Секция А. Астрофизика и физика Солнца. БШФФ-2013. С. 109–114

УДК 530.145, 539.12

О единственности волнового пакета в КТП и проблеме нейтринных осцилляций

С. Э. Коренблит, Д. В. Тайченачев

On uniqueness of the wave packet in QFT and neutrino oscillation problem.

S. E. Korenblit, D. V. Taychenachev

Установлен единственно возможный вид релятивистского волнового пакета, согласованного с общими принципами квантовой теории поля (КТП), способного адекватно описывать состояния, локализованные как в координатном, так и в импульсном пространстве. Рассмотрено его применение к описанию нейтринных осцилляций.

The unique form of relativistic wave packet is determined, which accords to general principles of quantum field theory (QFT) and admits adequate description of both the states localized in position and momentum space. Its application to neutrino oscillation phenomenon is considered.

1. Введение

Как известно [1], в нерелятивистской квантовой теории время играет роль параметра. Поэтому импульсные и координатные обкладки, как формальные собственные состояния операторов трехмерного импульса $\mathbf{P}$: $\mathbf{P}|\mathbf{k}>=\mathbf{k}|\mathbf{k}>$, $<\mathbf{k}\mid\mathbf{l}>=\delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{l})$, и соответствующей координаты $\mathbf{X}$: $\mathbf{X}|\mathbf{x}>=\mathbf{x}|\mathbf{x}>$, $<\mathbf{x}|\mathbf{y}>=\delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$, где $[\mathrm{X}_n,\mathrm{P}_l]=i\delta_{nl}$, имеют смысл в *произвольный момент времени* t. Тогда, для любого состояния $|f>$: $\mathbf{X}=\mathbf{x}$, $\mathbf{P}=\mathbf{P}_{\mathrm{x}}=-i\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{x}}$ на волновых функциях $f(\mathbf{x})=<\mathbf{x}|f>$ его $\mathbf{x}$ -представления, и $\mathbf{X}=i\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{p}}$, $\mathbf{P}=\mathbf{p}$ на волновых функциях $\widetilde{f}(\mathbf{p})=<\mathbf{p}|f>$ его $\mathbf{p}$ -представления,

$$\text{в силу: } \int d^3\mathrm{k}|\mathbf{k}><\mathbf{k}|=\mathbf{I},\quad \int d^3\mathrm{x}|\mathbf{x}><\mathbf{x}|=\mathbf{I},\quad \text{и:}$$

$$e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X})}\mathbf{P}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X})}=\mathbf{P}+\mathbf{k},\quad e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X})}|\mathbf{l}>=|\mathbf{k}+\mathbf{l}>,$$

$$e^{i(\mathbf{y}\cdot\mathbf{P})}\mathbf{X}e^{-i(\mathbf{y}\cdot\mathbf{P})}=\mathbf{X}+\mathbf{y},\quad e^{-i(\mathbf{y}\cdot\mathbf{P})}|\mathbf{x}>=|\mathbf{x}+\mathbf{y}>,$$

$$\text{или: } <\mathbf{x}|e^{i(\mathbf{y}\cdot\mathbf{P})}|f>=e^{i(\mathbf{y}\cdot\mathbf{P}_{\mathrm{x}})}f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}+\mathbf{y}),$$

связанных между собой преобразованием Фурье:

$$f(\mathbf{x})=\int d^3\mathrm{k}<\mathbf{x}|\mathbf{k}>\widetilde{f}(\mathbf{k}),\quad \text{где:} \tag{1}$$

$$<\mathbf{x}|\mathbf{k}>=e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}(2\pi)^{-3/2},\quad \text{при: } \hbar=1, \tag{2}$$

есть плоская волна $\mathbf{x}$ -представления состояния $|\mathbf{k}>$ с определенным импульсом $\mathbf{k}$. Для гауссовского волнового пакета $f(\mathbf{x})=\Psi_{\mathbf{k}_0,\mathbf{x}_0,\sigma}(\mathbf{x})$, локализованного в области σ_x вокруг точки $\mathbf{x}_0$ координатного пространства и содержащего, соответственно, плоские волны вблизи импульса $\mathbf{k}_0$ с разбросом $\sigma_p=\sigma_x^{-1}$, при $\Delta\mathbf{x}=\mathbf{x}-\mathbf{x}_0$, $\Delta\mathbf{k}=\mathbf{k}-\mathbf{k}_0$,

$$\widetilde{\Psi}_{\mathbf{k}_0,\mathbf{x}_0,\sigma}(\mathbf{k})=\left(\frac{1}{\pi\sigma_p^2}\right)^{3/4}\exp\left[-\frac{(\Delta\mathbf{k})^2}{2\sigma_p^2}-i(\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0)\right], \tag{3}$$

$$\Psi_{\mathbf{k}_0,\mathbf{x}_0,\sigma}(\mathbf{x})=\left(\frac{1}{\pi\sigma_x^2}\right)^{3/4}\exp\left[-\frac{(\Delta\mathbf{x})^2}{2\sigma_x^2}+i(\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{x})\right], \tag{4}$$

функции (3), (4) представляют *одно и то же нормированное на 1*, пакетное состояние $|\{\mathbf{k}_0,\mathbf{x}_0,\sigma\}>$: $<\{\mathbf{k}_0,\mathbf{x}_0,\sigma\}|\{\mathbf{k}_0,\mathbf{x}_0,\sigma\}>=1$, которое стремится к $(2\sigma_x\sqrt{\pi})^{3/2}|\mathbf{x}_0>$, при $\sigma_x\to 0$, и к $(2\sigma_p\sqrt{\pi})^{3/2}|\mathbf{k}_0>$, при $\sigma_p\to 0$. Однако, гауссовский профиль пакета – отнюдь не единственный возможный в (нерелятивистской) квантовой механике [1].

Цель данной работы – показать, что аксиомы релятивисткой квантовой теории поля однозначно фиксируют вид ковариантного состояния волнового пакета с подобными предельными свойствами, с точностью до несущественного произвола в нормировке, независимо от которого его нерелятивистский предел дает профильную функцию (3), минимизирующую соотношение неопределенностей [1].

2. Релятивистский пакет. Скалярное поле.

Свободное скалярное массивное квантованное поле $\varphi(x)$, $x^\nu=(x^0,\mathbf{x})$, $x^0=t$, $k_\mu=(k^0,-\mathbf{k})$, подчиняясь уравнению Клейна-Гордона, имеет вид:

$$\varphi(x)=\int\frac{d^3\mathrm{k}}{(2\pi)^3 2k^0}\left(a_{\mathrm{k}}f_{\mathrm{k}}(x)+a_{\mathrm{k}}^\dagger f_{\mathrm{k}}^*(x)\right), \tag{5}$$

$$k^0\Rightarrow\frac{E_{\mathrm{k}}}{c}\Rightarrow\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2},\quad a_{\mathbf{k}}|0\rangle=0,\quad a_{\mathbf{k}}^\dagger|0\rangle=|\mathbf{k}\rangle, \tag{6}$$

$$(\partial^2+m^2)\varphi(x)=0,\quad (\partial^2+m^2)f_{\mathrm{k}}(x)=0, \tag{7}$$

где: $c\Rightarrow 1$, a_{k}, $a_{\mathrm{k}}^\dagger$, - операторы уничтожения и рождения из вакуума $|0\rangle$ состояний с определенным импульсом $|\mathbf{k}\rangle$, удовлетворяющие соотношениям:

$$\left[a_{\mathrm{q}},a_{\mathrm{k}}^\dagger\right]=\langle\mathbf{q}|\mathbf{k}\rangle=(2\pi)^3 2E_{\mathrm{k}}\delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{q}), \tag{8}$$

$$\text{а: } \langle 0|\varphi(x)|\mathbf{k}\rangle\equiv f_{\mathrm{k}}(x)=e^{-i(kx)}\Rightarrow\langle x|\mathbf{k}\rangle, \tag{9}$$

