

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТРУКТУРА МЕДЛЕННОГО МАГНИТНОГО ЗВУКА В ОДНОМЕРНО-НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ КОНЕЧНОГО ДАВЛЕНИЯ С КРИВЫМИ СИЛОВЫМИ ЛИНИЯМИ

¹А.В. Петрашук, ^{1,2}Д.Ю. Климушкин

¹Институт солнечно земной физики СО РАН, Иркутск, Россия
av.petrashchuk@mail.ru

²Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия

SPATIAL STRUCTURE OF SLOW MAGNETOSONIC WAVES IN ONE-DIMENSIONAL INHOMOGENEOUS FINITE-PRESSURE PLASMA WITH CURVED FIELD LINES

¹A.V. Petraschuk, ^{1,2}D.Yu. Klimushkin

¹Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS, Irkutsk, Russia
av.petrashchuk@mail.ru

²Irkutsk State University, Irkutsk, Russia

Аннотация. Изучено распространение ультра-низкочастотных (УНЧ) волн в одномерно-неоднородной плазме конечного давления с кривыми силовыми линиями. Предполагается, что волны обладают азимутальной мелкомасштабностью. В этом случае имеется две моды: альфвеновская и медленный магнитный звук (ММЗ). Получено дифференциальное уравнение, описывающее поперечную структуру волнового поля. Исследован характер особенностей на магнитной поверхности ММЗ резонанса. Определены области прозрачности волн.

Ключевые слова: УНЧ-волны, цилиндрическая модель магнитосферы, МГД-резонансы.

Abstract. Propagation of the ultra-low-frequency (ULF) in the one-dimensionally inhomogeneous finite pressure plasma with curved field lines was studied. The waves are supposed to be azimuthally small scale. In that case, there are two MHD wave branches, the Alfvén and the slow magnetosonic (SMS) modes. An ordinary differential equation for the spatial structure of the wave field was derived. The character of the singularity on the surface of the SMS resonance was studied. The wave transparent regions are determined.

Keywords: ULF-waves, cylinder model of the magnetosphere, ULF-resonances.

ВВЕДЕНИЕ

Ультра-низкочастотные (УНЧ) волны с большими азимутальными волновыми числами m наблюдаются в приэкваториальных областях магнитосферы, характеризующихся достаточно высоким плазменным давлением и значительной кривизной силовых линий [Агапитов, Черемных, 2011]. Эти волны генерируются благодаря инъекции в плазму высокоэнергичных частиц. Азимутально-мелкомасштабные волны исследуются с помощью радаров и спутников.

Разработка математических моделей таких волн является актуальной задачей физики космической плазмы, поскольку они могут отвечать за ускорение заряженных частиц в магнитосфере и служить триггерами суббурь.

Так как, теоретические методы исследования двумерно-неоднородной модели [Klimushkin, 1998] разработаны еще недостаточно. Для решения этих проблем в статьях [Черемных и др., 2014] была рассмотрена цилиндрическая модель магнитосферы, где учитывается неоднородность поперек магнитных поверхностей. Однако в работах [Черемных и др., 2014] не была исследована пространственная структура ММЗ.

1. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим одномерно-неоднородную цилиндрическую модель магнитосферы [Черемных и др., 2014], в которой силовые линии магнитного поля являются концентрическими окружностями и все равновесные параметры зависят от радиальной координаты r (рисунок). Координата y , направленная вдоль

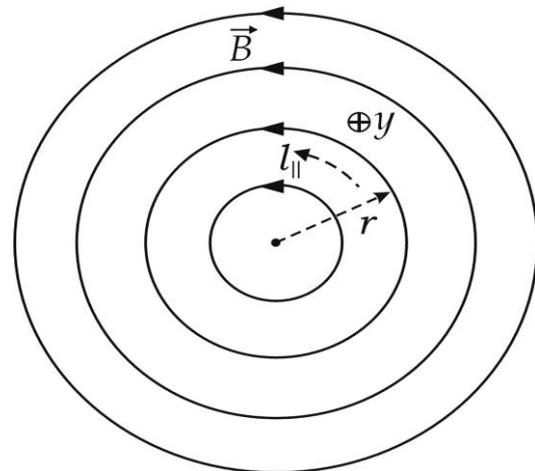


Рис. Одномерно-неоднородная цилиндрическая модель

вдоль оси и играет роль азимутальной координаты в магнитосфере. Магнитное поле $B_0=(0, B_{0φ}, 0)$ и плазменное давление $P_0(r)$ удовлетворяют условию равновесия

