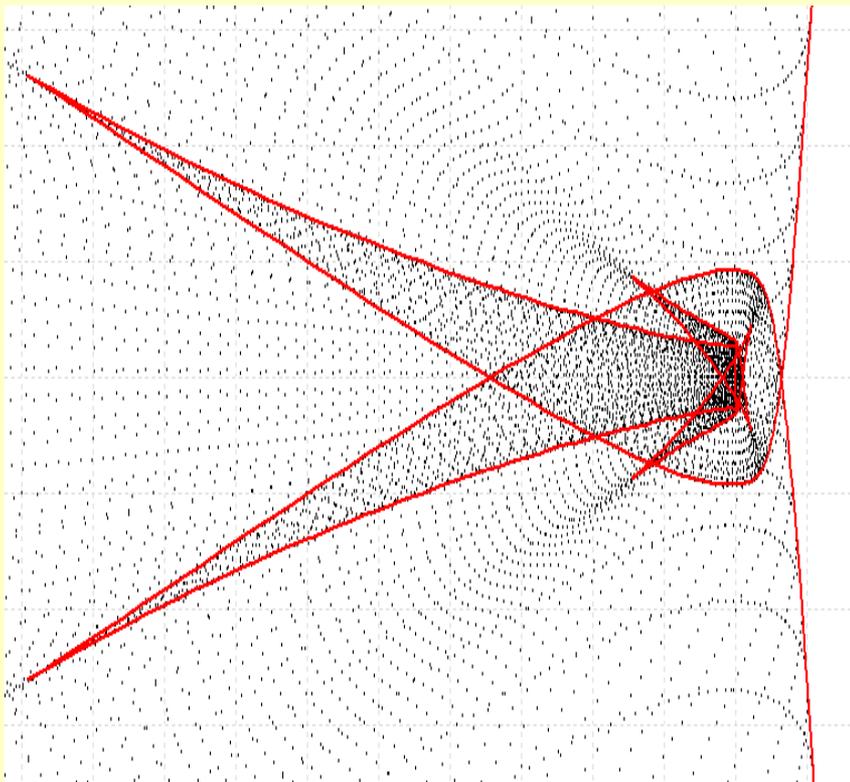


Катастрофа E_8

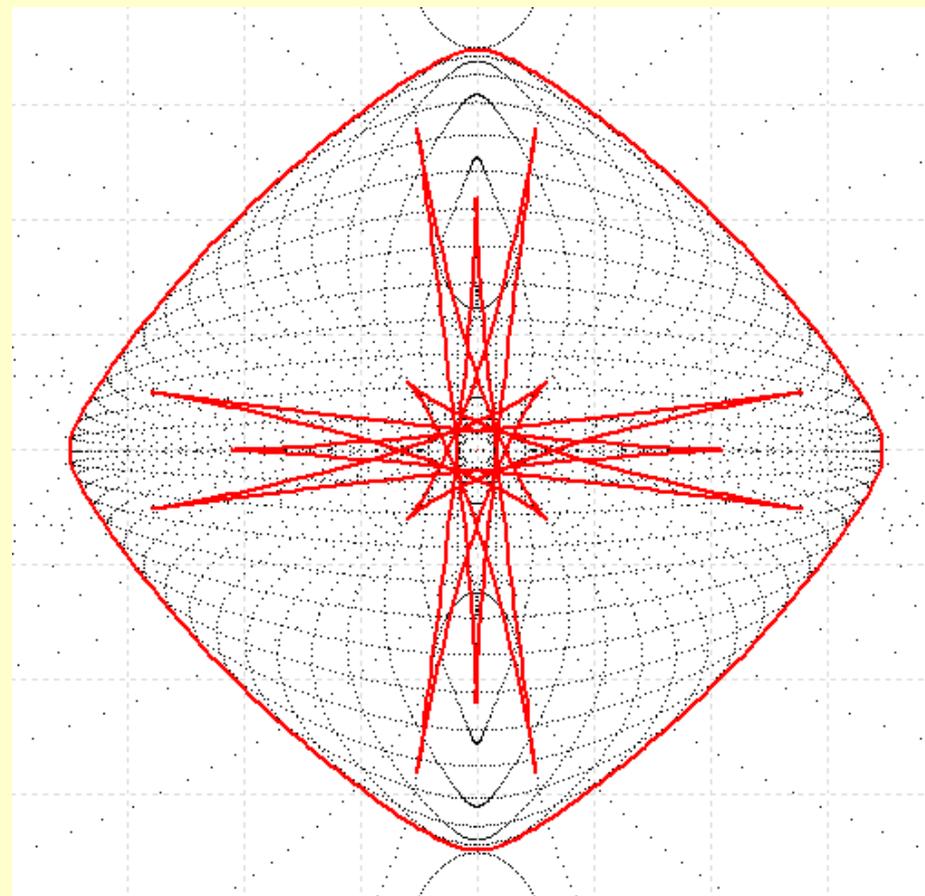
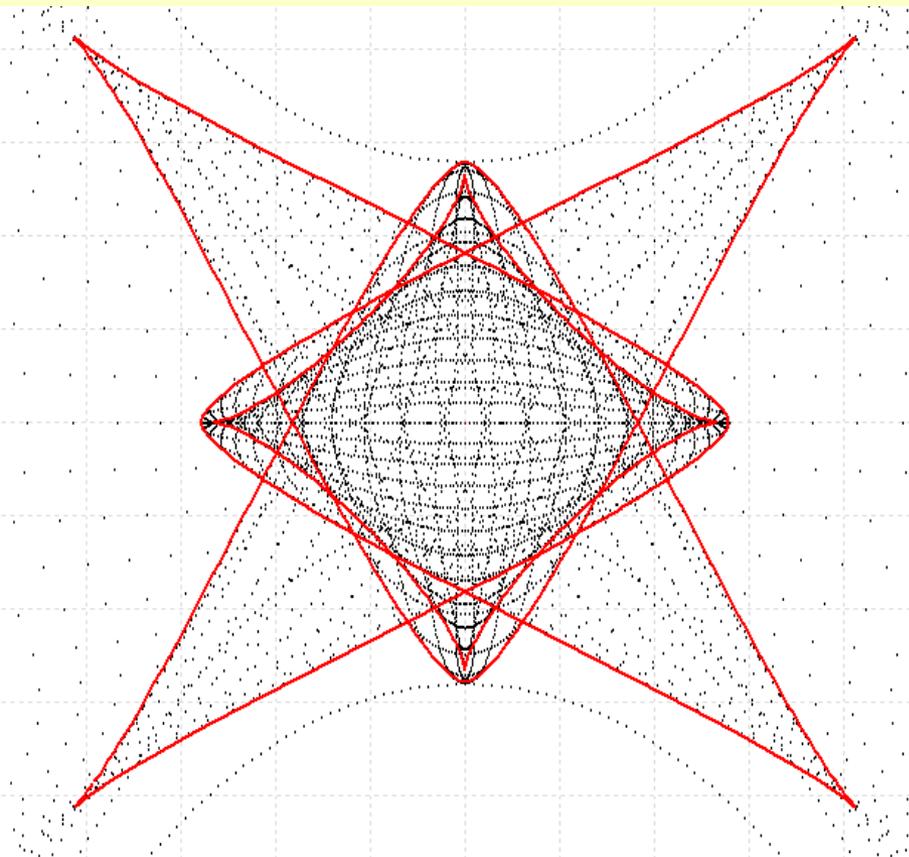
Унимодальная катастрофа X_9



Унимодальная катастрофа J_{10}

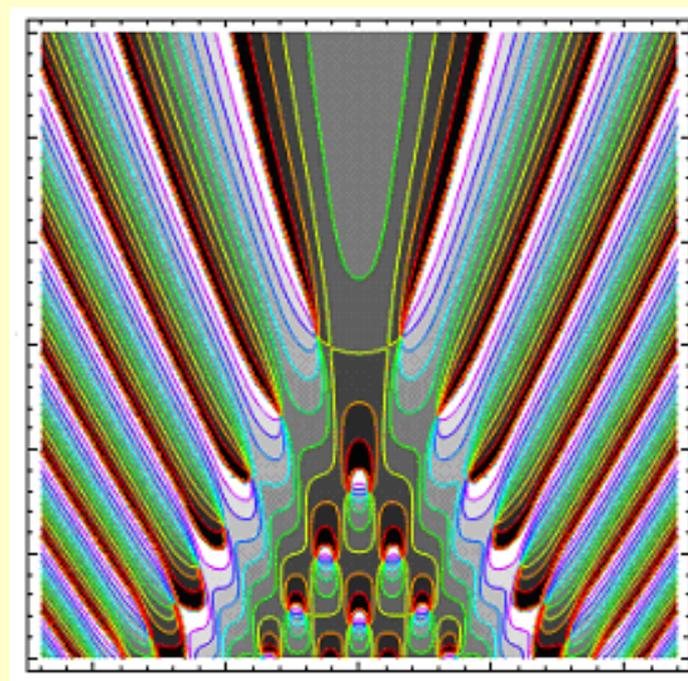
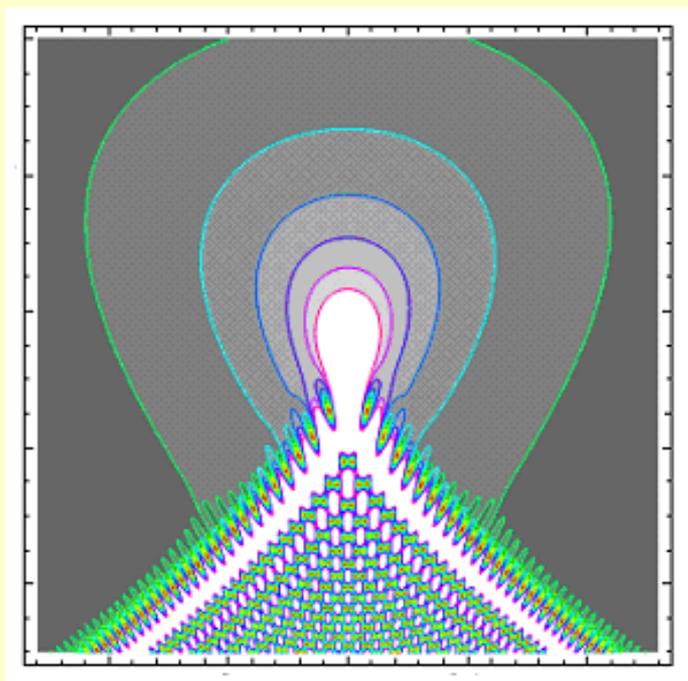