с $(kx)=k_\nu x^\nu$, есть плосковолновое решение уравнения Клейна-Гордона (7), являясь по определению координатной волновой функцией состояния с определенной массой m, импульсом $\mathbf{k}$, и энергией $E_{\mathbf{k}}=ck^0$. Состояния (6) отличаются от состояний в (2) Лоренц-инвариантной нормировкой (8):

$$|\mathbf{k}\rangle=(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_{\mathrm{k}}}\,|\mathbf{k}>,\quad \text{где теперь: } c=1, \tag{10}$$

$$\int\frac{d^3\mathrm{k}\,|\mathbf{k}\rangle\langle\mathbf{k}|}{(2\pi)^3 2E_{\mathrm{k}}}=\mathbf{I}_1,\ \text{– одночастичная полнота.} \tag{11}$$

Невозможность пространственной и временной локализации частицы в области меньше $\lambda=\hbar/(mc)$ и λ/c в релятивистской квантовой теории [2–5] *лишает смысла нековариантные состояния* $|\mathbf{x}>$ и (2) *в произвольный момент времени* x^0, как и построенное из них пакетное состояние $(3)\mapsto(1)\mapsto(4)$, и не позволяет определить ковариантный самосопряженный оператор 4-координаты одной частицы. А собственные функции: $\widehat{\mathbf{X}}\langle\mathbf{p}|\mathbf{x}>=\mathbf{x}\langle\mathbf{p}|\mathbf{x}>$ релятивистского обобщения оператора трехмерной координаты [4, 5]: $\widehat{\mathbf{X}}=i\sqrt{E_{\rm p}}\boldsymbol{\nabla}_{\rm p}(\sqrt{E_{\rm p}})^{-1}$, уже не имеют простых свойств собственных функций (2).

Согласно (9), в КТП [3–5] роль оператора рождения из вакуума $|0\rangle$ *ковариантного состояния* с определенной 4-координатой $|x\rangle=|x^0,\mathbf{x}\rangle$, *только при* $x^0=0$ *локализованного в точке* $\mathbf{x}$, играет само вторично квантованное поле (5), и, с учетом (11):

$$\varphi(x)|0\rangle=\int\frac{d^3k|\mathbf{k}\rangle e^{i(kx)}}{(2\pi)^3 2E_{\rm k}}=\int\frac{d^3k\,|\mathbf{k}\rangle\langle\mathbf{k}|x\rangle}{(2\pi)^3 2E_{\rm k}}= \quad (12)$$

$$=|x\rangle\underset{x_0\to 0}{\longmapsto}\int\frac{d^3k|\mathbf{k}\rangle e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}}{(2\pi)^3 2E_{\rm k}}=|0,\mathbf{x}\rangle\neq|\mathbf{x}>. \quad (13)$$

Тогда релятивистский волновой пакет $|\{p_a,x_a,\sigma\}\rangle$ должен, аналогично (3), (4), "интерполировать" между *ковариантным состоянием* (12) с определенной координатой $|x_a\rangle$, при некотором $\sigma\to\infty$, и *ковариантным состоянием* с определенным импульсом $|\mathbf{p}_a\rangle$ (6), (10), при $\sigma\to 0$, а его, аналогичная (9), Лоренц-ковариантная (инвариантная) волновая функция в этом координатном представлении из соображений трансляционной инвариантности, при $\underline{x}=x_a-x$, должна иметь вид:

$$\langle 0|\varphi(x)|\{p_a,x_a,\sigma\}\rangle=e^{-i(p_a x)}\Phi_\sigma(\mathbf{p}_a,x-x_a)\equiv \quad (14)$$

$$\equiv e^{-i(p_a x_a)}\psi_\sigma(\mathbf{p}_a,x_a-x)\equiv F_{p_a x_a}(x),\ \ \text{где:} \quad (15)$$

$$\psi_\sigma(\mathbf{p}_a,\underline{x})=\int\frac{d^3{\rm k}}{(2\pi)^3 2E_{\rm k}}\,\phi^\sigma(\mathbf{k},\mathbf{p}_a)e^{i(k\underline{x})},\ \ \text{или:} \quad (16)$$

$$|\{p_a,x_a,\sigma\}\rangle=\int\frac{d^3{\rm k}\,|\mathbf{k}\rangle}{(2\pi)^3 2E_{\rm k}}\phi^\sigma(\mathbf{k},\mathbf{p}_a)e^{i((k-p_a)x_a)}, \quad (17)$$

при $k^0=E_{\mathbf{k}}$, $p_a^0=E_{\rm p_a}$, и функция $\psi_\sigma(\mathbf{p}_a,x_a-x)$ удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона по обеим переменным x и x_a, в отличии от $\Phi_\sigma(\mathbf{p}_a,-\underline{x})$.

Подлежащая определению скалярная функция $\phi^\sigma(\mathbf{k},\mathbf{p}_a)$ Лоренц-инвариантна ввиду инвариантности меры в (16), (17) и зависит от инвариантов: $\sigma=\sigma_a$, $m=m_a$, ζ_a^2, $(k\zeta_a)$. Времениподобный 4-вектор $\zeta_a(p_a,\sigma_a)=p_a g_1(m_a,\sigma_a)+s_a g_2(m_a,\sigma_a)$ несет основные характеристики и "частицеподобные" квантовые числа пакета, и потому, в общем случае, линейно зависит от 4-векторов импульса p_a и спина s_a пакета: $p_a^2=m_a^2$, $(p_a s_a)=0$, $s_a^2=-m_a^2 S(S+1)$, и $\zeta_a^2=m_a^2\left[g_1^2-S(S+1)g_2^2\right]>0$, $\zeta_a^0>0$, если, без ограничения общности, принять, что $\forall\,\sigma$: $g_1(m,\sigma)\gg|g_2(m,\sigma)|$. Для поля (5) $g_2\equiv 0$.

Пусть в пределе полной пространственной делокализации $\sigma\to 0$ пакет (17) сводится в точности к состоянию с определенным импульсом $|\mathbf{p}_a\rangle$. Тогда:

$$|\{p_a,x_a,\sigma\}\rangle\underset{\sigma\to 0}{\longmapsto}|p_a\rangle,\quad \Phi_\sigma(\mathbf{p}_a,-\underline{x})\underset{\sigma\to 0}{\longmapsto}1, \quad (18)$$

$$\psi_\sigma(\mathbf{p}_a,x_a-x)\underset{\sigma\to 0}{\longmapsto}e^{i(p_a(x_a-x))}, \quad (19)$$

$$\phi^\sigma(\mathbf{k},\mathbf{p}_a)\underset{\sigma\to 0}{\longmapsto}(2\pi)^3\,2E_{\rm k}\delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{p}_a),\ \ \text{при:} \quad (20)$$

$$\left\{g_1(m,\sigma)\gg|g_2(m,\sigma)|,\ \text{и}\ \zeta_a^2,\ \zeta_a^0\right\}\underset{\sigma\to 0}{\longmapsto}+\infty. \quad (21)$$

