УДК 536.71, УДК 539.1.01

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ФОТОНОВ, ИЗЛУЧЕННЫХ СВОБОДНЫМИ НЕСТАБИЛЬНЫМИ ЯДРАМИ В ТЕРМОСТАТЕ

Ю.Ю. Пантелеева, А.Н. Валл

ENERGY SPECTRUM OF PHOTONS RADIATED BY FREE UNSTABLE NUCLEI IN A THERMOSTAT

J.Yu. Panteleyeva, A.N. Vall

Работа посвящена нахождению и анализу энергетического спектра излучения нестабильных частиц массы M^* в термостате при температуре T. Вычисления основаны на законе сохранения энергии-импульса для квазиупругого процесса $M^*\to M+\gamma$, а также на распределении Максвелла ядер в термостате. В результате получено аналитическое выражение для энергетического спектра фотонов в термостате.

The article is devoted to finding and analyzing of radiation energy spectrum of unstable particles of masses M^* in a thermostat at temperature T. The calculations are based on the conservation law of energy-momentum for quasi elastic process $M^*\to M+\gamma$, and also on nuclei Maxwell distribution in a thermostat. As a result we have obtained the analytical expression of photon energy spectrum in a thermostat.

1. Вывод формул энергии поглощения и излучения γ-кванта в нестабильных процессах

Рассмотрим ядро массы M^*, находящееся в возбужденном состоянии и движущееся с импульсом $\vec{p}$ (рис. 1). Процесс распада сопровождается испусканием γ-кванта и переходом ядра в основное состояние с массой M.

В этом процессе закон сохранения энергии:

$$M^*c^2 + 2\frac{p^2}{M^*} = E_\gamma^{изл} + Mc^2 + \frac{p'^2}{2M}$$

и закон сохранения импульса: $p'^2 = \vec{p} - \vec{q}$. Отсюда энергия излученного γ-кванта:

$$E_\gamma^{изл} = c^2\left(M^* - M\right) + \frac{p^2}{2M^*} - \frac{\left(\vec{p}-\vec{q}\right)^2}{2M}. \qquad (1)$$

Кинетические члены $\frac{p^2}{2M}$ и $\frac{p^2}{2M^*}$ одного порядка, поэтому в соотношении (1) примем, что $M\approx M^*$, тогда энергия излученного γ-кванта:

$$E_\gamma^{изл} = c^2\left(M^* - M\right) + \frac{\vec{p}\vec{q}}{M} - \frac{q^2}{2M}. \qquad (2)$$

Так как энергия улетающего фотона равна $E_\gamma^{изл} = qc$, а скорость нестабильного ядра до излучения γ-кванта в нерелятивистском приближении равна $\vec{V} = \frac{\vec{q}}{M}$, из (2) получаем соотношение для энергии излученного фотона: $E_\gamma^{изл} = E_0 - R + E_\gamma^{изл}\frac{\vec{V}\vec{n}}{c}$,

где $E_0 = (M^* - M)c^2$ – энергия перехода, $R = \frac{q^2}{2M}$ – кинетическая энергия отдачи ядра при излучении фотона с импульсом $\vec{q}, \vec{n}$ – единичный вектор вдоль направления улетающего фотона.

Выражение для энергии излученного γ-кванта можно представить в виде ряда:

$$E_\gamma^{изл} = \left(E_0 - R\right)\left(1 + \frac{\vec{V}\vec{n}_\gamma}{c} + \left(\frac{\vec{V}\vec{n}}{c}\right)^2 + \ldots\right), \qquad (3)$$

т. е. энергия улетающего фотона определяется спектром возбуждения ядра E_0 и начальной скоростью $\vec{V}$ [Валл, 2010].

Оценим энергию отдачи R. Рассмотрим переход в ядре Fe^{57}, с $E_0=14\cdot10^3$ эВ, масса покоя ядра Fe^{57}:$Mc^2\approx57\cdot10^9$ эВ. Используя связь импульса и энергии фотона: $E_\gamma^{изл} = qc$ и полученное выражение (3) для $E_\gamma^{изл}$, в случае когда $V/c \ll 1$ следует, что $qc \approx \left(E_0 - R\right)$, таким образом, $R = \frac{\left(E_0 - R\right)^2}{2Mc^2}$. Решая квадратное уравнение относительно неизвестного R, получаем, что $R \approx \frac{E_0^2}{2Mc^2}$, т. е. для реальной ситуации R не зависит от $E_\gamma^{изл}$, $R\approx2\cdot10^{-3}$ эВ [Липкин, 1977].