Трёхмодальная катастрофа N_{25}



Поля: фокусировки

Линии равного уровня волновых полей в фокальных областях

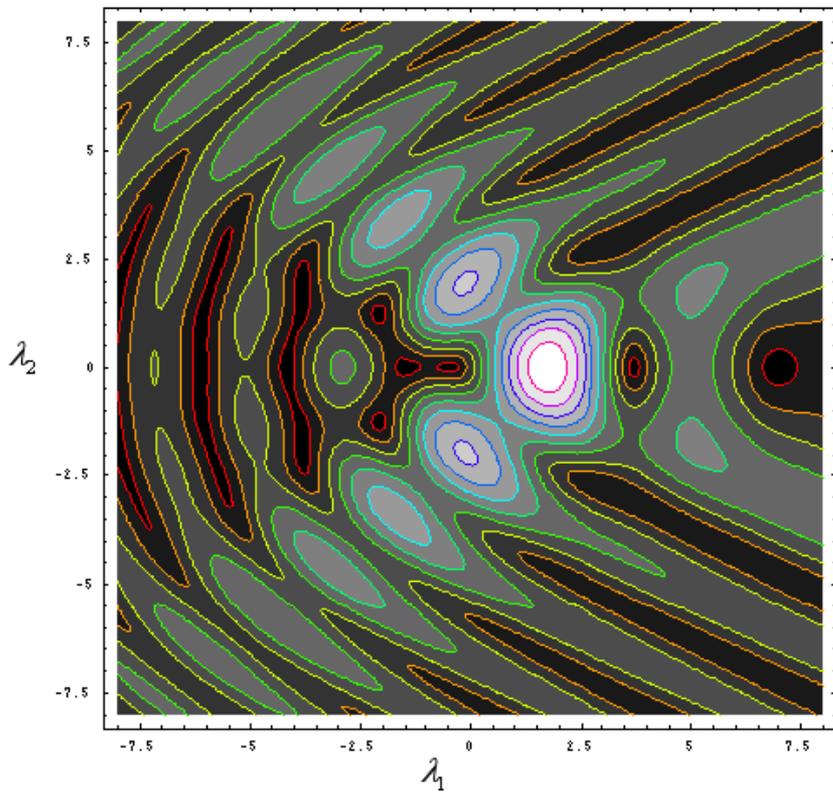


Линии уровня амплитуды поля
катастрофы A_3

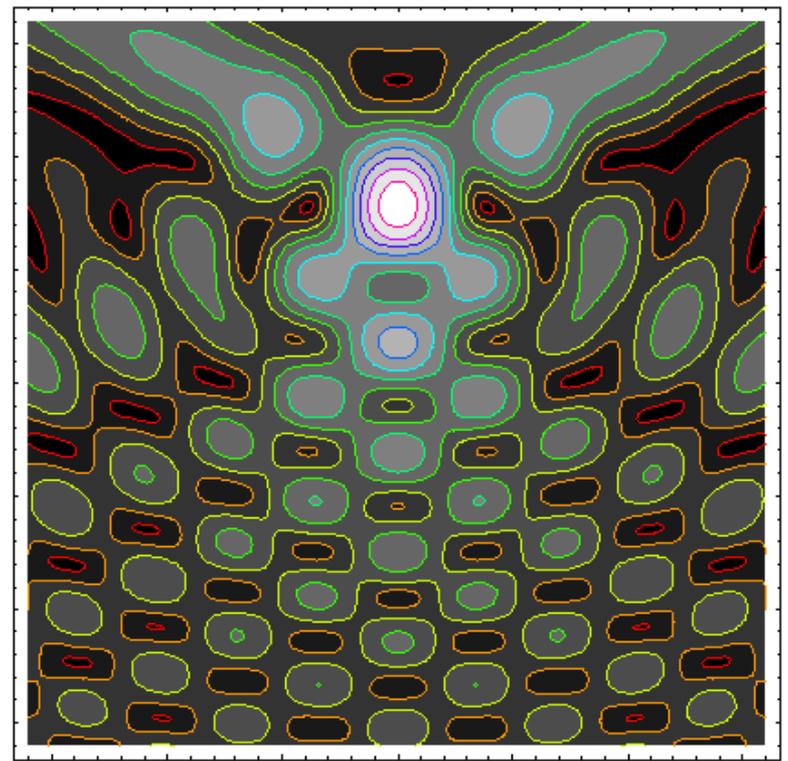
Линии уровня фазы СВК
катастрофы A_3

$$(x^4 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2)$$

Каспоидные фокусировки A_4 («ласточкин хвост») и A_5 («бабочка»).



Линии уровня амплитуды
поля катастрофы A_4

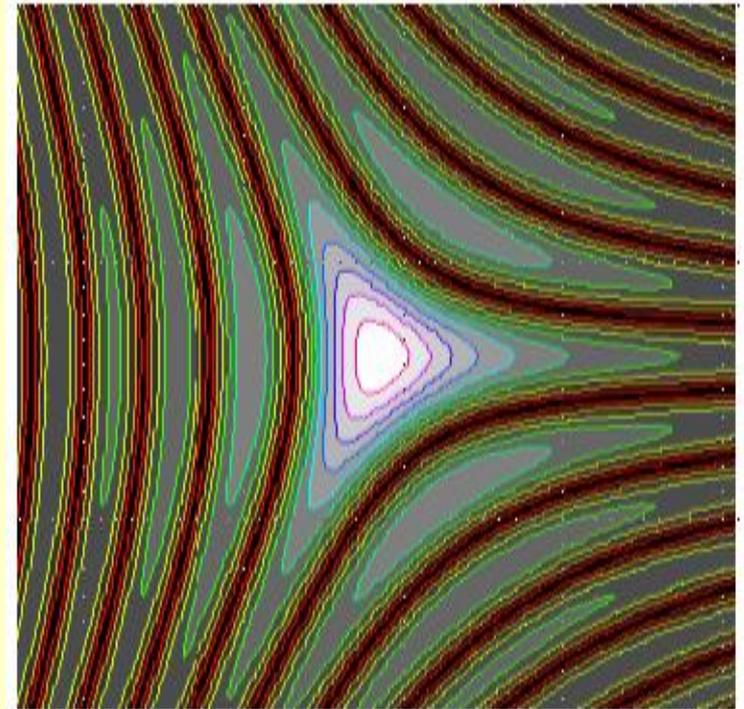
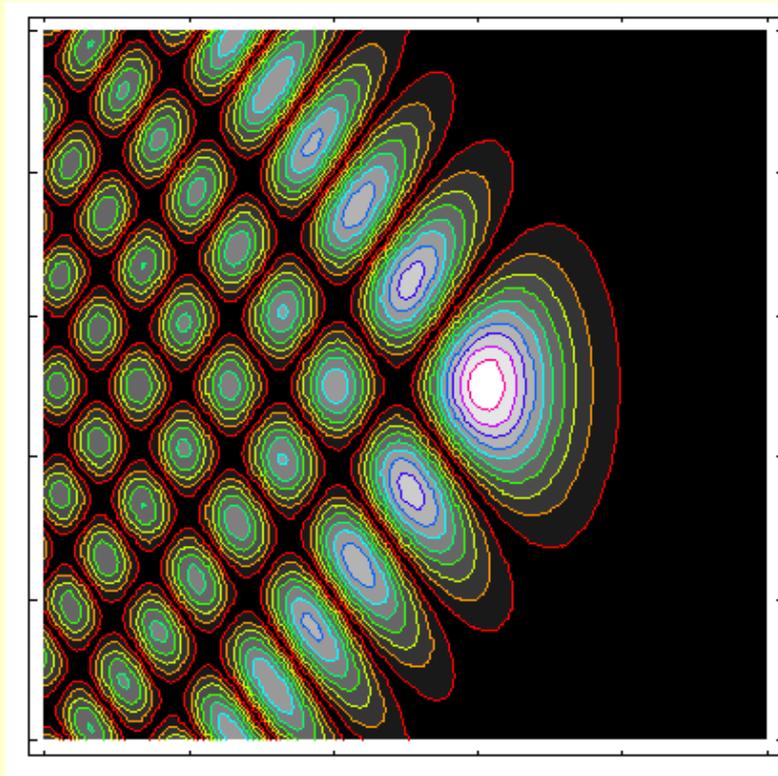


Линии уровня амплитуды
поля катастрофы A_5

Омбилические фокусировки.

Центральные сечения.

D_4^+ («гиперболическая омбилика») и D_4^- («эллиптическая омбилика»).