В обратном пределе $\sigma\to\infty$, соответствующее локализованному в точке x_a возбуждению поля пакетное состояние должно переходить в состояние (12) с точностью до несущественной теперь фазы $\Theta_a=(p_a x_a)$ и нормировочного множителя ${\rm N}_\infty$:

$$|\{p_a,x_a,\sigma\}\rangle\underset{\sigma\to\infty}{\longmapsto}{\rm N}_\infty e^{-i\Theta_a}\varphi(x_a)|0\rangle, \quad (22)$$

$$\psi_\sigma(\mathbf{p}_a,x_a-x)\underset{\sigma\to\infty}{\longmapsto}{\rm N}_\infty\langle 0|\varphi(x)\varphi(x_a)|0\rangle, \quad (23)$$

$$\phi^\sigma(\mathbf{k},\mathbf{p}_a)\underset{\sigma\to\infty}{\longmapsto}{\rm N}_\infty,\ \ \text{при:} \quad (24)$$

$$\left\{g_1(m,\sigma)\gg|g_2(m,\sigma)|,\ \text{и}\ \zeta_a^2,\ \zeta_a^0\right\}\underset{\sigma\to\infty}{\longmapsto}+0. \quad (25)$$

Интегрирование (17) по центру пакета вновь дает плоскую волну, где $\forall\,\phi^\sigma(\mathbf{p}_a,\mathbf{p}_a)\Rightarrow\phi_m^\sigma={\rm const}\neq 0$:

$$|\mathbf{p}_a\rangle=\frac{2E_{\rm p_a}}{\phi_m^\sigma}\int d^3{\rm x}_a|\{p_a,x_a,\sigma\}\rangle. \quad (26)$$

Условия (18)–(20) предъявляются к волновым пакетам в любой теории рассеяния [1–8]. При этом функция $\Phi_\sigma(\mathbf{p}_a,x-x_a)$ в (14) плавно меняется по x, по сравнению с плоской волной $e^{-i(p_a x)}$, и в пределе (18) не дает вклада в плотность потока:

$$\mathcal{J}^\mu_{p_a x_a}(x)=iF^*_{p_a x_a}(x)\overset{\leftrightarrow}{\partial^\mu_x}F_{p_a x_a}(x)\underset{\sigma\to 0}{\longmapsto}2p_a^\mu. \quad (27)$$

Условия (22)–(24) оказываются существенно новыми. Учитывая, что функция Вайтмана справа в (23) является [4–6] граничным значением (см. (75)) по ζ_a (25) аналитической функции комплексного 4-вектора $x-z_a$, при $z_a=x_a+i\zeta_a$ голоморфной в трубе будущего V^+: $\zeta_a^2,\zeta_a^0>0$, и что при выводе асимптотических условий ЛСЦ [5] и редукционных формул для S-матрицы в КТП от пакета (15) требуется [6] бесконечная гладкость по $\mathbf{x}$, ищем функцию $\phi^\sigma(\mathbf{k},\mathbf{p}_a)$, гарантирующую эти свойства для введенного выше вектора $\zeta_a=\zeta_a(p_a,\sigma)$ в виде:

$$\phi^\sigma(\mathbf{k},\mathbf{p}_a)={\rm N}_\sigma\big(m_a,\zeta_a^2\big)\,e^{-(k\zeta_a)},\quad (k\zeta_a)>0. \quad (28)$$

Из иных соображений волновой пакет вида (16), (26), (28) был введен и изучен ранее в работе [9], при $\zeta_a(p_a,\sigma)\Rightarrow p_a g_1(\sigma)=p_a(2\sigma^2)^{-1}$. В итоге:

$$\psi_\sigma(\mathbf{p}_a,x_a-x)={\rm N}_\sigma\frac{1}{i}D^-_{m_a}(x-x_a-i\zeta_a(p_a,\sigma))=$$

$$={\rm N}_\sigma\langle 0|\varphi(x)\varphi(x_a+i\zeta_a(p_a,\sigma))|0\rangle,\ \ \text{где:} \quad (29)$$

$$\frac{1}{i}D^-_m(y)=\int\frac{d^3{\rm k}}{(2\pi)^3 2k^0}\,e^{-i(ky)},\ \ k^0\Rightarrow E_{\rm k}, \quad (30)$$

есть функция Вайтмана [6] свободного поля (5), а пакетное состояние (17) теперь изящно записывается в виде, из которого его предел (22) очевиден:

$$|\{p_a,x_a,\sigma\}\rangle={\rm N}_\sigma e^{-i(p_a x_a)}\varphi(x_a+i\zeta_a(p_a,\sigma))|0\rangle, \quad (31)$$

$$\langle\{\mathbf{p}_a,x_a,\sigma\}|={\rm N}_\sigma e^{i(p_a x_a)}\langle 0|\varphi\left(x_a-i\zeta_a(p_a,\sigma)\right). \quad (32)$$

Оказывается, пакет (28), (31) точно воспроизводит и плосковолновой предел (20), (21), фиксируя вид ${\rm N}_\sigma\big(m,\zeta_a^2\big)$ с точностью до безразмерной функции безразмерного инварианта $\tau = \tau_a = m\sqrt{\zeta_a^2(p_a,\sigma)}$:

$$\mathcal{I}(\tau) = \int \frac{d^3\mathrm{k}\,\phi(\mathbf{k},\mathbf{p}_a)}{(2\pi)^3 2E_\mathrm{k}} = \frac{\mathrm{N}_\sigma}{i} D_m^-(-i\zeta_a(p_a,\sigma)) = \quad (33)$$

$$= \psi_\sigma(\mathbf{p}_a,\underline{0}) = \frac{\mathrm{N}_\sigma m^2}{4\pi^2}\frac{K_1(\tau)}{\tau} \equiv \frac{\aleph(\tau)}{4\pi^2} h\left(\tau^2\right), \quad (34)$$

где: $\aleph(\tau) \equiv \mathrm{N}_\sigma m^2$, $K_1(\tau)$ - функция Макдональда [10]. Условия (20), (21) и (24), (25) фиксируют одинаковую размерность N_σ и лишь соответствующие асимптотики в остальном произвольной безразмерной гладкой функции $\mathcal{I}(\tau)$ (или $\aleph(\tau)$):

$$\mathcal{I}(\infty) = 1,\ \aleph(\tau) \underset{\tau\to\infty}{\longmapsto} 2(2\pi)^{3/2}\tau^{3/2}e^\tau,\ \mathrm{N}_\sigma \underset{\sigma\to 0}{\longmapsto} \infty, \quad (35)$$

$$\lim_{\tau\to 0}\tau^2\mathcal{I}(\tau) = \frac{\aleph(0)}{(2\pi)^2},\ \mathrm{N}_\sigma \underset{\sigma\to\infty}{\longmapsto} \mathrm{N}_\infty = \frac{\aleph(0)}{m^2} \neq 0. \quad (36)$$

Принятое же произвольно в [9] условие $\mathcal{I}(\tau) \equiv 1$ привело к исчезновению там $\aleph(0) \Rightarrow 0 \Leftarrow \mathrm{N}_\infty$, лишившему смысла предельный переход (22)–(24).