Теперь рассмотрим поглощение фотона (рис. 2).

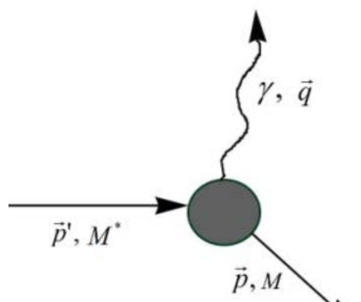

Рис. 1. Процесс излучения γ-кванта.

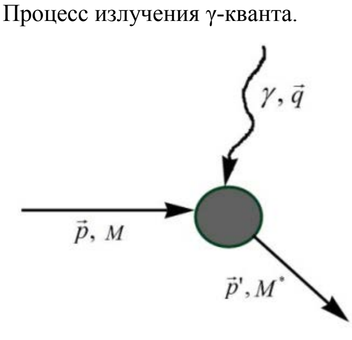

Рис. 2. Процесс поглощения γ-кванта.

Закон сохранения энергии и импульса в этом случае:

$$\vec{p}' = \vec{p} + \vec{q}; \quad Mc^2 + \frac{p^2}{2M} + E_\gamma^{изл} = M^* c^2 + \frac{\vec{p}'^2}{2M^*}.$$

В итоге получаем выражение для энергии поглощенного γ-кванта:

$$E_\gamma^{пог} = (E_0 + R)\left(1 + \frac{\vec{V}\vec{n}_\gamma}{c} + \left(\frac{\vec{V}\vec{n}_\gamma}{c}\right)^2 + \ldots\right), \tag{4}$$

где $\vec{V}$ – скорость стабильного ядра до поглощения γ-кванта [Валл, 2010].

2. Среднее значение энергии γ-кванта по распределению Максвелла

Если ядра представляют собой классический газ, находящийся в термостате, то они имеют распределение Максвелла по скоростям. Энергия излученных γ-квантов тогда будет иметь не одно значение, а непрерывный спектр значений. Среднее значение любой функции определяется соотношением:

$$\left\langle \psi\left(\vec{V}\right)\right\rangle = \frac{\int \psi\left(\vec{V}\right) f\left(\vec{V}\right) d\vec{V}}{\int\left(\vec{V}\right) d\vec{V}}, \tag{5}$$

где $f\left(\vec{V}\right) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mV^2}{2kT}}$ – нормированная функция распределения Максвелла по скоростям, т. е. $\int f\left(\vec{V}\right) d\vec{V} = 1.$

Используя (3), (4) и (5), получим: $\left\langle \vec{V}\vec{n}_\gamma \right\rangle = 0,$ $\left\langle \left(\vec{V}\vec{n}_\gamma\right)^2 \right\rangle = \frac{kT}{m}$ и

$$\left\langle E_\gamma^{изл} \right\rangle = (E_0 - R)\left(1 + \frac{\left\langle V^2 \right\rangle}{3c^2} + \ldots\right), \tag{6}$$

$$\left\langle E_\gamma^{пог} \right\rangle = (E_0 + R)\left(1 + \frac{\left\langle V^2 \right\rangle}{3c^2} + \ldots\right), \tag{7}$$

Из формул (6) и (7) видно, что среднее значение энергии испускаемых γ-квантов приходится на энергию E_0–R, а среднее значение поглощенных γ-квантов на энергию E_0+R.

Рассмотрим два одинаковых сосуда, находящихся на расстоянии друг от друга, в одном из которых находятся возбужденные ядра, которые могут распадаться и испускать γ-кванты, в другом — стабильные ядра, которые могут поглощать γ-кванты такого же типа. Энергии испущенного γ-кванта E_0–R будет недостаточно для того, чтобы произошло поглощение его стабильным ядром с энергией E_0+R. Если поглощения γ-кванта не происходит, значит стабильные ядра не переходят в возбужденные ядра, которые в свою очередь снова бы испускали γ-кванты, то есть электромагнитного излучения между сосудами наблюдаться не будет [Валл, 2010].

