

## ПРИМЕНЕНИЕ ПРЯМОГО ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ПОИСКА ВЕРХНИХ И НИЖНИХ ЛУЧЕЙ В ЗАДАЧЕ РАСЧЕТА КВ-РАДИОТРАСС В ИОНОСФЕРЕ

<sup>1,2</sup>И.А. Носиков, <sup>1,2</sup>М.В. Клименко, <sup>3</sup>П.Ф. Бессараб, <sup>4</sup>Г.А. Жбанков

<sup>1</sup>Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Калининград, Россия

<sup>2</sup>Калининградский филиал Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН, Калининград, Россия

<sup>3</sup>Университет Исландии, Рейкьявик, Исландия

<sup>4</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия  
igor.nosikov@gmail.com

## APPLICATION OF THE DIRECT VARIATIONAL METHOD OF SEARCHING FOR UPPER AND LOWER RAYS TO THE HF RADIOPATH CALCULATION IN THE IONOSPHERE

<sup>1,2</sup>I.A. Nosikov, <sup>1,2</sup>M.V. Klimenko, <sup>3</sup>P.F. Bessarab, <sup>4</sup>G.A. Zhbankov

<sup>1</sup>Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia

<sup>2</sup>West Department of Pushkov IZMIRAN, RAS PAH, Kaliningrad, Russia

<sup>3</sup>Reykjavik University, Reykjavik, Iceland

<sup>4</sup>Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

---

**Аннотация.** В работе проведено исследование верхних и нижних радиолучей и осуществлено доказательство существования минимумов и седловых точек функционала оптической длины пути радиолуча. Определение верхних лучей осуществляется прямой минимизацией функционала оптической длины пути. Нижние лучи, представляющие собой седловые точки, определяются с помощью методов оптимизации, позволяющих инвертировать стационарное решение в минимум оптической длины пути. Данная методика апробирована в модельной изотропной ионосфере, где электронная концентрация задавалась по модели IRI.

**Ключевые слова:** радиотрасса, принцип Ферма, граничная задача, ионосфера.

**Abstract.** In current work we propose an investigation technique for high and low ionospheric rays. High rays are obtained by minimizing the optical path of ionospheric radio rays. Low rays which correspond to saddle points of the optical path are found using the minimum mode following method, where the saddle points are essentially converted to local minima. The method is applied to a point-to-point ionospheric ray tracing, where the propagation medium is obtained with the International Reference Ionosphere model.

**Keywords:** ray tracing, Fermat's principle, boundary problem, ionosphere.

---

### Введение

Решение краевой задачи о расчете радиотрасс в ионосфере сводится к определению полного числа радиолучей, соединяющих точки расположения передатчика и приема. В настоящее время широко используется подход, основанный на численном решении уравнения эйконала, который в сочетании с методом трассировки и пристрелки, позволяет находить множество решений граничной задачи [Jones, Stephenson, 1975]. Однако такой подход испытывает сложности при моделировании в сложной трехмерно неоднородной среде [Жбанков и др., 2010]. Альтернативный метод расчета радиотрасс в ионосфере основан на принципе стационарности оптической длины пути радиолуча (принцип Ферма). Впервые подход на основе принципе Ферма в задаче расчете радиотрасс был предложен Coleman [2011]. В своей работе Coleman, [2011] применил метод прямой минимизации функционала для поиска оптимальных траекторий, опираясь на опыт моделирования траекторий сейсмических волн в земной коре [Um, Thuber, 1987]. Предложенный вариант прямой минимизации, однако, оказался эффективен только для поиска верхних (Педерсеновских) и транс ионосфер-

ных лучей. Нижние лучи, согласно Coleman [2011], не удовлетворяют условию Якоби на минимум функционала, что является причиной неэффективности минимизации функционала для их поиска.

Проблемы в применении методов минимизации для определения полного набора решений граничной задачи рассмотрены в задачах распространения сейсмических и акустических волн в модельных средах [Waltham, 1988; Shashidhar, Anand, 1995]. Согласно работе [Shashidhar, Anand, 1995] принцип Ферма формулируется в терминах стационарности времени распространения волны. Требование минимальности является частным и справедливо предположение, что не все типы решений удовлетворяют этому условию. Поэтому, для реализации метода оптимизации, как для верхних, так и нижних радиолучей необходимо провести исследование функционала и проверить выполнение условия на их стационарность. В данной работе будет представлен анализ функционала оптической длины пути для радиотрасс и пересмотрен подход к реализации прямого вариационного метода для определения как верхних, так и нижних лучей.

Исследование функционала верхних и нижних радиолучей. Верхние и нижние радиолучи, удо-

влетворяющие принципу Ферма, являются стационарными решениями граничной задачи. Для наглядной идентификации типов стационарных решений был реализован метод «экспресс» анализа, позволяющий исследовать функционал радиолуча в зависимости от формы траектории [Nosikov et al., 2016]. Результаты анализа карт распределения оптической длины пути радиолуча позволяют установить фундаментальную разницу между верхним и нижним лучом (см. рис. 1). Оптическая длина пути верхнего луча соответствует минимуму, что объясняет его успешное определение прямым вариационным методом, в основе которого лежит минимизация функционала оптической длины радиолуча. При этом наличие седловой точки на карте оптической длины пути позволяет объяснить невозможность использования аналогичного подхода для определения нижнего луча. В ходе данной работы нами было осуществлено строгое математическое доказательство принадлежности верхних лучей к минимумам, а нижних лучей к максимумам оптической длины радиолуча на основе нахождения и анализа собственных значений гессиана оптической длины пути радиолуча. Этот факт позволяет перейти к рассмотрению прямого вариационного метода, способного определять как минимумы, так и седловые точки. Достоинством такого метода является избирательность в поиске нижних и верхних лучей.

Определение верхних лучей. Метод упругой нити. Согласно приближению геометрической оптики распространение волны от некоторого источника можно представить в виде семейства лучей, описывающих траекторию распространения фазы волны. Тогда оптическая длина пути радиолуча, соединяющего точки приемника и передатчика, в изотропной среде имеет вид:  $S = \int_A^B n(\vec{r}) dl$ . Интегрирование производится вдоль кривой  $\gamma$ , задающей траекторию луча, которая соединяет точки  $A$  и  $B$ ,  $n(\vec{r})$  — показатель преломления в точке  $\vec{r} = (x, y, z)$ , лежащей на кривой  $\gamma$ , и  $dl$  — элемент длины вдоль  $\gamma$ . Согласно принципу Ферма, функционал оптической длины

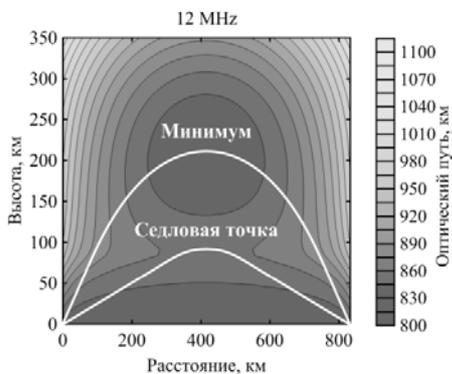


Рис. 1. Двумерные карты распределения оптической длины пути для 12 МГц. Белыми сплошными линиями показаны радиотрассы (верхние и нижние лучи), являющиеся решениями граничной задачи для модельной ионосферы с параболическим профилем электронной концентрации [Nosikov et al., 2016]

Многие численные методы поиска минимума многомерной функции основаны на вычислении антиградиента целевой функции, представляющий собой многомерный вектор  $F = -\nabla S$ . Реализация метода минимизации, в частности метода упругой нити [Jónsson et al., 1998], для поиска верхних радиолучей в модельных изотропных средах представлена в работах [Носиков и др., 2016; Nosikov et al., 2016]. Важным аспектом является выбор начального положения радиотрассы. В случае если граничная задача имеет множество различных решений, то выбор начального приближения становится определяющим. В этом случае следует использовать априорную информацию о профиле электронной концентрации. Как правило, верхние лучи, преломляясь в ионосфере, распространяются вдоль максимума электронной концентрации, высоты которых можно использовать для задания начального приближения.

Определение нижних лучей. Метод минимальной моды. Как упоминалось ранее, нижние лучи представляют собой седловые точки оптической длины пути радиолуча. Следовательно, они не могут быть определены прямой минимизацией функционала, основанной на антиградиенте целевой функции  $F$ . Однако сила  $F$  может быть изменена в соответствии с методом минимальной моды, разработанным для определения положения седловых точек [Gutiérrez et al., 2016]. Идея модификации силы  $F$  заключается в конвертации седловой точки в локальный минимум, что позволит использовать прямой вариационный метод для определения нижних лучей.

Согласно определению седловой точки, минимальное собственное значение  $\lambda$ , Гессиана оптической длины пути радиолуча имеет отрицательное значение. Это собственное значение характеризует направление убывания функционала в окрестности седловой точки, что принято называть минимальной модой. Тогда инверсия компоненты минимальной моды для силы  $F$ , принимает вид:  $\tilde{F} = F - 2(FQ_\lambda)Q_\lambda$ , где  $Q_\lambda$  — нормированный собственный вектор, соответствующий собственному значению  $\lambda$ . Модифицированная сила  $\tilde{F}$  может быть использована в процедуре оптимизации траектории для поиска нижних лучей.

Результаты численных расчетов в модели IRI. Прямой вариационный метод, представленный в данной работе, был применен для расчета радиотрасс между станциями Калининград (54.57° N, 20° E) и Тромсё (65.65° N, 18.57° E) волн с частотой 10 МГц. Электронная концентрация среды распространения радиоволн задавалась по модели IRI-2007 для 12 UT, 22 июня 2014 г. Результаты численных расчетов радиотрасс методом стрельбы [Жбанков и др., 2010] и методом оптимизации представлены на рис. 2. Все верхние лучи были получены с использованием метода упругой нити путем задания начальных приближений на высотах максимумов F2 и E слоев соответственно. После определения верхних лучей был применен метод минимальной моды для определения нижних лучей, начальное приближение кото-

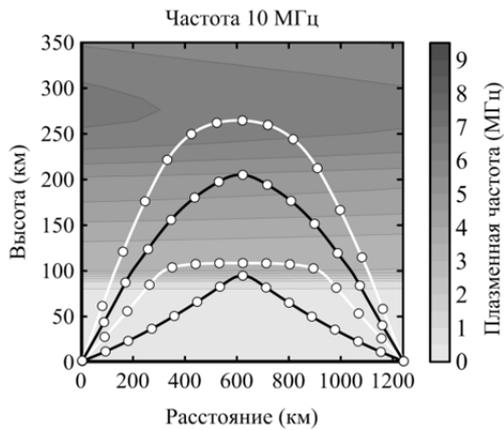


Рис. 2. Результаты расчета радиотрасс между станциями Калининград (54.57° N, 20° E) и Тромсё (65.65° N, 18.57° E) в день летнего солнцестояния 12 UT, 22 июня 2014 г. Белые линии соответствуют верхним лучам, черные линии — нижним лучам, полученным с помощью метода стрельбы. Точки вдоль траектории показывают положение кривой в конце процедуры оптимизации

рых было задано в виде треугольника, вершина которого располагалась ниже последовательно F2 и E слоев. Окончательные положения точек траектории после процесса оптимизации представлены на рис. 2, где белые кривые соответствуют верхним лучам, а черные — нижним. Сравнение результатов расчетов с радиотрассами, полученными с помощью метода стрельбы, показало полное согласие.

### Заключение

В результате исследования функционала радиолуча было доказано существование двух типов стационарных решений: минимума и седловой точки соответствующие верхним и нижним радиолучам соответственно. Это позволило выявить фундаментальную разницу между двумя различными типами решений граничной задачи и расширить применимость прямого вариационного метода для расчета радиотрасс в ионосфере. Для определения верхних лучей был применен метод упругой нити, основанный на минимизации функционала радиолуча, и представлен подход к выборке начальных приближений. Также была рассмотрена проблема применения прямого вариационного метода для поиска нижних лучей. Установленный факт, что нижние лучи соответствуют седловым точкам функционала позволил применить метод минимальной моды для определения положения седловых точек. Таким образом, в данной работе представлен комплексный подход, основанный на прямом вариационном методе, позволяющий решать граничную задачу о расчете радиотрасс и избирательно определять как верхние, так и нижние лучи.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФ № 17-77-20009. Работа выполнена в рамках программы повышения конкурентоспособности «5-100» БФУ им. И. Канта.

### Список литературы

- Жбанков Г.А. и др. Особенности распространения радиоволн со спутника «Интеркосмос-19» в области зимнего гребня ночной экваториальной аномалии // Геомагнетизм и аэрономия. 2010. Т. 50, №. 1. С. 123–130.
- Носиков И.А., Бессараб П.Ф., Клименко М.В. Применение метода поперечных смещений для расчета коротковолновых радиотрасс. Постановка задачи и предварительные результаты // Изв. вузов. 2016. Т. 59, №. 1. С. 1–14.
- Coleman C.J. Point-to-point Ionospheric Ray Tracing by a Direct Variational Method // Radio Sci. 2011. V. 46. P. 5, RS5016. DOI: 10.1029/2011RS004748.
- Jones R.M., Stephenson J.J. A versatile three dimensional ray tracing computer program for radio waves in the ionosphere // NASA STI/Recon Technical Report. 1975. V. 76. P. 25476.
- Jónsson H., Mills G., Jacobsen K.W. Nudged elastic band method for finding minimum energy paths of transitions. 1998.
- Nosikov I.A., Klimenko M.V., Bessarab P.F., Zhabankov G.A. Investigation of optical path functional for high and low ionospheric radio rays // URSI Asia-Pacific Radio Science Conference (URSI AP-RASC). IEEE, 2016. P. 1317–1320.
- Plasencia Gutiérrez M., Argáez C., Jónsson H. Improved Minimum Mode Following Method for Finding First Order Saddle Points // J. Chemical Theory and Computation. 2016.
- Shashidhar N.S., Anand G.V. Eigenray tracing in an ocean using Fermat's principle // J. Sound and Vibration. 1995. V. 186, N 2. P. 231–243.
- Um J., Thurber C. A fast algorithm for two-point seismic ray tracing // Bulletin of the Seismological Society of America. 1987. V. 77, N 3. P. 972–986.
- Waltham D.A. Two-point ray tracing using Fermat's principle // Geophysical Journal International. 1988. V. 93, N 3. P. 575–582.