Согласно (21) и (51) (ниже), предел (20) определяется лишь свойствами функции $g_1(m,\sigma)$, при $\tau \Rightarrow m^2 g_1(m,\sigma) \equiv (p_a\zeta_a)$, и из (28), (35), с учетом:

$$2(kp) = 2m^2 - (E_\mathrm{k} - E_\mathrm{p})^2 + (\mathbf{k}-\mathbf{p})^2 > 0, \quad (37)$$

$$\text{при: } |\mathbf{k}| = \mathrm{k},\ \ \mathbf{k} = \mathrm{k}\mathbf{n}_\mathrm{k},\ \ |\mathbf{p}| = \mathrm{p},\ \ \mathbf{p} = \mathrm{p}\mathbf{n}_\mathrm{p}, \quad (38)$$

$$\int d\Omega(\mathbf{n}_\mathrm{k})\mathrm{f}(\mathbf{n}_\mathrm{k})\delta(\mathbf{n}_\mathrm{k},\,\mathbf{n}_\mathrm{p}) = \mathrm{f}(\mathbf{n}_\mathrm{p}),\ \ \mathbf{n}_\mathrm{k}^2 = \mathbf{n}_\mathrm{p}^2 = 1, \quad (39)$$

$$\text{комбинируя: } \delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{p}) = \frac{\delta(\mathbf{n}_\mathrm{k},\,\mathbf{n}_\mathrm{p})}{\mathrm{k}^2}\,\delta\left(\mathrm{k}-\mathrm{p}\right), \quad (40)$$

$$\lim_{g_1\to\infty}\left\{\left(\frac{g_1}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-g_1(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2/2}\right\} = \delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{p}), \quad (41)$$

$$\lim_{g_1\to\infty}\left\{\left(\frac{g_1}{2\pi}\right)^{1/2} e^{-g_1(\mathrm{k}-\mathrm{p})^2/2}\right\} = \delta(\mathrm{k}-\mathrm{p}), \quad (42)$$

$$\text{и: } E_\mathrm{k} - E_\mathrm{p} \approx \frac{\mathrm{k}}{E_\mathrm{k}}(\mathrm{k}-\mathrm{p}),\ \text{при: } 1 - \frac{\mathrm{k}^2}{E_\mathrm{k}^2} = \frac{m^2}{E_\mathrm{k}^2}, \quad (43)$$

находим:

$$\phi^\sigma(\mathbf{k},\mathbf{p}) = \mathrm{N}_\sigma e^{-(k\zeta_a)} \underset{\sigma\to 0}{\Longrightarrow} \mathrm{N}_\sigma e^{-(kp)g_1} \underset{g_1\to\infty}{\longmapsto} \quad (44)$$

$$2m(2\pi)^3 e^{g_1(E_\mathrm{k}-E_\mathrm{p})^2/2}\left\{\left(\frac{g_1}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-g_1(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2/2}\right\} \quad (45)$$

$$\underset{g_1\to\infty}{\longmapsto} 2m(2\pi)^3\,\frac{\delta(\mathbf{n}_\mathrm{k},\mathbf{n}_\mathrm{p})}{\mathrm{k}^2}\lim_{g_1\to\infty} e^{g_1(E_\mathrm{k}-E_\mathrm{p})^2/2}$$

$$\cdot\left\{\left(\frac{g_1}{2\pi}\right)^{1/2} e^{-g_1(\mathrm{k}-\mathrm{p})^2/2}\right\} = 2m(2\pi)^3\,\frac{\delta(\mathbf{n}_\mathrm{k},\mathbf{n}_\mathrm{p})}{\mathrm{k}^2}$$

$$\cdot\lim_{g_1\to\infty}\left\{\left(\frac{g_1}{2\pi}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{g_1}{2}\frac{m^2}{E_\mathrm{k}^2}\left(\mathrm{k}-\mathrm{p}\right)^2\right]\right\} =$$

$$= 2m(2\pi)^3\,\frac{\delta(\mathbf{n}_\mathrm{k},\,\mathbf{n}_\mathrm{p})}{\mathrm{k}^2}\cdot\frac{E_\mathrm{k}}{m}\,\delta\left(\mathrm{k}-\mathrm{p}\right) = \quad (46)$$

$$= (2\pi)^3 2E_\mathrm{k}\,\delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{p}).$$

В отличии от [9], данный общий вывод (46) предела (20) не связан с системой покоя пакета $\mathbf{p} = 0$, но явно требует $m > 0$. Предел $m \to 0$ имеет смысл только для пакета нулевой ширины $\sigma = 0$ (плоская волна). Т.е. для безмассовой частицы, с бесконечной комптоновской длиной волны λ, неизбежны проблемы [4] с интерпретацией и (12), (22), (31) как *ее ковариантных локализованных состояний*.

Скалярное произведение состояний (31), (32) оказывается естественно согласовано с произведением [9] в пространстве решений [5, 6] уравнений Клейна-Гордона с одинаковой массой $m_a = m_b$:

$$\langle\{p_b,x_b,\sigma_b\}|\{p_a,x_a,\sigma_a\}\rangle = \mathrm{N}_{\sigma a}\mathrm{N}_{\sigma b}e^{i(p_bx_b)-i(p_ax_a)}$$

$$\cdot\langle 0|\varphi\left(z_b^*\right)\varphi\left(z_a\right)|0\rangle = \quad (47)$$

$$= \frac{\mathrm{N}_{\sigma a}\mathrm{N}_{\sigma b}}{i}e^{i(p_bx_b)-i(p_ax_a)}D^-(z_b^* - z_a) \Longleftrightarrow \quad (48)$$

$$(F_{p_bx_b},F_{p_ax_a}) \equiv i\int d^3\mathrm{x}F^*_{p_bx_b}(x)\overset{\leftrightarrow}{\partial}{}^0_x F_{p_ax_a}(x) = \quad (49)$$

$$= \frac{\mathrm{N}_{\sigma a}\mathrm{N}_{\sigma b}}{i}e^{i(p_bx_b)-i(p_ax_a)}$$

$$\cdot\int d^3\mathrm{x}D^-(z_b^* - x)\overset{\leftrightarrow}{\partial}{}^0_x D^-(x - z_a)\,,\quad \forall\, x^0, \quad (50)$$

что, при $\sigma_a,\sigma_b \to 0$ независимо, сводится к:

$$\langle\mathbf{q}|\mathbf{k}\rangle \Longleftrightarrow (f_\mathbf{q},f_\mathbf{k}) = (2\pi)^3 2E_\mathrm{k}\delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{q}),$$

т.е. к условию (8) для решений (9). Комплексные 4-векторы $z_a \equiv z_a(p_a,\sigma_a) = x_a + i\zeta_a(p_a,\sigma_a)$, с времениподобной мнимой частью $\zeta_a(p_a,\sigma_a)$, задают *единственное корректное аналитическое продолжение* в V^+ всех функций Вайтмана (ФВ) (29), (30), (33), (48), (50). Такое продолжение высших ФВ используется для доказательства дисперсионных соотношений и теоремы Баргмана-Холла-Вайтмана [6, 7], приводящей к PCT-теореме [5–7]. При этом операторы свободного поля от комплексного аргумента вида (31) преобразуются по представлениям комплексной группы Лоренца [7].

По размерным соображениям, из (21) и (25):

$$m^2 g_{1,2}(m,\sigma) \underset{\sigma\to 0}{\longmapsto} \left(\frac{mc}{\sigma}\right)^{\epsilon,\gamma},\ \ \epsilon > \gamma > 0, \quad (51)$$

$$m^2 g_{1,2}(m,\sigma) \underset{\sigma\to\infty}{\longmapsto} \left(\frac{mc}{\sigma}\right)^{A,B},\ \ 0 < A < B, \quad (52)$$

т.е. $\tau \Rightarrow m^2 g_1(m,\sigma) \to \infty$, с $\sigma \to 0$, или с $mc \to \infty$. Тогда, при $g_2 = 0$, нерелятивистский предел пакета (28), согласно (44) и (35), примет вид (45), где теперь $e^{g_1(E_\mathrm{k}-E_\mathrm{p})^2/2} \mapsto 1$. Для $\epsilon = 2$ [9] это отличается от нерелятивистского профиля пакета (3) как раз множителем $2m(2\sigma\sqrt{\pi})^{-3/2}$, при $\sigma = \sigma_p$, а из (13), в силу (2), (10), (11): $\sqrt{2mc}\,|0,\mathbf{x}\rangle \underset{c\to\infty}{\longmapsto} |\mathbf{x}>$.

Неединственность пакета (28) при $g_2 = 0$ означала бы дополнительную полиномиальную зависимость $\mathrm{N}_\sigma \mapsto \widehat{\mathrm{N}}_\sigma$ от $(k-p_a)^2 = 2m_a^2 - 2(kp_a)$, т.е. от (37). Равномерная сходимость интеграла (17) за счет $e^{-(k\zeta_a)}$ приводит тогда к формально прежним выражениям для пакета (14), (15), если "множитель" $\widehat{\mathrm{N}}_\sigma$ вынести за интеграл в виде полиномиального по $\partial^2_{x_a}$ дифференциального оператора, действующего на прежнюю функцию пакета:

$$\phi^\sigma(\mathbf{k},\mathbf{p}_a) \Longrightarrow \widehat{\mathrm{N}}_\sigma\big(m_a,\zeta_a^2,-(k-p_a)^2\big)\,e^{-(k\zeta_a)}, \quad (53)$$

$$F_{p_ax_a}(x) = \frac{\widehat{\mathrm{N}}_\sigma\big(m_a,\zeta_a^2,\partial^2_{x_a}\big)}{i}e^{-i(p_ax_a)}D^-(x-z_a),$$

и то же самое – для состояний (31), (32) и в скалярном произведении (47)–(50). Размерные соображения из (33), (34), при $\tau^2 = m^2\zeta_a^2 \Rightarrow m^4 g_1^2(m,\sigma)$, дают тогда, что $\partial^2_{x_a} \Rightarrow 2m^2(1+\partial_\tau)$, то есть в (34):

$$m^2\widehat{\mathrm{N}}_\sigma = \widehat{\aleph}\big(\tau, \partial^2_{x_a}/\sigma^2\big) \overset{\text{или}}{\Longleftrightarrow} \widehat{\aleph}(\tau, \partial_\tau). \qquad (54)$$

Тогда условию (22) можно удовлетворить, лишь потребовав либо отсутствия вовсе этой дополнительной зависимости в (53), (54), $m^2\widehat{\mathrm{N}}_\infty \Rightarrow \widehat{\aleph}(0)$, приводящей иначе, при $\Theta_a = (p_a x_a)$, к неуместным добавкам вида $(p_a\partial_{x_a})\varphi(x_a)|0\rangle$, либо замены Θ_a в (22) *произвольной фазой*, дающей по сути то же самое $m^2\widehat{\mathrm{N}}_\infty \Rightarrow \widehat{\aleph}(0,0)$. Наконец, подстановка в (53) $m^2\widehat{\mathrm{N}}_\sigma = \widehat{\aleph}\big(\tau, -(k-p_a)^2/\sigma^2\big)$ приводит в нерелятивистском пределе к неизбежной деформации гауссовского профиля (3) полиномом от $(\Delta\mathbf{k})^2/\sigma^2$. В итоге, выражение (28) оказывается единственным физически и математически приемлемым [1].

2. Фермионный пакет.

Релятивистский фермионный волновой пакет строится вполне аналогично описанному выше скалярному пакету. Свободное массивное ферми-поле $\psi(x)$ имеет вид [3–6]:

$$\psi_\alpha(x) = \sum_{r=\pm 1/2} \int \frac{d^3\mathrm{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \Big(a_{\mathrm{k},r} u^{(+)}_\alpha(k,r) f_{\mathrm{k}}(x) +$$

$$+ b^\dagger_{\mathrm{k},r} u^{(-)}_\alpha(k,r) f_{-\mathrm{k}}(x) \Big), \quad k^0 = \frac{E_{\mathrm{k}}}{c} \Rightarrow E_{\mathrm{k}}, \qquad (55)$$

и соответственно, для дираковски-сопряженного поля $\overline{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0$. Биспиноры $u^\xi(k,r)$ являются решениями свободного уравнения Дирака $[(\gamma k) - \xi m]\, u^\xi(k,r) = 0$, с положительной и отрицательной энергией в соответствии с индексом $\xi = \pm$, и определяют матричные элементы [3, 6]:

$$\langle 0|\psi(x)|(+);\mathbf{k},s\rangle = u^{(+)}(k,s) f_{\mathrm{k}}(x) = \mathcal{U}^{(+)}_{\mathrm{k},s}(x),$$

$$\langle \mathbf{k},s;(+)|\overline{\psi}(x)|0\rangle = \overline{u}^{(+)}(k,s) f^*_{\mathrm{k}}(x) = \overline{\mathcal{U}}^{(+)}_{\mathrm{k},s}(x),$$

$$\langle 0|\overline{\psi}(x)|(-);\mathbf{k},s\rangle = \overline{u}^{(-)}(k,s) f^*_{-\mathrm{k}}(x) = \overline{\mathcal{U}}^{(-)}_{\mathrm{k},s}(x),$$

$$\langle \mathbf{k},s;(-)|\psi(x)|0\rangle = u^{(-)}(k,s) f_{-\mathrm{k}}(x) = \mathcal{U}^{(-)}_{\mathrm{k},s}(x),$$

$$\text{где: } k^\mu = (E_{\mathrm{k}}, \mathbf{k}), \quad f_{\xi\mathrm{k}}(x) = e^{-i\xi(kx)}, \qquad (56)$$

$$|(+);\mathbf{k},s\rangle = a^\dagger_{\mathrm{k},s}|0\rangle, \quad |(-);\mathbf{k},s\rangle = b^\dagger_{\mathrm{k},s}|0\rangle,$$

$$u^\xi(k,s)\overline{u}^\xi(k,s) = [(\gamma k) + \xi m]\,\frac{1}{2}\,[1 + \gamma_5(\gamma\widehat{s})]\,,$$

$$\overline{u}^\xi(k,s) u^\eta(k,r) = 2m\xi\delta_{\xi\eta}\delta_{rs}, \quad \overline{u} = u^\dagger\gamma^0, \quad \widehat{s}^2 = -1,$$

$$u^{\xi\dagger}(k^0, \xi\mathbf{k}; s) u^\eta(k^0, \eta\mathbf{k}; r) = 2E_{\mathrm{k}}\delta_{rs}\delta_{\xi\eta},$$

$$\Big\{a_{\mathrm{q},r}, a^\dagger_{\mathrm{k},s}\Big\} = \Big\{b_{\mathrm{q},r}, b^\dagger_{\mathrm{k},s}\Big\} \Longleftrightarrow \langle \mathbf{q},r;\xi|\eta;\mathbf{k},s\rangle =$$

$$= (2\pi)^3 2E_{\mathrm{k}}\delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{q})\delta_{rs}\delta_{\xi\eta} =$$

$$= \Big(\mathcal{U}^\xi_{\mathrm{q},s}, \mathcal{U}^\eta_{\mathrm{k},r}\Big) = \int d^3\mathrm{x}\, \mathcal{U}^{\xi\dagger}_{\mathrm{q},s}(x)\mathcal{U}^\eta_{\mathrm{k},r}(x).$$

Аналогично скалярному случаю (31), (32), вектора состояний пакетов, для $\xi = +$ и $-$, имеют вид:

$$|(+);\{\mathbf{p}_a, x_a, s_a\}\rangle = \widehat{\mathrm{N}}^\xi_{\sigma a}\overline{\psi}\,(x_a + i\zeta_a)\,|0\rangle\, \mathcal{U}^{(+)}_{\mathrm{p}_a,s_a}(x_a),$$

$$|(-);\{\mathbf{p}_a, x_a, s_a\}\rangle = \widehat{\mathrm{N}}^\xi_{\sigma a}\overline{\mathcal{U}}^{(-)}_{\mathrm{p}_a,s_a}(x_a)\psi\,(x_a + i\zeta_a)\,|0\rangle,$$

$$\text{при: } \widehat{\mathrm{N}}^\xi_{\sigma a} = \frac{\xi \mathrm{N}_{\sigma a}}{2m}, \quad \Xi^\xi_{p_a,x_a,s_a}(x) \underset{\sigma\to 0}{\longmapsto} \mathcal{U}^\xi_{\mathrm{p}_a,s_a}(x), \quad (57)$$

где, для волновых функций этих состояний и их дираковски-сопряженных, соответственно с (56) и аналогично (15), (29), при $\underline{x} = x_a - x$, $z_a = x_a + i\zeta_a$, $\zeta_a = \zeta_a(p_a, \sigma_a)$, $\xi = \pm$, имеем:

$$\Xi^{(+)}_{p_a,x_a,s_a}(x) = \langle 0|\psi(x)|(+);\{\mathbf{p}_a, x_a, s_a\}\rangle = \qquad (58)$$

$$= \widehat{\mathrm{N}}^\xi_{\sigma a}\langle 0|\psi(x)\overline{\psi}\,(x_a + i\zeta_a)\,|0\rangle\, \mathcal{U}^{(+)}_{\mathrm{p}_a,s_a}(x_a) =$$

$$= (-i)\widehat{\mathrm{N}}^\xi_{\sigma a} S^-(-\underline{x} - i\zeta_a)\, \mathcal{U}^{(+)}_{\mathrm{p}_a,s_a}(x_a), \qquad (59)$$

$$\overline{\Xi}^{(+)}_{p_a,x_a,s_a}(x) = \langle\{\mathbf{p}_a, x_a, s_a\};(+)|\overline{\psi}(x)|0\rangle =$$

$$= (-i)\widehat{\mathrm{N}}^\xi_{\sigma a}\overline{\mathcal{U}}^{(+)}_{\mathrm{p}_a,s_a}(x_a) S^-\left(\underline{x} - i\zeta_a\right),$$

$$\Xi^{(-)}_{p_a,x_a,s_a}(x) = \langle\{\mathbf{p}_a, x_a, s_a\};(-)|\psi(x)|0\rangle =$$

$$= \widehat{\mathrm{N}}^\xi_{\sigma a}\langle 0|\overline{\psi}_\beta(x_a - i\zeta_a)\,\psi(x)|0\rangle\, \mathcal{U}^{(-)}_{\mathrm{p}_a,s_a,\beta}(x_a) =$$

$$= (-i)\widehat{\mathrm{N}}^\xi_{\sigma a}\, S^+_{\alpha\beta}(-\underline{x} + i\zeta_a)\, \mathcal{U}^{(-)}_{\mathrm{p}_a,s_a,\beta}(x_a),$$

$$\overline{\Xi}^{(-)}_{p_a,x_a,s_a}(x) = \langle 0|\overline{\psi}(x)|(-);\{\mathbf{p}_a, x_a, s_a\}\rangle =$$

$$= \widehat{\mathrm{N}}^\xi_{\sigma a}\overline{\mathcal{U}}^{(-)}_{\mathrm{p}_a,s_a,\alpha}(x_a)\langle 0|\overline{\psi}(x)\psi_\alpha(x_a + i\zeta_a)|0\rangle =$$

$$= (-i)\widehat{\mathrm{N}}^\xi_{\sigma a}\overline{\mathcal{U}}^{(-)}_{\mathrm{p}_a,s_a,\alpha}(x_a) S^+_{\alpha\beta}(\underline{x} + i\zeta_a)\,. \qquad (60)$$

Здесь фермионные ФВ $S^\pm(x)$ связаны друг с другом: $S^+(x) = -CS^{-\top}(-x)C^{-1}$, а также с пропагатором $S^c(x) = CS^{c\top}(-x)C^{-1}$ и с функциями скалярного поля: $D^-(x)$ (30) и $D^+(x) = -D^-(-x)$, (75), где $C\gamma^\top_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu$, и $C^\top = -C$ - матрица зарядового сопряжения, соотношениями [4–7]:

$$S^c(x) = \theta(x^0)S^-(x) - \theta(-x^0)S^+(x), \quad \xi = \pm, \qquad (61)$$

$$S^{\mathrm{Z}}(x) = [i(\gamma\partial_x) + m]\, D^Z(x), \quad \mathrm{Z} = c, \xi, \text{ и т.д.}, \qquad (62)$$

$$\frac{1}{i}S^\xi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3}\theta(k^0)\delta(k^2 - m^2)e^{i\xi(kx)}\,[(\gamma k) - m\xi]\,,$$

и вместо (48)–(50), $\forall\, \varrho^0$ подчинены условию [4–6]:

$$\int d^3\rho \frac{1}{i}S^\xi(x - \varrho)\gamma^0\frac{1}{i}S^\eta(\varrho - y) = \delta_{\xi\eta}\frac{1}{i}S^\xi(x - y). \quad (63)$$

Скалярное произведение ферми-пакетов равно:

$$\langle(\xi);\{\mathbf{p}_a, x_a, s_a\}||(\eta);\{\mathbf{p}_c, x_c, s_c\}\rangle = \delta_{\xi\eta}\widehat{\mathrm{N}}^\xi_{\sigma a}\widehat{\mathrm{N}}^\xi_{\sigma c}$$

$$\cdot\left\{\begin{matrix} \overline{\mathcal{U}}^{(+)}_{\mathrm{p}_a,s_a,\alpha}(x_a)\langle 0|\psi_\alpha\left(z^*_a\right)\overline{\psi}_\beta\left(z_c\right)|0\rangle\mathcal{U}^{(+)}_{\mathrm{p}_c,s_c,\beta}(x_c) \\ \overline{\mathcal{U}}^{(-)}_{\mathrm{p}_c,s_c,\alpha}(x_c)\langle 0|\overline{\psi}_\beta\left(z^*_a\right)\psi_\alpha\left(z_c\right)|0\rangle\mathcal{U}^{(-)}_{\mathrm{p}_a,s_a,\beta}(x_a) \end{matrix}\right\}$$

$$= \delta_{\xi\eta}\widehat{\mathrm{N}}^\xi_{\sigma a}\widehat{\mathrm{N}}^\xi_{\sigma c} \qquad (64)$$

$$\cdot\left\{\begin{matrix} \overline{\mathcal{U}}^{(+)}_{\mathrm{p}_a,s_a}(x_a) \\ \overline{\mathcal{U}}^{(-)}_{\mathrm{p}_c,s_c}(x_c) \end{matrix}\right\} S^{-\xi}(\xi\left(z^*_a - z_c\right)) \left\{\begin{matrix} \mathcal{U}^{(+)}_{\mathrm{p}_c,s_c}(x_c) \\ \mathcal{U}^{(-)}_{\mathrm{p}_a,s_a}(x_a) \end{matrix}\right\} =$$

$$\delta_{\xi\eta}\int d^3\mathrm{x} \left\{\begin{matrix} \overline{\Xi}^{(+)}_{p_a,x_a,s_a}(x)\,\gamma^0\,\Xi^{(+)}_{p_c,x_c,s_c}(x) \\ \overline{\Xi}^{(-)}_{p_c,x_c,s_c}(x)\,\gamma^0\,\Xi^{(-)}_{p_a,x_a,s_a}(x) \end{matrix}\right\} \underset{x^0_a > x^0_c}{\Longrightarrow} \qquad (65)$$

$$\delta_{\xi\eta}\int d^3\mathrm{x}\overline{\Xi}^\xi_{\{a/c\}}(x)\gamma^0\int d^3\mathrm{y} S^c(x - y)\frac{\gamma^0}{i}\Xi^\xi_{\{c/a\}}(y). \quad (66)$$

Выражение (64) или (48) не зависит от выбора x^0 и y^0 в (65), (66), или в (49), (50), соответственно. Однако, при $x^0_a > x^0_c$, согласно принципу Гюйгенса, его можно рассматривать как проекцию конечного пакета "a" на результат эволюции (66) начального пакета "c" в соответствии с причинным пропагатором $S^c(x - y)$, в котором (в которой) эти пакеты, согласно (61), (63), выделяют *причинную последовательность* событий, в обоих случаях отвечающую: $\theta(x_a^0 - x^0)\theta(x^0 - y^0)\theta(y^0 - x_c^0) \mapsto \theta(x_a^0 - x_c^0)$, или $\theta(x^0 - x_c^0)\theta(y^0 - x^0)\theta(x_a^0 - y^0) \mapsto \theta(x_a^0 - x_c^0)$, если, конкретизируя процесс, приписать упорядочивающие θ-функции самим пакетам [4].