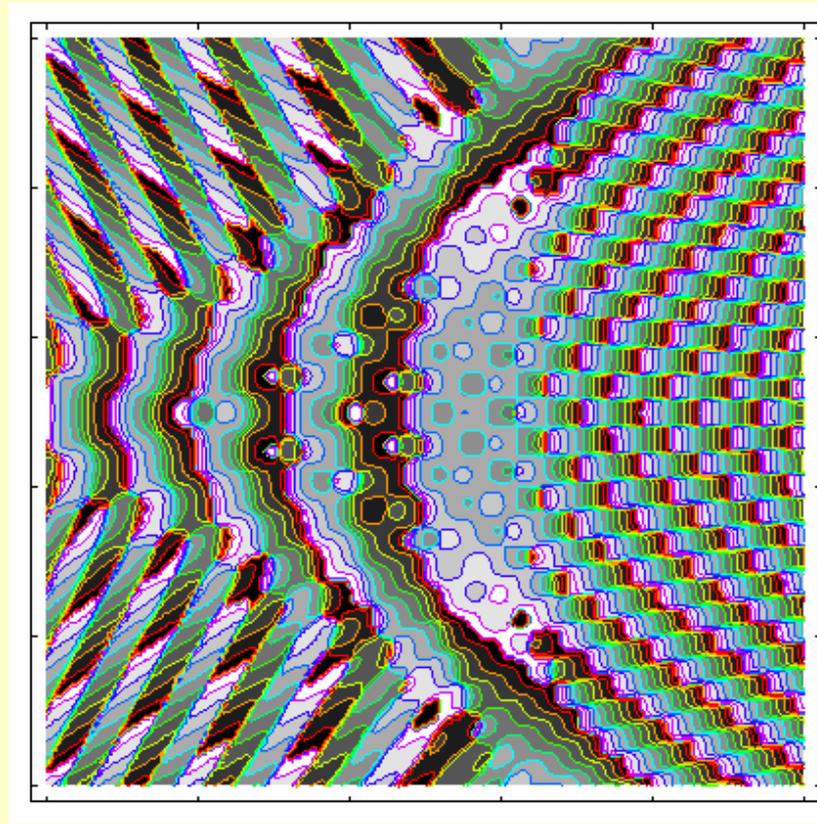
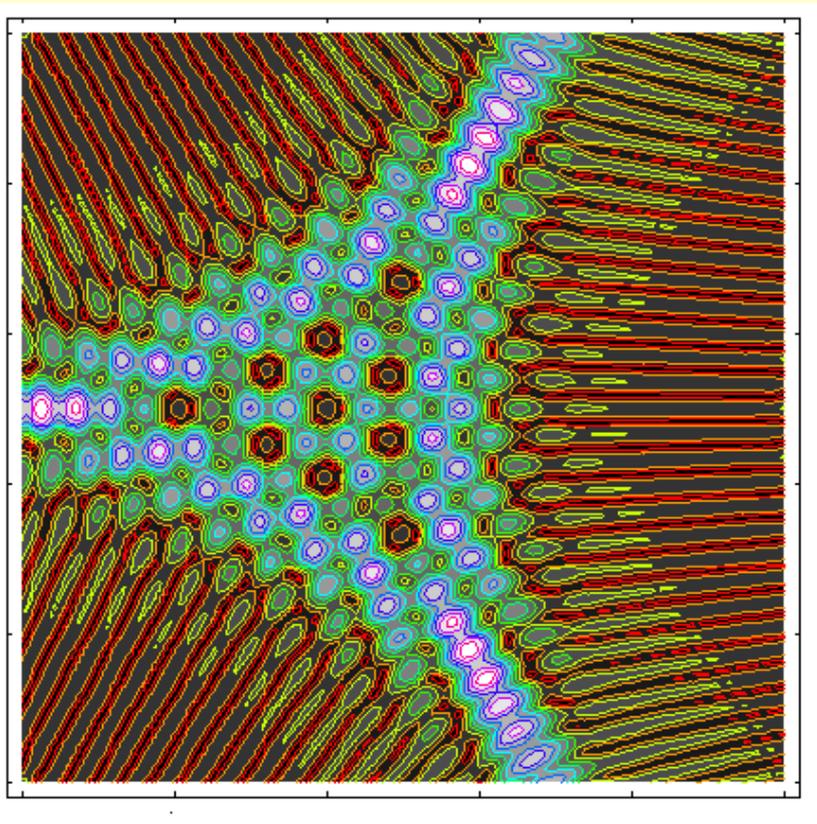


Линии уровня амплитуды
поля катастрофы D_4^+

$$\left(\frac{1}{3}x^3 \pm xy^2 + \lambda_1y + \lambda_2x + \lambda_3y^2 \right)$$

Линии уровня амплитуды
поля катастрофы D_4^-

Эллиптическая омбилика

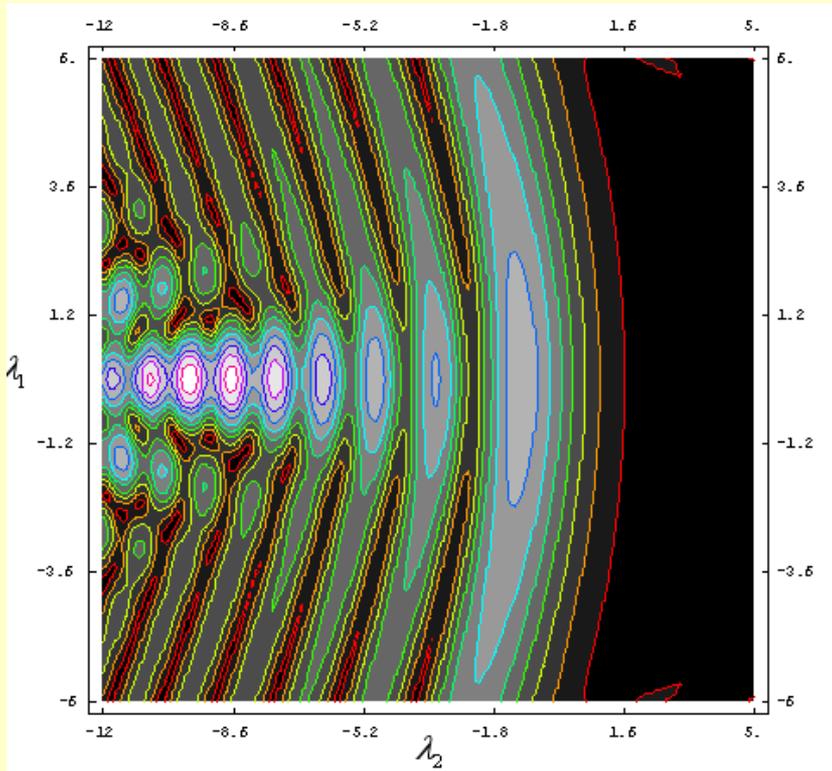


Линии уровня амплитуды
поля катастрофы D_4^-

$$\left(\frac{1}{3}x^3 - xy^2 + \lambda_1 y + \lambda_2 x + \lambda_3 y^2 \right)$$

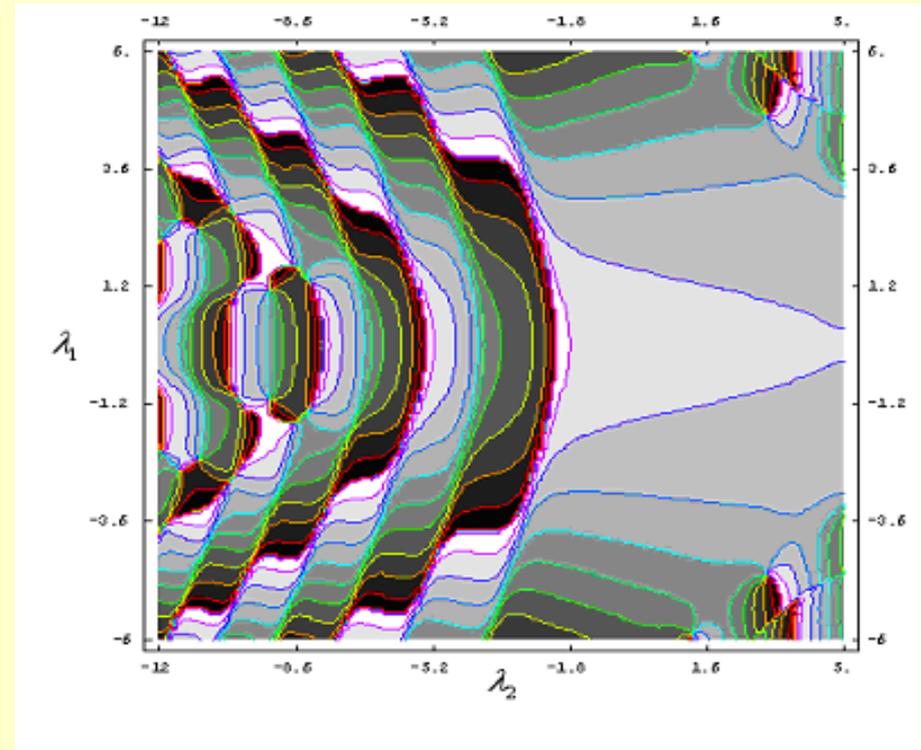
Линии уровня фазы СВК
катастрофы D_4^-

Гиперболическая омбилика



Линии уровня амплитуды
СВК катастрофы D_4^+

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + xy^2 + \lambda_1y + \lambda_2x + \lambda_3y^2 \right)$$