$$\frac{d}{dr} \left(P_0 + \frac{B_0^2}{8\pi} \right) = -\frac{B_0^2}{4\pi r}. \tag{1}$$

Рассмотрим плоскую волну с частотой ω . Ввиду однородности по координатам ϕ и y общее уравнение [Черемных и др., 2014], описывающее поперечную структуру альфвеновских, быстрых (БМЗ) и медленных (ММЗ) магнитозвуковых волн будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \times \\ & \times \left(\left(\mathfrak{G}_A^2 + \mathfrak{G}_C^2 \right) \frac{(\omega^2 - \omega_A^2)(\omega^2 - \omega_C^2)}{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)} \rho_0 \frac{d}{dr} (r \mathfrak{G}_{1r}) \right) - \\ & - 2 \frac{\mathfrak{G}_{1r}}{r} \frac{d}{dr} \left(\rho_0 \mathfrak{G}_A^2 \frac{(\omega^2 - \omega_A^2)(\omega^2 - \omega_S^2)}{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)} \right) + \\ & + \rho_0 (\omega^2 - \omega_A^2) \mathfrak{G}_{1r} - 2 P_0 \chi_c \chi_p \mathfrak{G}_{1r} + \\ & = 4 \frac{\chi_c^2 \omega^2 \rho_0 k_y^2 \mathfrak{G}_A^2 \mathfrak{G}_S^2 \mathfrak{G}_{1r}}{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

здесь $\chi_c(r) = -1/r$ — кривизна силовых линий, $\chi_p(r) = -P^{-1} \frac{d}{dr} P_0$ — радиальный масштаб изменения давления, ρ_0 и $\vec{\mathfrak{G}}_1 = (\mathfrak{G}_{1r}, \mathfrak{G}_{1\phi}, \mathfrak{G}_{1y})$ — плотность и скорость плазмы, а $\mathfrak{G}_A = B_0 / 4\pi \rho_0$, $\mathfrak{G}_S = \sqrt{\gamma P_0 / \rho_0}$ и $\mathfrak{G}_C = \mathfrak{G}_A \mathfrak{G}_S / \sqrt{\mathfrak{G}_A^2 + \mathfrak{G}_C^2}$ — альфвеновская, звуковая и медленная магнитозвуковая скорости, $\omega_A(r) = \mathfrak{G}_A k_1$, $\omega_S(r) = \mathfrak{G}_S k_1$ и $\omega_C(r) = \mathfrak{G}_C k_1$,

$$\begin{aligned} \omega_{\pm}^2 &= \frac{(\mathfrak{G}_A^2 + \mathfrak{G}_C^2)(k_x^2 + k_y^2)}{2} \times \\ & \times \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4k_x^2 \mathfrak{G}_A^2 \mathfrak{G}_C^2}{(\mathfrak{G}_A^2 + \mathfrak{G}_C^2)(k_x^2 + k_y^2)}} \right), \end{aligned}$$

частоты ω_A и ω_S соответствуют альфвеновскому и ММЗ-резонансам, частоты ω_{\pm} — точкам отсечки (отражения) БМЗ и ММЗ, соответственно. Величину k_1 и k_y можно считать продольной и азимутальной составляющей волнового вектора.