При $a = c$, $\xi = \eta$, $s_a^\mu = m\sqrt{S(S+1)}\widehat{s}_a^\mu$, из (64) для нормировки ферми-пакета, с учетом (56), (30), (33), (34), и $m^2\zeta_a^2 = \tau^2$, имеем:

$$\mathrm{A}_\sigma^2 = \langle(\xi);\{\mathbf{p}_a, x_a, s_a\}|(\xi);\{\mathbf{p}_a, x_a, s_a\}\rangle = \tag{67}$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_\mathbf{k}} |\phi^\sigma(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a)|^2$$

$$\cdot \left[\overline{\mathcal{U}}^\xi_{\mathrm{p}_a, s_a}(x_a)\frac{(\gamma k) + \xi m}{(2m)^2}\mathcal{U}^\xi_{\mathrm{p}_a, s_a}(x_a)\right] =$$

$$= \mathrm{N}_\sigma^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_\mathbf{k}} e^{-2(k\zeta_a(p_a,\sigma_a))}$$

$$\cdot\, \mathrm{Sp}\left[\frac{(\gamma k) + \xi m}{(2m)^2}\left[(\gamma p_a) + \xi m\right]\frac{[1 + \gamma_5(\gamma\widehat{s}_a)]}{2}\right] =$$

$$= \mathrm{N}_\sigma^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_\mathbf{k}} e^{-2(k\zeta_a(p_a,\sigma_a))}\left[\frac{1}{2} + \frac{(kp_a)}{2m^2}\right] =$$

$$= \mathrm{N}_\sigma^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{(p_a\partial_{\zeta_a})}{4m^2}\right]\frac{1}{i}D_m^-\left(-2i\zeta_a(p_a, \sigma_a)\right) =$$

$$= \frac{\aleph^2(\tau)}{m^2 4\pi^2}\left[\frac{1}{2} - \frac{(p_a\zeta_a)}{2}\frac{\partial}{\partial\tau^2}\right] h\left(4\tau^2\right). \tag{68}$$

Для скалярного пакета (48) здесь нужно опустить всюду квадратные скобки. Пренебрегая g_2, при $\eta \equiv 2\tau$, с учетом (34), для (68) находим [10]:

$$\mathrm{A}_\sigma^2 \Longrightarrow \frac{\aleph^2(\tau)}{m^2 4\pi^2}\left[\frac{K_1(\eta) + K_2(\eta)}{2\eta}\right].$$

Такая нормировка ферми-пакета с заданным спином согласована с нормировкой скалярного пакета, совпадая с ней при $\sigma \to 0$, $\eta \to \infty$ [10]. Хотя эта согласованность сохранится и в случае зависимости (53), (54), подчеркнем, что вид (28), (34), (44) функции $\phi^\sigma(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a)$ фиксирован уже единственным образом *для любого спина* условием единственности аналитического продолжения ФВ, предельными условиями (20), (21) и (24), (25), и условием согласованности (57) с ферми - пакетом, поскольку, как видим, само появление дополнительной полиномиальной зависимости от (kp_a) в (68) уже регламентировано именно зависимостью от спина.

Произвол в функциях $g_{1,2}(m, \sigma)$ со свойствами (51), (52) определяет лишь несущественные детали зависимости $\tau = \tau(mc/\sigma)$. Тогда как оставшийся неустранимый произвол в выборе функции $\aleph(\tau)$ (или $\mathcal{I}(\tau)$) со свойствами (35), (36) диктует общий вид наблюдаемых величин, в том числе средних значений произвольного оператора Q по пакетным состояниям, сокращаясь только в отношении:

$$\langle\!\langle Q\rangle\!\rangle = \frac{\langle(\xi);\{\mathbf{p}_a, x_a, s_a\}|Q|(\xi);\{\mathbf{p}_a, x_a, s_a\}\rangle}{\mathrm{A}_\sigma^2}. \tag{69}$$

Поэтому дальнейшие предсказания для таких величин со скалярными пакетами не будут отличаться от их предсказаний из работы [9], где $\mathcal{I}(\tau) \equiv 1$.

3. Осцилляции нейтрино.

Учет спиновых степеней свободы потенциально важен в подходе *промежуточных волновых пакетов* [11, 12] к теории нейтринных осцилляций. Соответствующее обобщение метода Blasone, с учетом [13–15], приводит, аналогично (67)–(68), к выражению для двухфлейворных осцилляций лептонного заряда электронного нейтрино ν_e:

$$Q_e(t) = G_\vartheta^{-1}(t)Q_1G_\vartheta(t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k},1}}\sum_{r=\pm1/2} \tag{70}$$

$$\cdot\left[a^{e\dagger}_{\mathrm{k},r}(t)a^e_{\mathrm{k},r}(t) - b^{e\dagger}_{-\mathrm{k},r}(t)b^e_{-\mathrm{k},r}(t)\right], \tag{71}$$

$$\langle\!\langle Q_e(t)\rangle\!\rangle_e = \frac{\langle\nu_e\{p_1, x_1, s_1\}|Q_e(t)|\nu_e\{p_1, x_1, s_1\}\rangle}{\mathrm{A}_{\sigma e}^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{N}_{\sigma1}^2}{\mathrm{A}_{\sigma1}^2}\int\frac{d^3\mathbf{k}\, e^{-2(k\zeta_1(p_1,\sigma_1))}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k},1}}\left[\frac{1}{2} + \frac{(kp_1)}{2m_1^2}\right]\mathcal{Q}_{\mathbf{k},e}(t),$$

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{k},e}(t) = 1 - \sin^2 2\theta\left[|U_\mathbf{k}|^2\sin^2\left(\frac{E_{\mathbf{k},1} - E_{\mathbf{k},2}}{2}t\right)\right.$$

$$\left.+|V_\mathbf{k}|^2\sin^2\left(\frac{E_{\mathbf{k},1} + E_{\mathbf{k},2}}{2}t\right)\right], \quad \text{где:} \tag{72}$$

$$|U_\mathbf{k}| = \frac{|\mathbf{k}|^2 + (E_{\mathbf{k},1} + m_1)(E_{\mathbf{k},2} + m_2)}{2\sqrt{E_{\mathbf{k},1}E_{\mathbf{k},2}(E_{\mathbf{k},1} + m_1)(E_{\mathbf{k},2} + m_2)}},$$

$$|V_\mathbf{k}| = \frac{(E_{\mathbf{k},2} + m_2) - (E_{\mathbf{k},1} + m_1)}{2\sqrt{E_{\mathbf{k},1}E_{\mathbf{k},2}(E_{\mathbf{k},1} + m_1)(E_{\mathbf{k},2} + m_2)}}|\mathbf{k}|,$$

$$\text{при: } m_1 < m_2, \quad |U_\mathbf{k}|^2 + |V_\mathbf{k}|^2 = 1,$$

$$\text{и: } |\nu_e\{p_1, x_1, s_1\}\rangle = G_\vartheta^{-1}(x_1^0)|\nu_1\{p_1, x_1, s_1\}\rangle, \tag{73}$$

$$\text{при: } \mathrm{A}_{\sigma e}^2 = \langle\nu_e\{p_1, x_1, s_1\}|\nu_e\{p_1, x_1, s_1\}\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle\nu_1\{p_1, x_1, s_1\}|\nu_1\{p_1, x_1, s_1\}\rangle = \mathrm{A}_{\sigma1}^2,$$