Линии уровня фазы СВК
катастрофы D_4^+

Формирование краевых катастроф

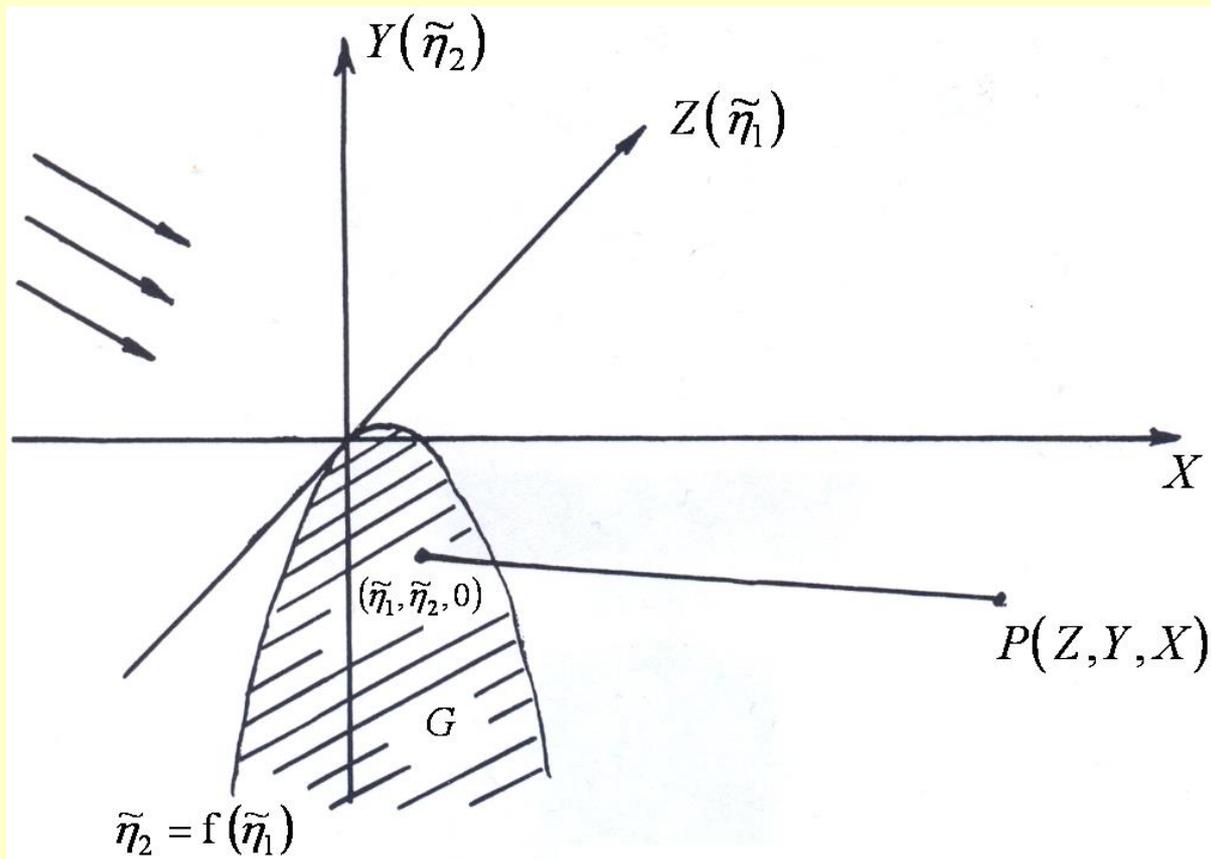


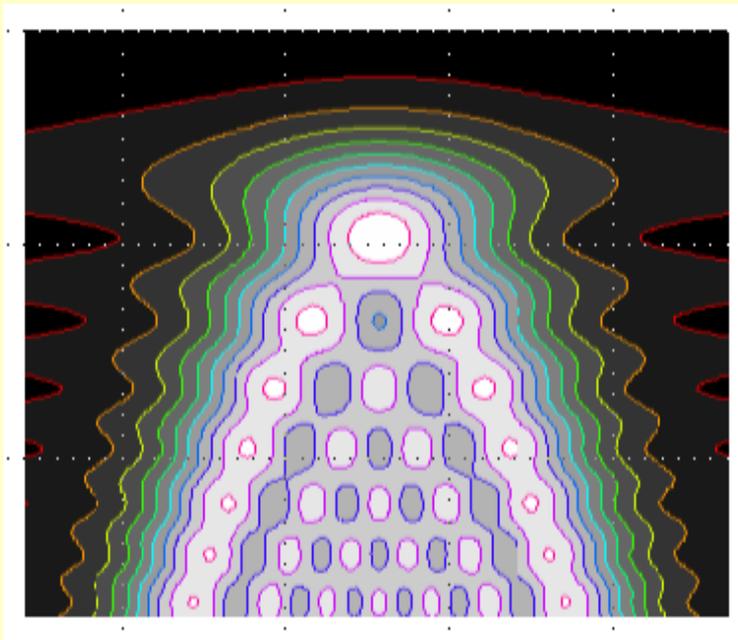
Таблица краевых катастроф

№	Σ	Σ_g	Σ_E	Особый росток	N	L	M	\bar{a}
1	B_2	A_1	A_1	$\pm z^2$	2	2	0	1
2	C_2			$xz \pm x^2$				2
3	B_{N+1}	A_N	A_1	$\pm z^{N+1}$	N+1	N	0	1
4	C_{N+1}	A_1	A_N	$xz \pm x^{N+1}$	N+1	N	0	2
5	F_4	A_2	A_2	$\pm z^2 \pm x^3$	4	3	0	2
6	$K_{4,2}$	A_3	A_3	$z^2 + ax^2z \pm x^4$	6	4	1	2
7	$F_{1,0}$	D_4	A_2	$z^3 + ax^2z \pm x^3$	6	4	1	2
8	L_6	A_2	D_4	$x^3 \pm xw^2 + wz + axz$	6	4	1	3
9	K_8^{**}	A_4	A_4	$x^5 + z + azx^3$	8	6	1	2
10	F_8	E_6	A_2	$z^4 + x^3 + az^3x$	8	6	1	2
11	$E_{6,0}$	A_2	E_6	$w^3 \pm x^4 + azw + zx$	8	6	1	3
12	D_4^2	D_4	D_4	$x^3 \pm xw^2 \pm z^2 + azw^2$	8	6	1	3
13	D_5^1	A_3	D_5	$x^4 \pm xw^2 + zw + azx^2$	8	6	1	3
14	K_8^*	D_5	A_3	$\pm x^4 + z^2x + az^3$	8	6	1	2

Численные результаты:

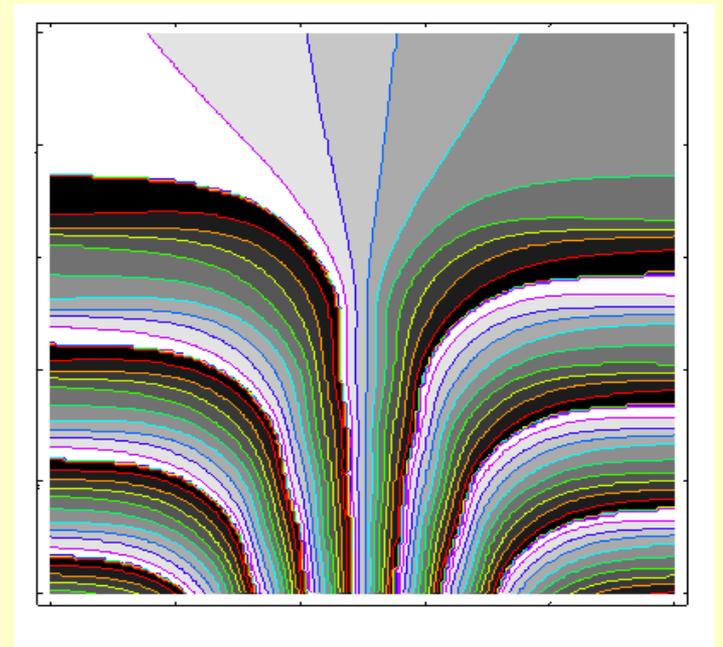
Дифракция: краевая катастрофа C_3^+

Фокусировка краевых лучей типа A_2 , возникающая на фоне более сильного основного ГО поля.



- Рис. 22. Линии уровня амплитуды поля

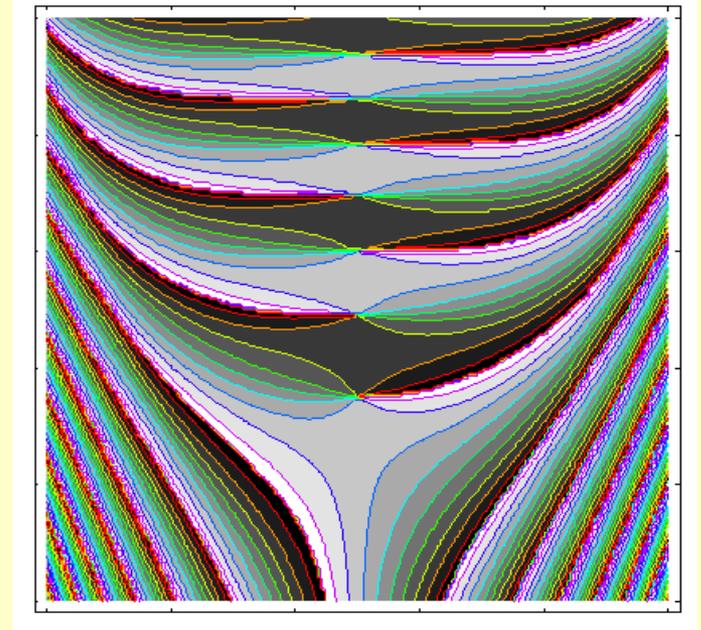
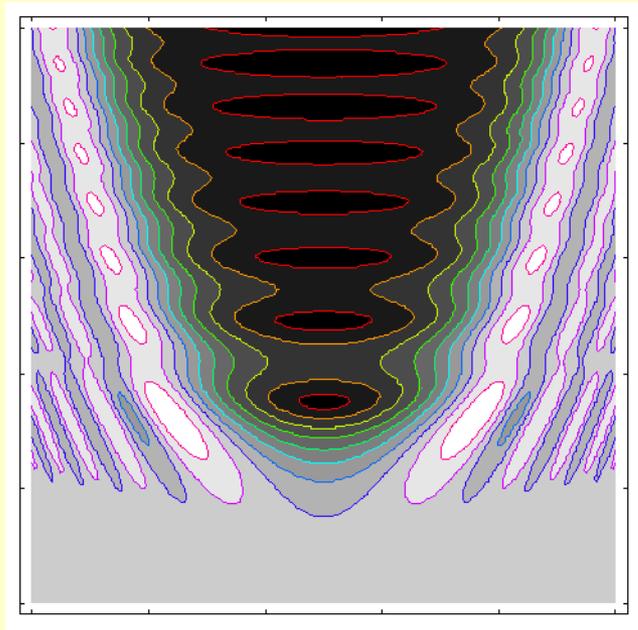
$$(xz + x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2 z)$$