3. Функция распределения по энергиям γ-кванта

В предыдущей части газ имел распределение по скоростям, теперь для той же системы ядер получим распределение по энергиям γ-кванта. Исходя из формулы (5), среднее значение излученного γ-кванта определяется соотношением

$$\left\langle E_\gamma^{изл}\left(\vec{V}\right)\right\rangle = \int E_\gamma^{изл}\left(\vec{V}\right) f\left(\vec{V}\right) d\vec{V}, \tag{8}$$

где $f\left(\vec{V}\right)$ – нормированная на единицу функция Максвелла по скоростям,

$\left\langle E_\gamma^{изл} \right\rangle = (E_0 - R)\left(1 + \frac{\vec{V}\vec{n}_\gamma}{c} + \left(\frac{\vec{V}\vec{n}_\gamma}{c}\right)^2 + \ldots\right)$ – энергия излученного γ-кванта.

Проинтегрировав (8) по углам, получаем: $\left\langle E_\gamma^{изл}(V)\right\rangle = \int E_\gamma^{изл}(V) f(V)\, dV,$

где $\left\langle E_\gamma^{изл} \right\rangle = (E_0 - R)\left(1 + \frac{V^2}{3c^2} + \ldots\right).$

Среднее значение излученного γ-кванта также можно найти с помощью функции распределения по энергиям $\Phi\left(E_\gamma^{изл}\right) : \left\langle E_\gamma^{изл}\right\rangle = \int E_\gamma^{изл} \phi\left(E_\gamma^{изл}\right) dE_\gamma^{изл}$ – это есть уравнение на $\Phi\left(E_\gamma^{изл}\right)$.

После несложных вычислений получаем функцию распределения по энергиям излученного и поглощенного γ-кванта:

$$\phi\left(E_\gamma^{изл}\right) = B\exp\left[-A\left(E_\gamma^{изл} - (E_0 - R)\right)^2\right],$$

$$\phi\left(E_\gamma^{пог}\right) = B'\exp\left[-A'\left(E_\gamma^{пог} - (E_0 - R)\right)^2\right],$$

где A, B и A', B' — константы:

$$A = \frac{mc^2}{2kT\left(E_0 - R\right)^2}, \quad B = \frac{c}{E_0 - R}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$A' = \frac{mc^2}{2kT\left(E_0 + R\right)^2}, \quad B' = \frac{c}{E_0 + R}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Итак, если наши сосуды находятся в тепловом равновесии, то ширина распределения будет определяться температурой T. На рис. 3 представлена интенсивность излучения и поглощения γ-кванта при различных температурах.

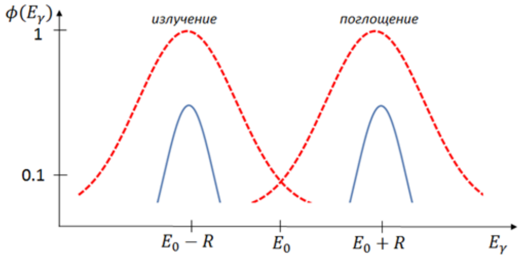

Рис. 3. Интенсивность излучения и поглощения γ-кванта при различных температурах T: сплошная линия соответствует температуре T_1, пунктирная – температуре T_2, причем T_2>T_1.

Пик интенсивности излучения приходится на энергию E_0–R, а пик интенсивности поглощения – на энергию E_0+R, что соответствует средним значениям, вычисленным ранее. Из рис. 3 видно, что при высоких температурах ширина спектров расплывается, наблюдается область перекрытия спектров, которая обеспечивает рождение и поглощение фотонов с энергией E_0, что приводит к появлению непрерывного электромагнитного излучения между сосудами. При низких температурах спектры поглощения и излучения расходятся, область перекрытия спектров исчезает, электромагнитного излучения не наблюдается.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для ведущих научных школ НШ - 3003.2014.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Валл А.Н., Солдатенко О.Н. Квантовая механика в задачах: учеб.-метод.пособие. Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2010. 87 с.

Липки Г. Квантовая механика. Новый подход к некоторым проблемам. М.: Мир, 1977. 586 с.

Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия