Секция D. Физика атмосферы. БШФФ-2015. С. 272–273

УДК 551.54

ИЗМЕНЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ С ВЫСОТОЙ В АДИАБАТИЧЕСКИ ПОДНИМАЮЩЕМСЯ ВОЗДУХЕ И ОКРУЖАЮЩЕЙ АТМОСФЕРЕ

К.С. Аванесян, Р.Г. Закинян

PRESSURE VARIATION WITH HEIGHT IN ADIABATICALLY RISING AIR AND IN THE ATMOSPHERE

K.S. Avanesyan, R.G. Zakinyan

Исследуется вопрос о возникновении конвективного движения в атмосфере. Показано, что в состоянии статики атмосферы горизонтальный градиент температуры (и плотности) равен нулю. Установлено, что наличие горизонтального градиента температуры (и плотности) всегда будет вызывать конвективное движение.

Explores the question of the origin of the convective motion in the atmosphere. It is shown that in a static atmosphere of the horizontal gradient of temperature (and density) is equal to zero. It is established that the presence of horizontal temperature gradient (and density) will always call the convective motion.

Рассмотрим уравнение движения идеальной жидкости в форме Эйлера в инерциальной системе отсчета, без учета вращения Земли [Матвеев, 2000]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v}=\mathbf{g}-\frac{1}{\rho_{\mathrm{i}}}\nabla p. \qquad (1)$$

Будем рассматривать плоский вертикальный случай, т. е. движение в плоскости (x, z). Запишем уравнение (1) в проекциях на оси координат:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_{\mathrm{i}}}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right), \qquad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_{\mathrm{i}}}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)-g, \qquad (3)$$

В состоянии равновесия (статики атмосферы)

$$\mathbf{v}=0,\ -\frac{1}{\overline{\rho}_{\mathrm{e}}}\nabla\overline{p}+\mathbf{g}=0;$$

$$\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}=0,\ -\frac{1}{\overline{\rho}_{\mathrm{e}}}\left(\frac{\partial\overline{p}}{\partial z}\right)-g=0,\ \frac{\partial\overline{p}}{\partial z}=-\overline{\rho}_{\mathrm{e}}g. \qquad (4)$$

Уравнение (4) есть уравнение статики атмосферы. Здесь ρ_{i} – плотность воздушной частицы; ρ_{e} – плотность окружающей воздушную частицу атмосферы. Параметры окружающей атмосферы мы рассматриваем как невозмущенное состояние.

Запишем уравнение состояния для окружающего сухого воздуха (уравнение Менделеева–Клайперона):

$$p_{\mathrm{e}}=\rho_{\mathrm{e}}R_{\mathrm{d}}T_{\mathrm{e}} \qquad (5)$$

Отсюда, взяв оператор «набла» с обеих частей равенства, получим

$$\frac{\nabla p_{\mathrm{e}}}{p_{\mathrm{e}}}=\frac{\nabla\rho_{\mathrm{e}}}{\rho_{\mathrm{e}}}+\frac{\nabla T_{\mathrm{e}}}{T_{\mathrm{e}}}.$$

Для состояния статики атмосферы:

$$\nabla\overline{p}_{\mathrm{e}}=\overline{\rho}_{\mathrm{e}}\mathbf{g}.$$

Тогда

$$\frac{\overline{\rho}_{\mathrm{e}}\mathbf{g}}{\overline{p}_{\mathrm{e}}}=\frac{\nabla\overline{\rho}_{\mathrm{e}}}{\overline{\rho}_{\mathrm{e}}}+\frac{\nabla\overline{T}_{\mathrm{e}}}{\overline{T}_{\mathrm{e}}},$$

$$\frac{\mathbf{g}}{R_{\mathrm{d}}\overline{T}_{\mathrm{e}}}=\frac{\nabla\overline{\rho}_{\mathrm{e}}}{\overline{\rho}_{\mathrm{e}}}+\frac{\nabla\overline{T}_{\mathrm{e}}}{\overline{T}_{\mathrm{e}}}.$$

Предварительно предположим, что в состоянии статики атмосферы температура окружающей атмосферы изменяется не только с высотой z, но и по оси x по закону:

$$\nabla\overline{T}_{\mathrm{e}}=\frac{\partial\overline{T}_{\mathrm{e}}}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\overline{T}_{\mathrm{e}}}{\partial z}\mathbf{k}=-\gamma_1\mathbf{i}-\gamma\mathbf{k}, \qquad (6)$$

где γ – вертикальный градиент температуры окружающего воздуха по оси z, γ_1 – горизонтальный градиент температуры окружающего воздуха по оси x.

Отсюда

$$\frac{-g\mathbf{k}}{R_{\mathrm{d}}\overline{T}_{\mathrm{e}}}=\frac{\frac{\partial\overline{\rho}_{\mathrm{e}}}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\overline{\rho}_{\mathrm{e}}}{\partial z}\mathbf{k}}{\overline{\rho}_{\mathrm{e}}}+\frac{\frac{\partial\overline{T}_{\mathrm{e}}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{T}_{\mathrm{e}}}{\partial z}\mathbf{k}}{\overline{T}_{\mathrm{e}}},$$

$$-\frac{g}{R_{\mathrm{d}}\overline{T}_{\mathrm{e}}}\mathbf{k}=\frac{1}{\overline{\rho}_{\mathrm{e}}}\frac{\partial\overline{\rho}_{\mathrm{e}}}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{1}{\overline{\rho}_{\mathrm{e}}}\frac{\partial\overline{\rho}_{\mathrm{e}}}{\partial z}\mathbf{k}+\frac{1}{\overline{T}_{\mathrm{e}}}\frac{\partial\overline{T}_{\mathrm{e}}}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{1}{\overline{T}_{\mathrm{e}}}\frac{\partial\overline{T}_{\mathrm{e}}}{\partial z}\mathbf{k},$$

$$\left(\frac{1}{\overline{\rho}_{\mathrm{e}}}\frac{\partial\overline{\rho}_{\mathrm{e}}}{\partial x}+\frac{1}{\overline{T}_{\mathrm{e}}}\frac{\partial\overline{T}_{\mathrm{e}}}{\partial x}\right)\mathbf{i}+$$

$$+\left(\frac{1}{\overline{\rho}_{\mathrm{e}}}\frac{\partial\overline{\rho}_{\mathrm{e}}}{\partial z}+\frac{1}{\overline{T}_{\mathrm{e}}}\frac{\partial\overline{T}_{\mathrm{e}}}{\partial z}+\frac{g}{R_{\mathrm{d}}\overline{T}_{\mathrm{e}}}\right)\mathbf{k}=0,$$

$$\frac{1}{\overline{\rho}_{\mathrm{e}}}\frac{\partial\overline{\rho}_{\mathrm{e}}}{\partial x}+\frac{1}{\overline{T}_{\mathrm{e}}}\frac{\partial\overline{T}_{e}}{\partial x}=0,$$

$$\frac{1}{\overline{\rho}_{\mathrm{e}}}\frac{\partial\overline{\rho}_{\mathrm{e}}}{\partial z}+\frac{1}{\overline{T}_{\mathrm{e}}}\frac{\partial\overline{T}_{\mathrm{e}}}{\partial z}+\frac{g}{R_{\mathrm{d}}\overline{T}_{\mathrm{e}}}=0,$$

$$\frac{\partial\ln\overline{\rho}_{\mathrm{e}}}{\partial x}+\frac{\partial\ln\overline{T}_{\mathrm{e}}}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial\ln\overline{\rho}_{\mathrm{e}}}{\partial z}+\frac{\partial\ln\overline{T}_{\mathrm{e}}}{\partial z}+\frac{\gamma_A}{\overline{T}_{\mathrm{e}}}=0,$$

где

$$\gamma_A=\frac{g}{R_{\mathrm{d}}}=\frac{g}{c_p}\frac{c}{R_{\mathrm{d}}}=\gamma_{\mathrm{a}}\frac{c_p}{c_p-c_\upsilon}=\gamma_{\mathrm{a}}\frac{c_p/c_\upsilon}{\frac{c_p}{c_\upsilon}-1}=\gamma_{\mathrm{a}}\frac{\nu}{\nu-1},$$

$$\frac{c_p}{c_\upsilon}=\nu;\ \frac{\partial\ln\left(\overline{\rho}_{\mathrm{e}}\overline{T}_{\mathrm{e}}\right)}{\partial x}=0,\ \frac{\partial\ln\left(\overline{\rho}_{\mathrm{e}}\overline{T}_{\mathrm{e}}\right)}{\partial z}=-\frac{\gamma_{\mathrm{A}}}{\overline{T}_{e}},$$

где g – ускорение свободного падения, R_{d} – удельная газовая постоянная сухого воздуха.

Взяв производную по z от левого равенства и производную по x от правого, и приравняв смешанные производные, получим, что в состоянии статики атмосферы

$$\frac{\partial \bar{T}_{\mathrm{e}}}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial \bar{\rho}_{\mathrm{e}}}{\partial x}=0,\quad \bar{T}_{\mathrm{e}}=\bar{T}_{\mathrm{e}0}-\gamma z.$$

Отсюда следует, что в состоянии статики атмосферы горизонтальный градиент температуры (и плотности) равен нулю. Другими словами, наличие горизонтального градиента температуры (и плотности) всегда будет вызывать конвективное движение. Далее имеем

$$\frac{1}{\bar{\rho}_{\mathrm{e}}}\frac{\partial \bar{\rho}_{\mathrm{e}}}{\partial z}+\frac{\gamma_A-\gamma}{\bar{T}_{\mathrm{e}}}=0;$$

$$\frac{1}{\rho_{\mathrm{e}}}\frac{\partial \rho_{\mathrm{e}}}{\partial z}+\frac{\gamma_A-\gamma}{\bar{T}_{\mathrm{e}0}-\gamma z}=0,$$

$$\frac{\partial \ln \bar{\rho}_{\mathrm{e}}}{\partial z}=-\frac{\gamma_A-\gamma}{\bar{T}_{e0}-\gamma z},\qquad (7)$$

где $T_{\mathrm{e}0}$ – температура окружающего воздуха у земли в некоторой точке отсчета.

Найдем решение этого уравнения:

$$\mathrm{d}\ln\bar{\rho}_{\mathrm{e}}=\frac{\gamma_A-\gamma}{\gamma}\frac{\mathrm{d}z}{z-\frac{\bar{T}_{\mathrm{e}0}}{\gamma}},$$

$$\mathrm{d}\ln\bar{\rho}_{\mathrm{e}}=\mathrm{d}\ln\left(z-\frac{\bar{T}_{\mathrm{e}0}}{\gamma}\right)^{\gamma_A-\gamma/\gamma}$$

$$\ln\bar{\rho}_{\mathrm{e}}=\ln\left(z-\frac{\bar{T}_{\mathrm{e}0}}{\gamma}\right)^{\gamma_A-\gamma/\gamma}+\ln c,$$

$$\ln\frac{\bar{\rho}_{\mathrm{e}0}}{\left(-\frac{\bar{T}_{\mathrm{e}0}}{\gamma}\right)^{(\gamma_A-\gamma)/\gamma}}=\ln c,$$

$$\bar{\rho}_{\mathrm{e}}=\bar{\rho}_{\mathrm{e}0}\left(\frac{\frac{\bar{T}_{\mathrm{e}0}}{\gamma}-z}{\frac{\bar{T}_{\mathrm{e}0}}{\gamma}}\right)^{(\gamma_A-\gamma)/\gamma},$$

$$\bar{\rho}_{\mathrm{e}}=\bar{\rho}_{\mathrm{e}0}\left(\frac{\bar{T}_{\mathrm{e}0}-\gamma z}{\bar{T}_{\mathrm{e}0}}\right)^{(\gamma_A-\gamma)/\gamma}.\qquad (8)$$

Давление в окружающей атмосфере определяется барометрической формулой

$$p_{\mathrm{e}}=\rho_{\mathrm{e}}R_{\mathrm{d}}T_{\mathrm{e}},\quad \rho_{\mathrm{e}}=\frac{p_e}{R_{\mathrm{d}}T_{\mathrm{e}}},\quad \frac{\partial\bar{p}_{\mathrm{e}}}{\partial z}=-\frac{\bar{p}_{\mathrm{e}}}{R_{\mathrm{d}}\bar{T}_{\mathrm{e}}}g,$$

$$\frac{\partial\ln\bar{p}_{\mathrm{e}}}{\partial z}=-\frac{g}{R_{\mathrm{d}}\left(\bar{T}_{\mathrm{e}0}-\gamma z\right)},$$

$$\mathrm{d}\ln\bar{p}_{\mathrm{e}}=\frac{g\mathrm{d}z}{R_{\mathrm{d}}\gamma\left(z-\frac{\bar{T}_{\mathrm{e}0}}{\gamma}\right)},\quad \mathrm{d}\ln\bar{p}_{\mathrm{e}}=\frac{\gamma_A}{\gamma}\mathrm{d}\ln\left(z-\frac{\bar{T}_{\mathrm{e}0}}{\gamma}\right),$$

$$\ln\bar{p}_{\mathrm{e}}=\ln\left(z-\frac{\bar{T}_{\mathrm{e}0}}{\gamma}\right)^{\gamma_A/\gamma}+\ln c,$$

$$\ln\frac{\bar{p}_{\mathrm{e}0}}{\left(-\frac{\bar{T}_{\mathrm{e}0}}{\gamma}\right)^{\gamma_A/\gamma}},\quad \bar{p}_{\mathrm{e}}=\bar{p}_{\mathrm{e}0}\left(\frac{\frac{\bar{T}_{\mathrm{e}0}}{\gamma}-z}{\frac{\bar{T}_{\mathrm{e}0}}{\gamma}}\right)^{\gamma_A/\gamma}$$

$$\bar{p}_{\mathrm{e}}=\bar{p}_{e0}\left(\frac{\bar{T}_{\mathrm{e}0}-\gamma z}{\bar{T}_{\mathrm{e}0}}\right)^{\gamma_A/\gamma}.\qquad (9)$$

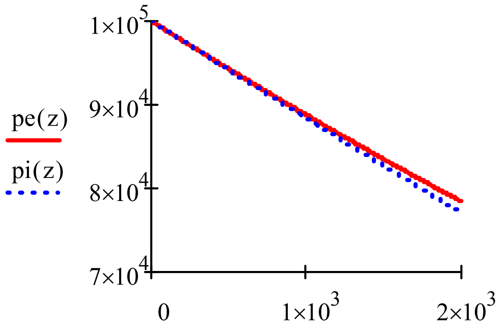
Или приблизительно

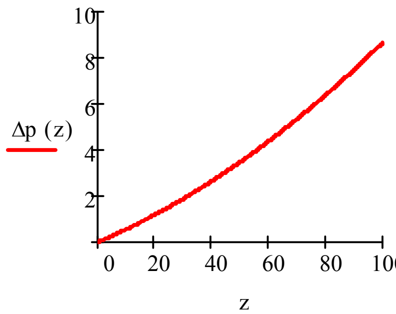
$$\bar{p}_{\mathrm{e}}=\bar{p}_0 e^{-\frac{g}{R_{\mathrm{d}}\bar{T}_0}z},$$

а давление воздуха, поднимающегося адиабатически, изменяется по закону

$$p_{\mathrm{i}}=p_0\left(1-\frac{\gamma_a z}{T_0}\right)^{\frac{v}{v-1}}=p_0\left(1-\frac{gz}{c_pT_0}\right)^{\frac{c_p}{R_{\mathrm{d}}}},\quad v=\frac{c_p}{c_\upsilon},$$

где $\bar{T}_0$ – средняя температура окружающего подоблачного воздуха (см. рисунок).





Изменение давления с высотой в адиабатически поднимающемся воздухе и окружающей атмосфере.

Видно, что возмущение давления, вызванное адиабатическим подъемом воздуха, незначительно.

Работа выполнена в рамках НИОКР «Разработка геофизических и геоэкологических принципов прогноза состояний наземных экосистем средствами дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ)». Регистрационный номер НИОКР: 114040740012. Дата регистрации: 07.04.2014 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Матвеев Л.Т. Физика атмосферы. СПб: Гидрометеоиздат, 2000. 779 с.

Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь, Россия