- Рис. 23. Линии уровня фазы СВК

Дифракция: краевая катастрофа C_3^-

Фокусировка краевых лучей типа A_2 , возникающая в области тени



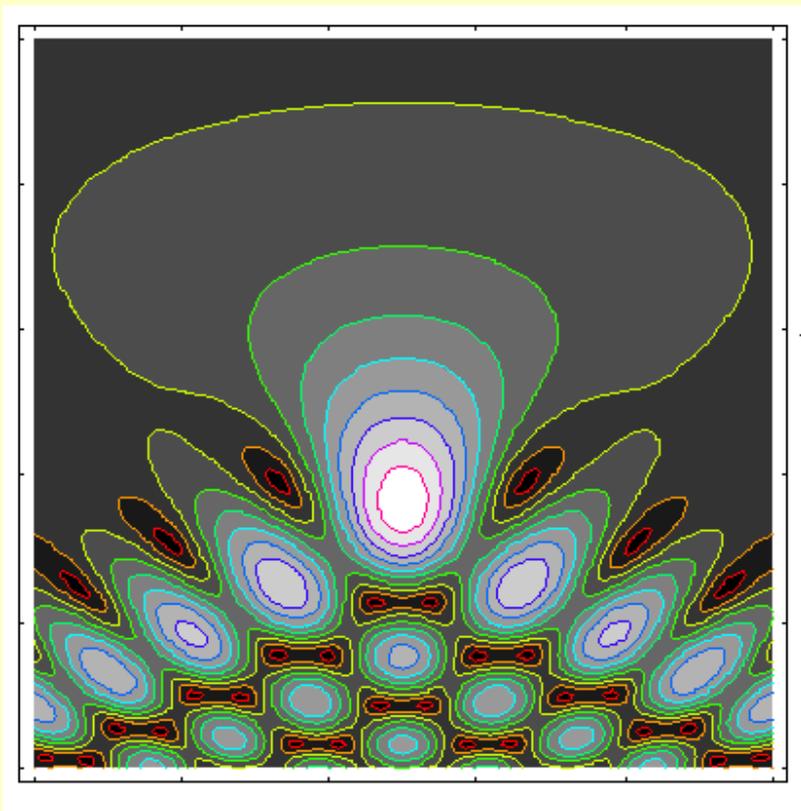
- **Рис. 24.** Линии уровня амплитуды поля

$$(xz - x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2 z)$$

- **Рис. 25.** Линии уровня фазы СВК

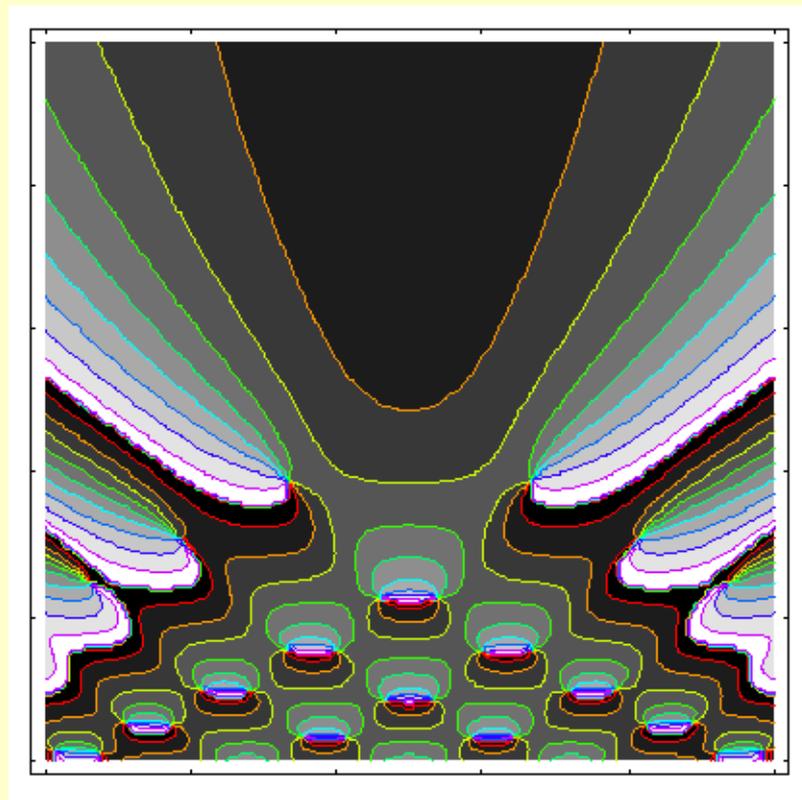
Дифракция : краевая катастрофа

$K_{4,2}$. Совместная фокусировка первичного и вторичного краевых лучей, типа A_3



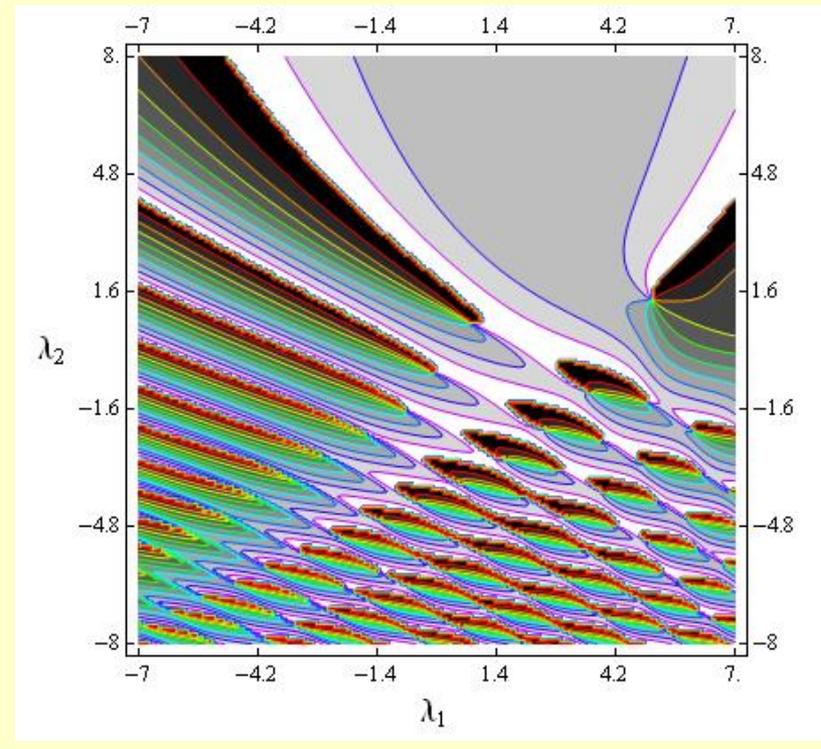
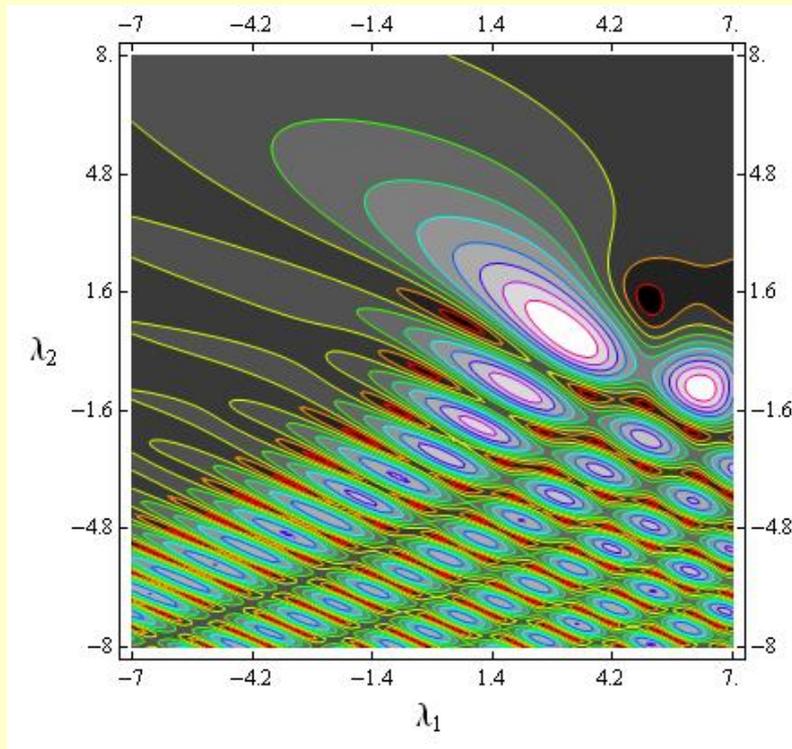
Линии уровня
амплитуды поля

$$\left(\pm z^2 \pm x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 z + \lambda_4 xz \right)$$



Линии уровня
фазы СВК

Краевая катастрофа $K_{4,2}$

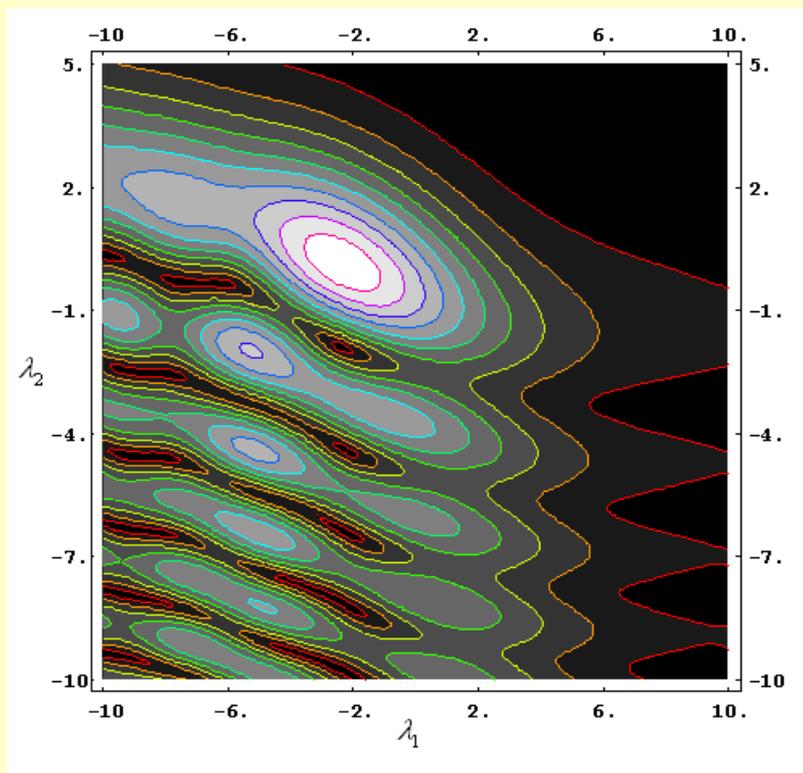


Линии уровня
амплитуды поля

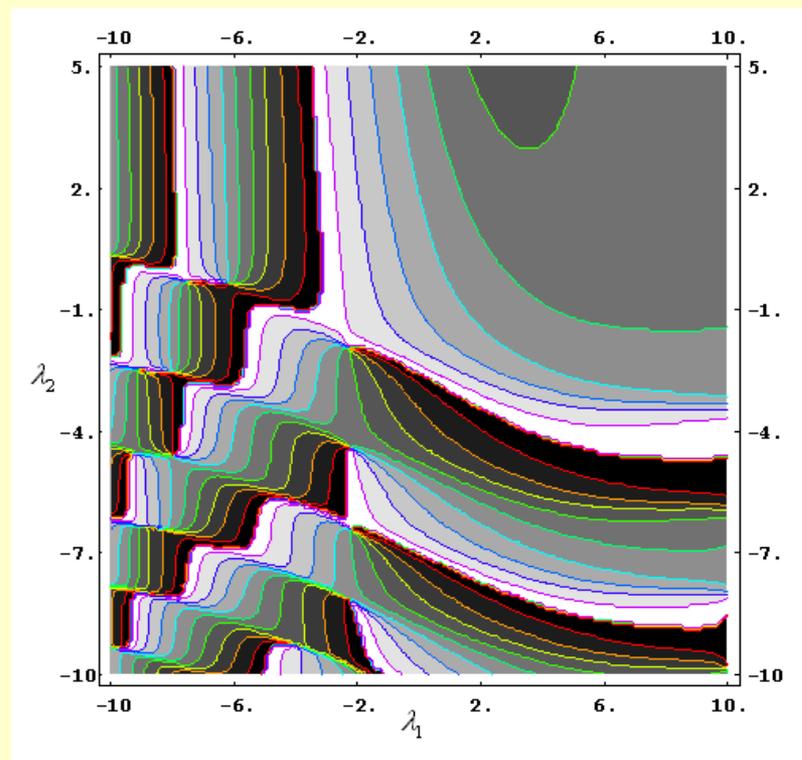
Линии уровня
фазы СВК

$$\lambda_3 = -2 \quad \lambda_4 = -2 \quad a = -1$$

Унимодальная краевая катастрофа $F_{1,0}$



Линии уровня амплитуды СВК



Линии уровня фазы СВК

Формирование угловых катастроф

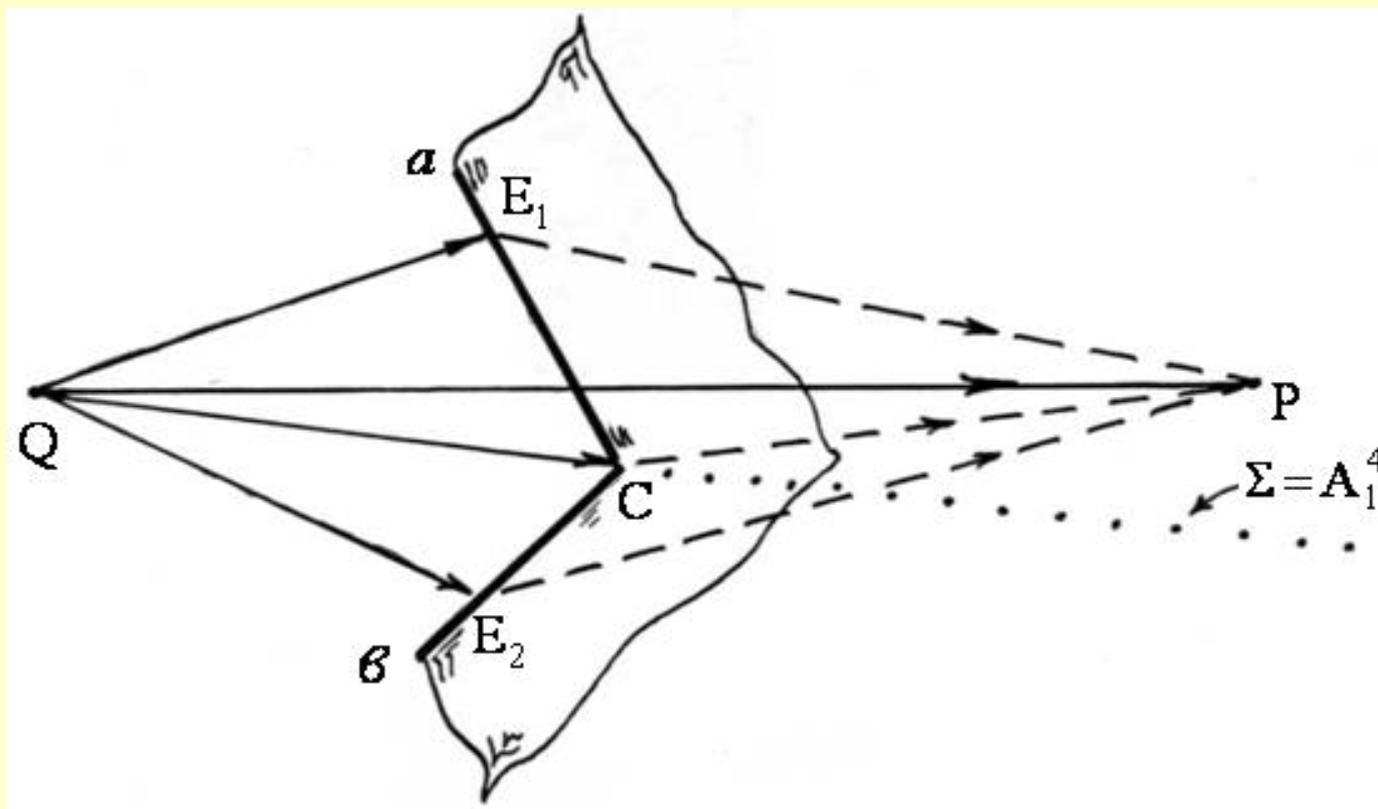
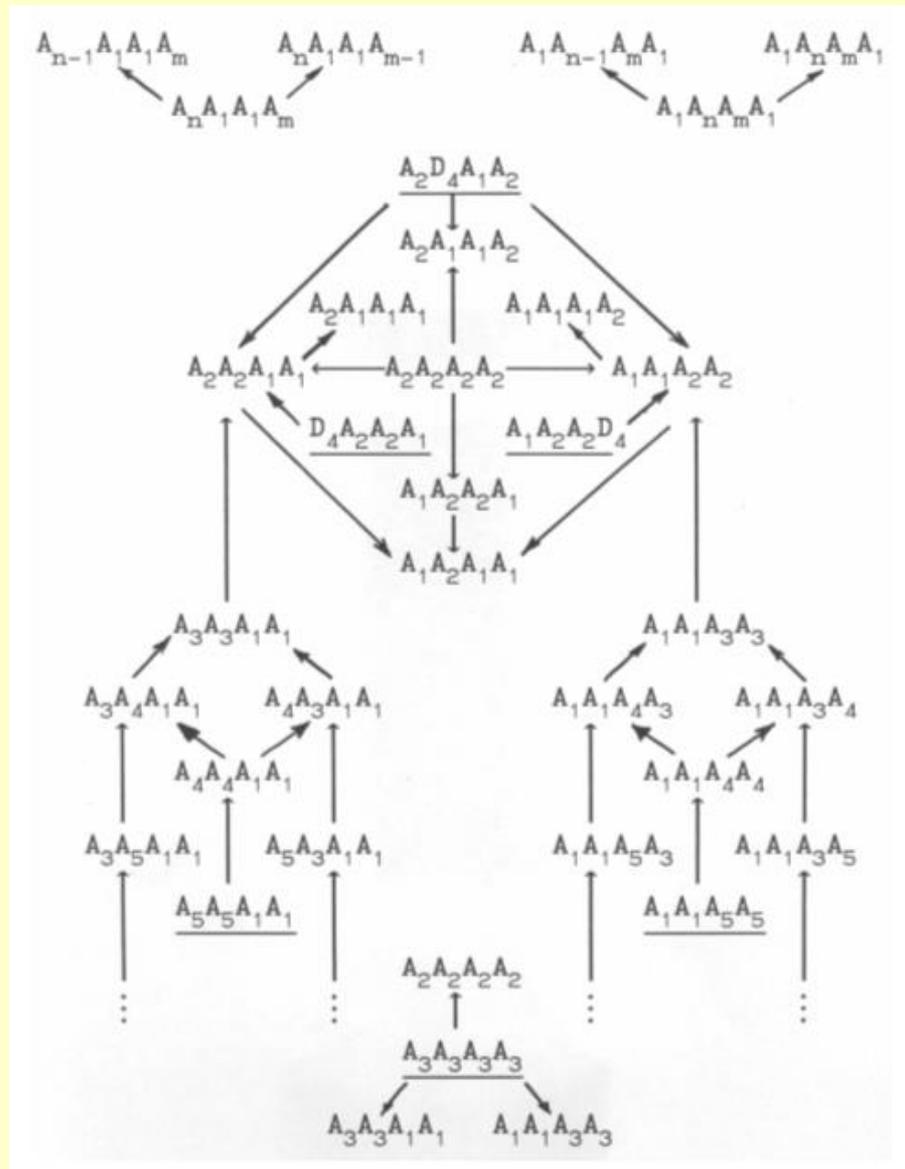


Таблица угловых катастроф

№	Σ				Особый росток φ_0^Σ	N_Σ	L	M	$\bar{\alpha}$
	Σ_g	Σ_{E_1}	Σ_{E_2}	Σ_r					
1.	A_1	A_1	A_1	A_1	$\pm x^2 \pm y^2 \pm z^2 + ayz$	4	2	1	2
2.					$\pm x^2 \pm xy \pm xz + ayz$				3
3.	A_1	A_n	A_m	A_1	$\pm x^2 \pm y^{n+1} \pm z^{m+1} + ayz$	$n + m + 2$	$n + m$	1	2
4.	A_n	A_1	A_1	A_m	$\pm x^{m+1} \pm xy \pm xz + azy^n$	$n + m + 2$	$n + m$	1	3
5.	A_2	A_2	A_1	A_1	$\pm x^2 \pm y^2 \pm z^2 + ayz^2$	6	4	1	2
6.	A_1	A_1	A_2	A_2	$\pm x^3 \pm xy \pm z^2 + ayz$	6	4	1	3
7.	A_3	A_3	A_1	A_1	$\pm x^2 \pm y^4 + a_1zy^2 + a_2zy^3 \pm z^2$	8	5	2	2
8.	A_1	A_1	A_3	A_3	$\pm x^4 + xy \pm z^2 + a_1zy + a_2zx^2$	8	5	2	3
9.	A_2	A_2	A_2	A_2	$\pm x^3 \pm y^2 \pm z^2 + a_1yz + a_2xyz$	8	5	2	3
10.	D_4	A_2	A_2	A_1	$\pm x^2 \pm y^3 \pm z^3 + a_1y^2z + a_2yz^2 + a_3y^2z^2$	9	5	3	2
11.	A_2	A_1	D_4	A_2	$\pm x^3 \pm xy \pm z^3 + a_1xz^2 + a_2yz + a_3yz^2$	9	5	3	3
12.	A_1	A_2	A_2	D_4	$x^3 \pm xw^2 + a_1xz + a_2xy + yw + zw + a_3yz$	9	5	3	4

Схема подчинений угловых катастроф

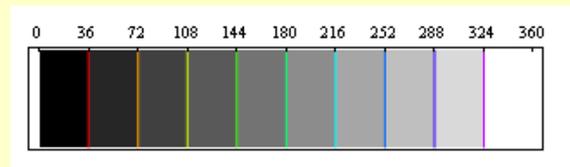
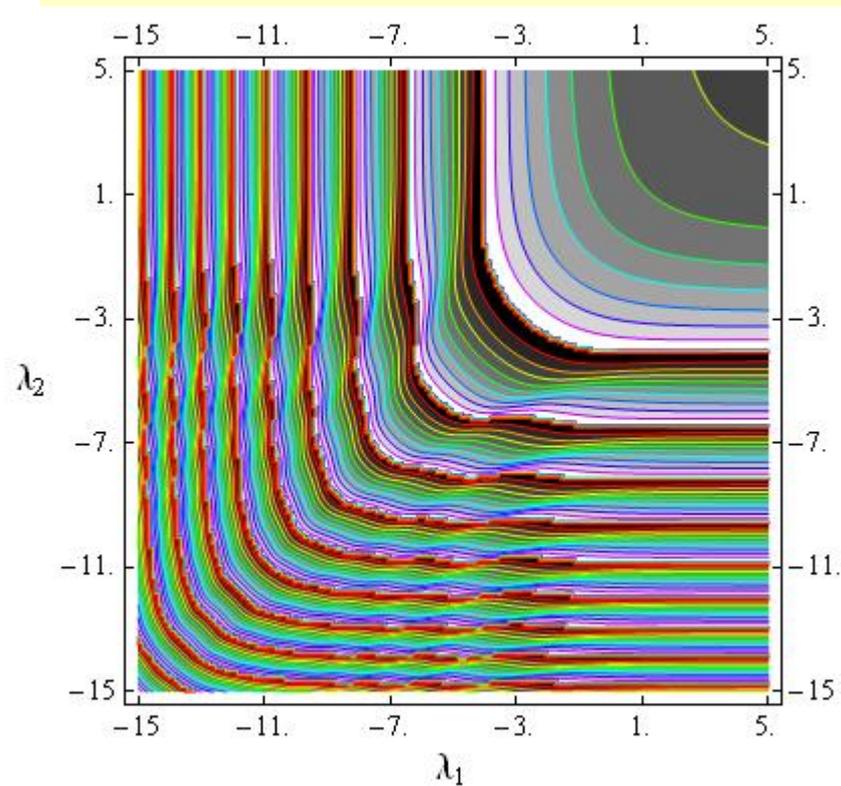
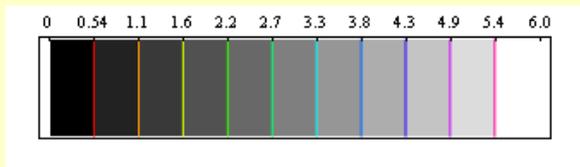
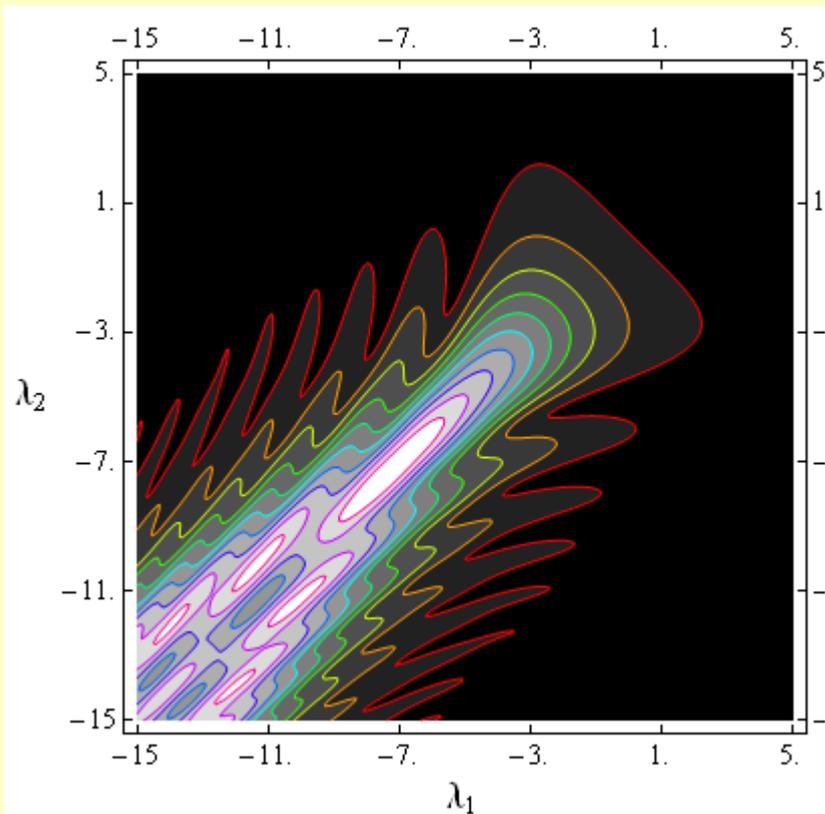


Дифракция: угловые катастрофы.

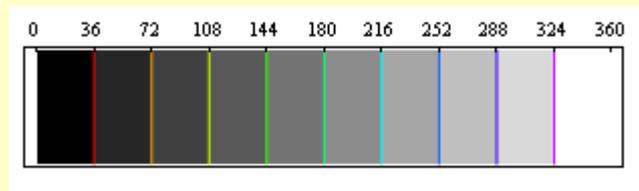
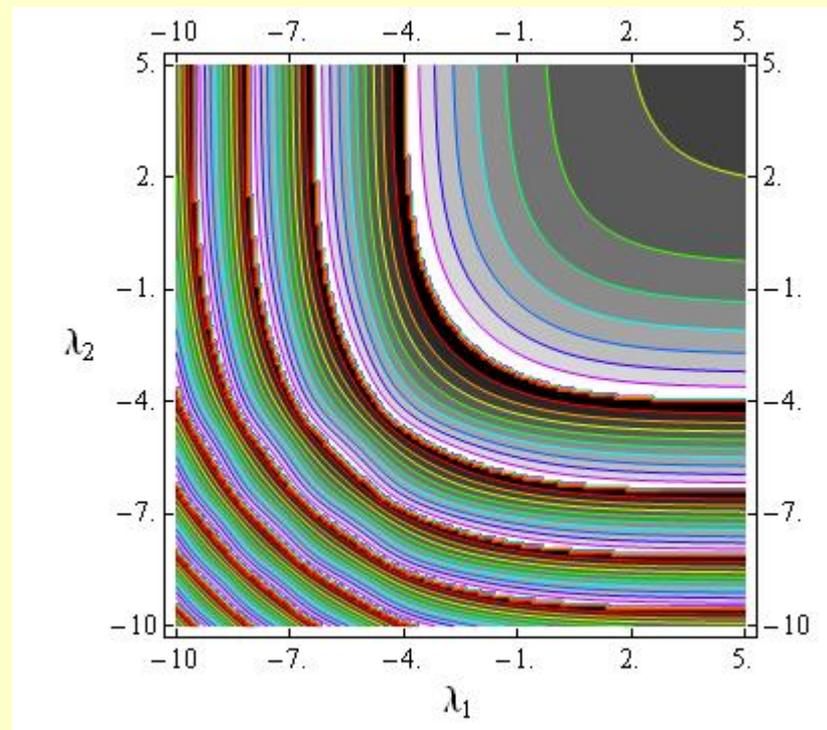
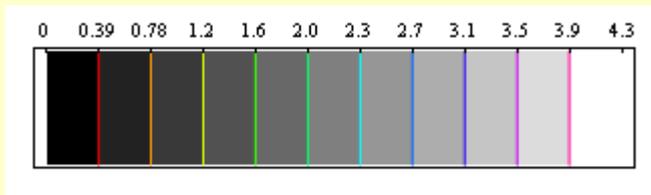
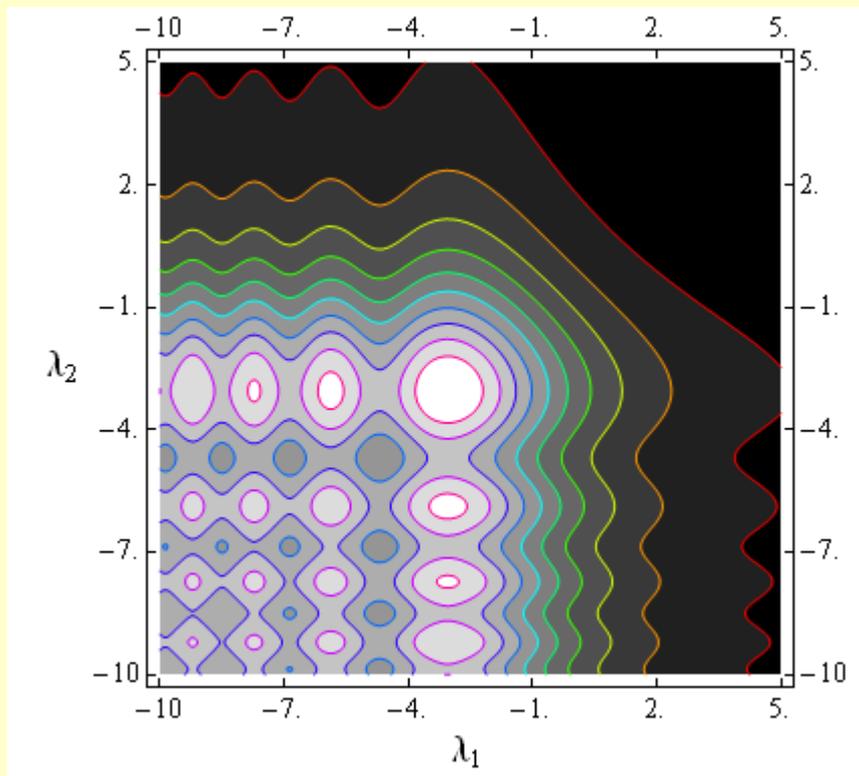
Амплитудно-фазовая структура,
возникающая при дифракции волны на
угловом вырезе и соответствующая
угловой катастрофе A_1^4

$$(x^2 + axy + y^2 + \lambda_1 x + \lambda_2 y; \quad a \approx 2 \cos \varphi)$$

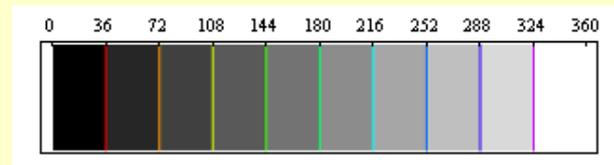
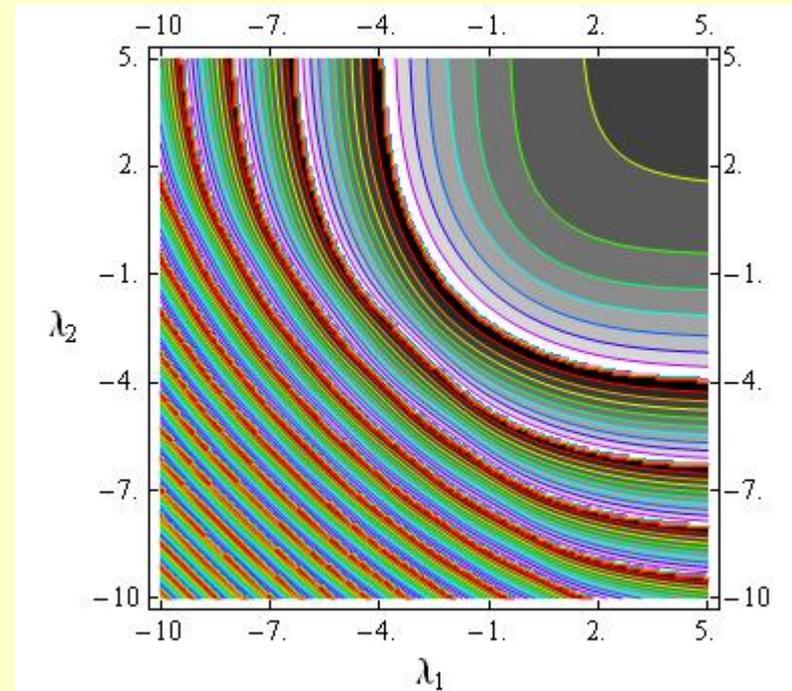
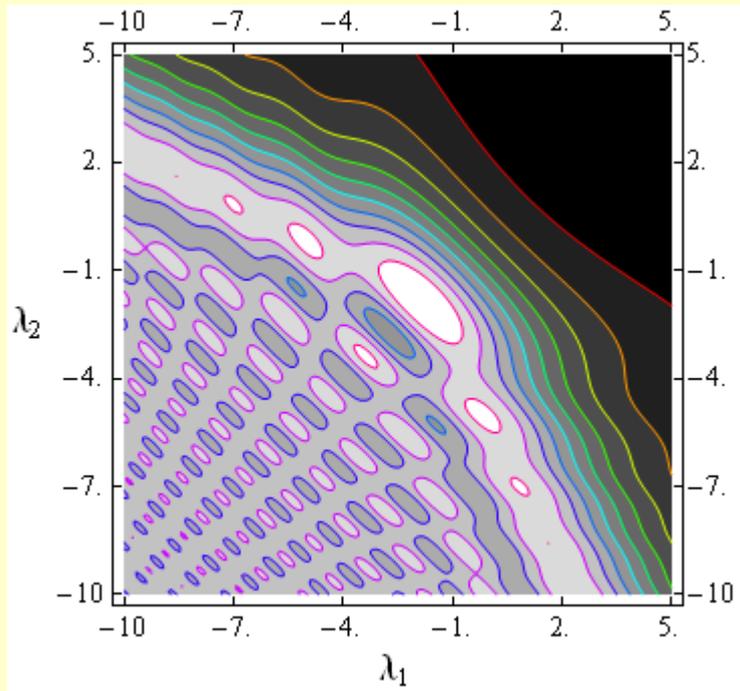
Амплитуда и фаза СВК угловой катастрофы A_1^4 , $\varphi=\pi/4$, $a=\sqrt{2}$



Амплитуда и фаза СВК угловой катастрофы A_1^4 , $\varphi=\pi/2$, $a=0$



Амплитуда и фаза СВК угловой катастрофы A_1^4 , $\varphi=2\pi/3$, $a=-1$



Заключение

- Помимо стационарных задач распространения, дифракции и фокусировки излучения, методы теории волновой катастрофы нашли широкое применение при решении задач о распространении радио и видео импульсов в дисперсионных средах [14-16]. Полученные нами результаты обобщаются в информационной системе "wavecaterosnou.ru" [5].
- Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 18-02-00544-а, №17-02-01183-а).

Литература -1

- Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, часть I. 1982. 304 с.; часть II, 1984. 335 с
- Бова Ю.И., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Моделирование распространения частотно-модулированного сигнала в ионосферной плазме с учетом отклоняющего поглощения и влияния внешнего магнитного поля // Физические основы приборостроения. 2017. Т. 6. № 4 (26). С. 34-45.
- Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Лукин Д.С. Информационная система «Волновые катастрофы в радиофизике, акустике и квантовой механике». // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. Т.12. № 8. С.71-75.
- Ипатов Е. Б., Крюковский А. С., Лукин Д. С., Палкин Е. А. Краевые катастрофы и асимптотики // ДАН СССР. 1986. Т. 291. № 4. С. 823 - 827.
- Казанцев А.Н., Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Метод исследования распространения радиоволн в неоднородной магнитоактивной ионосфере. // Космические исследования, 1967. Т. 5. Вып. 4. С. 593–600.
- Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. М.: РосНОУ, 2013. 368 с.
- Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Равномерные асимптотики интегралов от быстроосциллирующих функций с вырожденными седловыми точками: Препринт / ИРЭ АН СССР. М., 1984. 41 (413). 75 с.

Литература -2

- Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Краевые и угловые катастрофы в задачах дифракции и распространения волн. Казань: Каз. авиационный ин-т, 1988. 199 с.
- Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Равномерные асимптотики и угловые катастрофы.//Доклады РАН. 1995. Т.341. № 4. С. 456-459.
- Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Теория катастроф и её приложения к описанию фокусировки, дифракции и распространения волновых полей. // Труды МФТИ (ГУ), 2009. Т.1. № 2. С. 54 – 71.
- Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Теория пространственной фокусировки видеоимпульсов в диспергирующих средах. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. Т.12. № 8. С.15-25.
- Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. М.: МФТИ, 1982. 159 с.
- Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Применение метода характеристик для численного решения задач распространения радиоволн в неоднородной и нелинейной среде. // Радиотехника и электроника, 1969. Т. 14. № 9. С. 1673–1677.

Литература -3

- Kryukovskii A.S., Lukin D.S. Geometric Diffraction Theory Created by the Methods of Edge and Angle Catastrophes. // Journal of Communications Technology and Electronics. 1998. V. 43. No 9. P. 971-986.
- Kryukovskii A.S., Lukin D.S. Theoretical calculation of reference focal and diffractive electromagnetic fields based on wave catastrophe special functions. // Journal of Communications Technology and Electronics, 2003. V.48. No 8. P. 831-840.
- Kryukovskii A.S., Lukin D.S., Kir'yanova K.S. Method of Extended Bicharacteristic System in Simulating Wave Propagation in Ionospheric Plasma // Journal of Communications Technology and Electronics, 2012. V. 57. No. 9. P. 1039–1045.
- Kryukovskii A.S., Lukin D.S., Palkin E.A., Rastyagaev D.V. Wave catastrophes: Types of focusing in diffraction and propagation of electromagnetic wave // Journal of Communications Technology and Electronics, 2006. V.51. No 10. P. 1087-1125.
- Kryukovskii A.S., Lukin D.S., Rastyagaev D.V. Construction of Uniform Asymptotic Solutions of Wave-Type Differential Equations by Methods of Catastrophe Theory // Russian Journal of Mathematical Physics, 2009. V. 16. No. 2. P. 232-245.

Литература -4

- Kryukovskii A.S., Lukin D.S., Rastyagaev D.V., Skvortsova Y.I. Mathematical simulation of propagation of frequency-modulated radio waves in ionospheric plasma. // Journal of Communications Technology and Electronics, 2015. T. 60. № 10. С. 1049-1057.
- Kryukovskii A.S., Orlov A.V. Singularities of ray and caustic structures of electromagnetic waves in metamaterials. // Journal of Communications Technology and Electronics, 2010. V.55. No 3. P. 270-277.
- Kryukovsky A.S., Lukin D.S., Palkin E.A. Uniform Asymptotics for Evaluating Oscillatory Edge Integrals by Methods of Catastrophe Theory // Soviet J. Numer. Anal. Math. Modelling, 1987. V. 2. No 4. P. 279-312.
- Kryukovsky A.S., Rastyagaev, D.V., Vergizaev I.A. Three-Dimensional Space-Time Focusing of Catastrophe Wave Fields. // Journal of Communications Technology and Electronics. 1999. V. 44. No 4. P. 423-430.

Спасибо за внимание!