– нормированное прежним образом (67)–(68) состояние пакета с определенным флейвором типа [14], заданное таким же несобственным преобразованием (70) [13–15], $a^e_{\mathrm{k},r}(x^0) = G_\vartheta^{-1}(x^0)a^1_{\mathrm{k},r}G_\vartheta(x^0)$, операторов уничтожения/рождения $a^1_{\mathrm{k},r}$, $b^1_{\mathrm{k},r}$ состояний массивного поля (55), которые тем же выражением (70)-(71) определяют уже не зависящий от времени оператор его заряда Q_1 [3, 15]. В итоге, для каждого спина, в обозначениях (72), имеем: $\langle\!\langle Q_e(t)\rangle\!\rangle_e = 1 - \sin^2 2\theta\langle\!\langle[..t..]\rangle\!\rangle_e$, что, конечно, воспроизводит известные предельные случаи [14] и при усреднении по времени дает известный результат: $\overline{\langle\!\langle Q_e(t)\rangle\!\rangle}_e = 1 - (1/2)\sin^2 2\theta$.

Напротив, в подходе “макроскопических фейнмановских диаграмм” [9, 16] волновые пакеты описывают только частицы, *внешние* по отношению к промежуточному нейтрино. Соответствующее выражение для такой диаграммы отличается от (66) заменой трехмерных интегралов четырехмерными, а пакетного фактора $\gamma^0\Xi^\xi_{\{c/a\}}(y)$ – произведением соответствующей вершины на волновые функции всех остальных входящих в нее частиц [9, 16]. Причем, в работе [12] в гауссовском приближении (3) установлена возможность редукции этого произведения “обратно” к (гауссовскому) волновому пакету для *промежуточного нейтрино*.

Более того, формула (66), с точностью до обозначений и нормировки пакетов, а также замены полного пропагатора $S^c_j(x,y)$ свободным $S^c_j(x-y)$, как нулевым членом его разложения в ряд по взаимодействию с внешним полем или внешней "среды", совпадает с известной формулой Фейнмана [17] для амплитуды вероятности перехода из состояния $|c\rangle$ в прошлом в состояние $\langle a|$ в будущем, если j - индекс массы m_j *промежуточного массивного нейтрино*:

$$\mathcal{A}^j_{ac} = \int d^3\mathrm{x} \int d^3\mathrm{y}\, \Xi^{\xi}_{\{a/c\}}(x)\gamma^0 S^c_j(x,y)\frac{\gamma^0}{i}\Xi^{\xi}_{\{c/a\}}(y). \quad (74)$$

Причем, во втором порядке по взаимодействию со "средой" [17] эта амплитуда вновь воспроизводит одну из "макроскопических фейнмановских диаграмм" [9, 16], если источник и детектор нейтрино также считать частью "среды". Формулы (74) и (66) демонстрируют, таким образом, условность различия этих двух подходов даже в отсутствии редукции вида [12] непосредственно для пакетов (29), (58)–(60).

Заключение

В работе установлен общий вид "интерполирующего" релятивистского ковариантного волнового пакета для полей частиц с различными спинами, согласованного с аксиомами КТП, указывающий на глубокий физический смысл единственности аналитического продолжения в V^+ функции Вайтмана свободного поля [5–7], а также неустранимости нормировочного произвола пакетного состояния. Данный пакет содержит, не смешивая, только ковариантные состояния [4] частиц (античастиц) с положительной (отрицательной) энергией, имея нерелятивистский гауссовский пакет (3) своим точным нерелятивистским пределом независимо от нормировочного произвола (33), (34), [9]. Следовательно, основанное на этом предельном случае утверждение о неизбежности примеси состояний с отрицательной энергией [8, 11] может иметь лишь ограниченный смысл. Это относится и к *приближению* "стабильных релятивистских гауссовских пакетов" [9]. В отличии от квантовой механики, релятивистская КТП допускает "интерполирующие" волновые пакеты лишь вида (28), (29).

Формулы (65), (66) демонстрируют отсутствие расплывания в результате причинной эволюции для любого релятивистского волнового пакета [17], не смешивающего состояния частиц с разными знаками энергии (с античастицами). Но именно для пакетов (28), (29), (58)–(60) естесвенно возникающее в конкретных процессах причинное упорядочение (66) приводит к естественному стиранию различий между пропагатором и волновой функцией такого, полностью локализованного для $V^+ \ni \zeta_a \to 0$, пакетного состояния, поскольку все эти функции являются просто по разному определенными граничными значениями одной и той же, заданной в (34) аналитической функции $h(w)$ [7]:

$$D^{\mp}(x) = \pm \lim_{V^+\ni\zeta\to 0} i\frac{m^2}{4\pi^2}\, h\left(-m^2(x\mp i\zeta)^2\right), \qquad (75)$$

$$-\, w/m^2 = (x\mp i\zeta)^2 \Rightarrow x^2 \mp 2i(x\zeta) \Rightarrow x^2 \mp 2ix^0\zeta^0,$$

$$D^c(x) = \theta(x^0)D^-(x) - \theta(-x^0)D^+(x) = \qquad (76)$$

$$= i\frac{m^2}{4\pi^2}\, h\left(m^2\left(i0 - x^2\right)\right), \quad -w/m^2 = x^2 - i0,$$

и соответственно, для фермионных функций (62).

Авторы благодарны В.А. Наумову и Д.В. Наумову за полезные обсуждения, приведшие к постановке задачи, и Н.В. Ильину и А.Э. Растегину за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика.* М. Наука, 1974. 752 с.; Гольдбергер М., Ватсон К. *Теория столкновений.* М. Мир, 1967. 823 с.

Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. *Квантовая электродинамика.* М. Наука, 1980. 704 с.

Вергелес С.Н. *Лекции по квантовой электродинамике.* М. Физматлит, 2006. 248 с.

Тирринг В.Е. *Принципы квантовой электродинамики.* М. ВШ, 1964. 227 с.

Швебер С. *Введение в релятивистскую квантовую теорию поля.* М. ИЛ, 1963. 842 с.

Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т. *Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля.* М. Наука, 1969. 424 с.

Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т. *Общие принципы квантовой теории поля.* М. Наука, 1987. 616 с.

Бьеркен Дж. Д., Дрелл С.Д. *Релятивистская квантовая теория.* М. Наука, 1978. 296 с.

Naumov D. V., Naumov V. A. *A diagrammatic treatment of neutrino oscillations.* J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **37** (2010) 105014. arXiv:1008.0306v2 [hep-ph].

Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. 2, М. Наука, 1974. 296 с.

Bernardini A. E, De Leo S. *Flavor and chiral oscillations with Dirac wave packets.* Phys. Rev. D 71, (2005) 076008 arXiv:hep-ph/0504239,

Giunti C. *Neutrino Wave Packets in Quantum Field Theory.* JHEP **11**, (2002) 017.

Blasone M., Henning P. A., Vitiello G. *The exact formula for neutrino oscillations.* Phys. Lett. **B 451**, 140-145 (1999) arXiv:arXiv:hep-th/9803157,

Blasone M., Pacheco P.P., Tseung H.W.C., *Neutrino oscillations from relativistic flavor currents.* Phys. Rev. **D 67**, (2003) 073011

Blasone M., Vitiello G. *Quantum Field Theory of Particle Mixing and Oscillations.* Symmetries in Science XI 2005, pp. 105-128

Beuthe M. *Oscillations of neutrinos and mesons in quantum field theory.* Phys. Rep. **375** , (2003) 105–218..

Фейнман Р. *Квантовая электродинамика.* М. Мир, 1964. 216 с.

Иркутский государственный университет. Иркутск.