2. АЗИМУТАЛЬНО-МЕЛКОМАСШТАБНЫЕ ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В азимутально-мелкомасштабном приближении $k_y \gg k_1$ частота волны меньше частоты БМЗ: $\omega_+ \gg \omega$. Поэтому уравнение (2) сводится к виду

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left(\frac{(\omega^2 - \omega_A^2)(\omega^2 - \omega_C^2)}{\omega^2 - \omega_-^2} \rho_0 \frac{d}{dr} (r \mathfrak{G}_{1r}) \right) - \\ & - \frac{2}{r} \frac{\mathfrak{G}_A^2}{\mathfrak{G}_A^2 + \mathfrak{G}_C^2} \mathfrak{G}_{1r} \frac{d}{dr} \left(\rho_0 \frac{(\omega^2 - \omega_A^2)(\omega^2 - \omega_S^2)}{\omega^2 - \omega_-^2} \right) + \\ & + k_y^2 \frac{(\omega^2 - \omega_A^2)(\omega^2 - \omega_S^2)}{\omega^2 - \omega_-^2} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\omega_{1,2}$:

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &= \frac{1}{2} \left[(\omega_p^2 + \omega_-^2 + 4\mathfrak{G}_C^2 \chi_c^2) \pm \right. \\ & \left. \pm \sqrt{(\omega_p^2 + \omega_-^2)^2 + 8(\omega_p^2 + \omega_-^2)^2 \mathfrak{G}_C^2 \chi_c^2 + 16\mathfrak{G}_C^4 \chi_c^4} \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где $\omega_p^2 = \omega_A^2 + \frac{2P_0}{\rho_0} \chi_c \chi_p$.

Рассмотрим решение (3) уравнения в ВКБ-приближении. Тогда квадрат радиальной компоненты волнового вектора определяется из соотношения

$$k_r^2(r, \omega) = -k_y^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_1^2(r)}{\omega^2 - \omega_A^2(r)} \right) \left(\frac{\omega^2 - \omega_2^2(r)}{\omega^2 - \omega_C^2(r)} \right) \quad (5)$$

При выполнении

$$\omega = \omega_1(r), \omega = \omega_2(r), \quad (6)$$

функция $k_r^2(r, \omega) = 0$. Это означает, что функции $\omega_1(r)$, и $\omega_2(r)$, имеют смысл частот отсечек. Координаты $r_1(\omega)$ и $r_2(\omega)$, являющиеся решениями уравнений (6), будем называть точками отсечек ММЗ и альфвеновской мод, соответственно. Из формулы (5) также видно, что в точках

$$\omega = \omega_A(r), \omega = \omega_C(r), \quad (7)$$

Функция $k_r^2(r, \omega) = \infty$. Соответственно, точки $r_A(\omega)$ и $r_C(\omega)$, можно назвать точками альфвеновского и ММЗ резонанса.

В окрестности точки ММЗ-резонанса r_C :

$$|\omega - \omega| \ll |\omega - \omega_-|, |\omega - \omega_1|.$$

Тогда вблизи точки $r \approx r_C$ функцию $\omega_C(r)$ можно разложить в ряд

$$\omega^2 - \omega_C^2(r) \approx -(\omega_C^2[r']) (r - r_C) = \omega_C^2(r - r_C) / l_c.$$

Отсюда уравнение (3):

$$\frac{d}{dr} (r - r_C) \frac{d}{dr} \mathfrak{G}_{1r} - \lambda_c^{-1} \mathfrak{G}_{1r} = 0, \quad (8)$$

где $\lambda_c^{-1} = k_y^2 l_c (\omega_C^2 - \omega_1^2) / \omega^2$. Решение этого уравнения имеет вид

$$\mathfrak{G}_{1r} = \tilde{\mathfrak{G}}_1 K_0 \left(\sqrt{\lambda_c^{-1} [r - r_C]} \right) + \tilde{\mathfrak{G}}_2 I_0 \left(\sqrt{\lambda_c^{-1} [r - r_C]} \right),$$

где $K_0(z)$ и $I_0(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

Когда $|r - r_C| \ll \lambda_c$, решение (9) имеет логарифмическую особенность:

$$\mathfrak{G}_{1r} \propto \ln \sqrt{\lambda_c^{-1} [r - r_C]}, \quad (10)$$

Рассмотрим структуру волнового поля вблизи области распространения ММЗ волны — точки отсечки r_1 . Для этого положим в уравнении (3) $|\omega - \omega_1| \ll |\omega - \omega_1|, |\omega - \omega_C|$. Тогда в окрестности точки $r \approx r_1$, $\omega^2 - \omega_1^2(r) \approx -(\omega_1^2[r'])' (r - r_1) = \omega_1^2(r - r_1) l_1$ уравнение (3) может быть преобразовано к виду

$$\frac{d^2}{dr^2} \mathfrak{G}_{1r} + \lambda_1^{-3} (r - r_1) \mathfrak{G}_{1r} = 0, \quad (11)$$

где $\lambda_1^{-3} = k_y^2 \omega_1^2 / l_1 (\omega_C^2 - \omega_1^2)$. Решение (11):

$$\mathfrak{G}_{1r} = \alpha A i(\lambda_1^{-1} [r - r_1]) + b B i(\lambda_1^{-1} [r - r_1]). \quad (12)$$

Здесь a и b — постоянные Ai и Bi — функция Эйри первого и второго рода.

Наконец, рассмотрим решение вблизи точки r_- — являющиеся решением уравнения $\omega = \omega_-(r)$. Вблизи этой точки, когда $|\omega - \omega_-| \gg |\omega - \omega_1|, |\omega - \omega_c|$, уравнение (3) сводится к виду

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{r - r_-} \frac{d}{dr} \mathfrak{G}_{1r} - \frac{\lambda_-^{-1}}{(r - r_1)^2} \mathfrak{G}_{1r} = 0, \quad (13)$$

где

$$\lambda_-^{-1} = \frac{2}{r} \frac{\mathfrak{G}_A^2}{\mathfrak{G}_A^2 + \mathfrak{G}_c^2} \frac{\omega_-^2 - \omega_s^2}{\omega_-^2 - \omega_c^2}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\mathfrak{G}_{1r} = (r - r_-) \times \left[a_1 J_2 \left(2\sqrt{-\lambda_-^{-1}} [r - r_-] \right) + b_1 Y_2 \left(2\sqrt{-\lambda_-^{-1}} [r - r_-] \right) \right],$$

здесь $J_2(z)$ и $Y_2(z)$ — функции Бесселя второго порядка a_1 и b_1 — постоянные. При $r \rightarrow r_-$:

$$\mathfrak{G}_{1r} \approx \frac{r - r_-}{2\lambda_-} \left[\ln \left(2\sqrt{\lambda_-^{-1}} [r - r_-] \right) i \frac{\pi}{2} \right] - \frac{1}{\pi}. \quad (15)$$

Отсюда видно, что вблизи точки ветвления r_- амплитуда волны в радиальной компоненте \mathfrak{G}_{1r} стремится к конечной величине.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате анализа цилиндрической модели для одномерно-неоднородной плазмы конечного давления с кривыми силовыми линиями:

1. Получено обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее пространственную структуру альфвеновских и ММЗ мод.

2. Изучен характер особенности на магнитных оболочках ММЗ-резонанса с учетом кривизны силовых линий и конечного давления.

3. Показано поведения ММЗ вблизи поверхности отражения $\omega = \omega_1(r)$. Более того, точка поворота $\omega = \omega_-(r)$. При учете кривизны силовых линий также является особой точкой для ММЗ.

Работа выполнена в рамках финансирования программы ФНИ П.12.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Агапитов А.В., Черемных О.К. Поляризация резонансных УНЧ-возмущений в магнитосфере Земли // Кинематика и физика небесных тел. 2011. Т. 27. С. 17–27.

Черемных О.К., Климушкин Д.Ю., Костарев Д.В. О структуре азимутально-мелкомасштабных УНЧ-колебаний горячей космической плазмы в кривом магнитном поле. Моды с непрерывным спектром // Кинематика и физика небесных тел. 2014. Т. 30. С. 3–21.

Klimushkin D.Yu. Theory of azimuthally small-scale hydromagnetic waves in the axisymmetric magnetosphere with finite plasma pressure // Ann. Geophys. 1998. V. 16. P. 303–321.