

МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ ПОЛЯ ИОНОСФЕРНОЙ ВОЛНЫ И ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛА ПРИ ДИАГНОСТИКЕ НЕОДНОРОДНОЙ ИОНОСФЕРЫ

М.В. Тинин

METHODS FOR DESCRIBING THE IONOSPHERIC WAVE FIELD AND SPATIAL SIGNAL PROCESSING IN THE DIAGNOSTICS OF INHOMOGENEOUS IONOSPHERE

M.V. Tinin

Рассматриваются возможности применения как классических, так и новых методов описания распространения волн для решения некоторых задач ионосферного распространения радиоволн.

Possibilities of application of both classical and new methods for the description of wave propagation to solving some problems of ionospheric propagation of radio waves are considered.

Введение

Успех того или иного способа диагностики неоднородных сред в большой степени зависит от используемой пространственно-временной модели зондирующего сигнала, которая, в свою очередь, определяется методом описания распространения волн. Чем точнее этот метод, тем большей точности можно ожидать от использующего его метода диагностики. Однако, во-первых, на практике точных методов для произвольных неоднородных сред не существует. Во-вторых, часто методы с большой точностью настолько громоздки, что с их помощью не только очень трудно восстанавливать структуру неоднородной среды, а просто невозможно как-либо интерпретировать результаты наблюдений. Поэтому при разработке методов диагностики необходим компромисс между точностью и удобством извлечения информации из результатов измерений. Здесь мы вкратце рассмотрим ряд приближенных методов решения волновых задач и приведем некоторые примеры их использования при исследовании ионосферного распространения радиоволн.

Теория возмущений. Борновское приближение в волновой задаче

Как известно, в скалярном приближении поле волны, излученной гармоническим источником, в неоднородной среде описывается уравнением Гельмгольца

$$\Delta U(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + k^2 \varepsilon(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (1)$$

При произвольной зависимости $\varepsilon(\mathbf{r})$ для решения волнового уравнения необходимо использовать приближенные методы. В теории однократного рассеяния в качестве малого параметра используется отклонение проницаемости $\varepsilon(\mathbf{r})$ от ее невозмущенного значения $\bar{\varepsilon}(\mathbf{r})$. Для учета этого представим $\varepsilon(\mathbf{r})$ в виде

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \bar{\varepsilon}(\mathbf{r}) + \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}),$$

где $|\bar{\varepsilon}(\mathbf{r})| \gg |\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})|$.

Теперь, решая уравнение (1) методом итераций, получаем ряд, который называется борновским разложением или разложением по кратности рассеяния. Обычно ограничиваются приближением однократно рассеянного поля, называемым также

борновским приближением. В этом приближении для случая, когда среда распространения близка однородной, для рассеянного поля имеем

$$U_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{k^2 A \exp\{ik\varphi\}}{rr_0} \times \int_V \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}') \exp\{-i\mathbf{Q}\mathbf{r}'\} d^3 r' = \frac{k^2 2\pi^2 A \exp\{ik\varphi\}}{rr_0} \Phi_\varepsilon(\mathbf{Q}), \quad (2)$$

где

$$\varphi = [r_0 + r], \quad \mathbf{Q} = k[\mathbf{n}_s - \mathbf{n}_i],$$

$$\Phi_\varepsilon(\mathbf{Q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}') \exp\{-i\mathbf{r}'\mathbf{Q}\} d^3 r' -$$

пространственный спектр неоднородности. Следовательно, измеряя пространственный спектр рассеянного поля, мы получаем пространственную структуру неоднородности. Это свойство однократного рассеяния лежит в основе дифракционной томографии.

Если спектр $\Phi_\varepsilon(\mathbf{Q})$ имеет максимум в нуле, рассеяние имеет максимум в направлении вперед. При увеличении значения kl_ε , где l_ε – характерный масштаб неоднородности, этот максимум сужается. Это говорит о том, что крупномасштабные неоднородности $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})$ рассеивают в основном вперед.

Геометрооптическое приближение

Теория однократного рассеяния применима только для слабого рассеяния. Но, когда имеет место рассеяние в основном вдоль какого-то направления (например вперед) в сплошной неоднородной среде, происходит множество актов рассеяния. Для описания многократного рассеяния используются другие методы. Наибольшее распространение получил метод геометрической оптики (ГО).

Будем считать, что в уравнении Гельмгольца (1) $\varepsilon(\mathbf{r})$ – медленная функция, и искать решение уравнения (1) в общем случае неоднородной среды в виде ряда Дебая

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp\{ik\varphi(\mathbf{r})\} = \sum_0^\infty \frac{A^{(n)}(\mathbf{r})}{(ik)^n} \exp\{ik\varphi(\mathbf{r})\}. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ik , получаем уравнение эйконала для $\varphi(\mathbf{r})$ и уравнения переноса для $A^{(n)}(\mathbf{r})$, которые решаются с помощью лучевых уравнений. Имеется много способов (аналитических и численных) решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Тем не менее, и здесь полезно использовать теорию возмущений, но не для поля, а для определения лучей. В результате, когда фоновая среда однородна, т. е. при $\varepsilon(\mathbf{r}) = \bar{\varepsilon}(\mathbf{r}) + \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}) = 1 + \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})$, получаем следующее выражение для поля:

$$U(\mathbf{r}) \approx \frac{U_0(\mathbf{r})}{\sqrt{1 + D_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0)}} \exp\{ik\tilde{\varphi}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0)\}, \quad (4)$$

где

$$\tilde{\varphi}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0) = 0.5 \int_{z_0}^z \tilde{\varepsilon} \left[\boldsymbol{\rho} \frac{z' - z_0}{z - z_0} + \boldsymbol{\rho}_0 \frac{z - z'}{z - z_0}, z' \right] dz', \quad (5)$$

$$\mathbf{r} = \{x, y, z\} = \{\boldsymbol{\rho}, z\},$$

$$D_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0) = (z - z_0) \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\rho} \partial \boldsymbol{\rho}_0} \tilde{\varphi}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0).$$

В условиях применимости ГО-приближения, измеряя фазовую добавку $\tilde{\varphi}(\mathbf{r})$, можно из линейного интеграла (5) восстановить параметры неоднородной среды с помощью, например, компьютерной томографии. Условия применимости ГО-приближения – это условия превышения продольных размеров неоднородностей над длиной волны и поперечных размеров над радиусом Френеля, т. е.

$$l_{\parallel} \gg \lambda, \quad (6)$$

$$l_{\perp} \gg a_F = \sqrt{\lambda(z - z')(z' - z_0)/(z - z_0)}, \quad (7)$$

где $z' - z$ – координата неоднородности. Условия (6)–(7) определяют минимальный размер неоднородности, диагностика которой возможна на базе ГО-модели.

Метод плавных возмущений (метод Рытова)

Промежуточным между двумя предыдущими методами является метод плавных возмущений (метод Рытова). Если в борновском приближении теория возмущений применяется к самому полю, а в ГО – к определению фазы и амплитуды, то в методе плавных возмущений (МПВ) сначала от поля $U(\mathbf{r})$ переходят к комплексной фазе $\tilde{\Phi}(\mathbf{r})$:

$$U(\mathbf{r}) = U_0(\mathbf{r}) \exp\{\tilde{\Phi}(\mathbf{r})\},$$

затем решается уравнение для комплексной фазы $\tilde{\Phi}(\mathbf{r})$ методом возмущений. При известной комплексной фазе $\tilde{\Phi}(\mathbf{r})$ нетрудно найти фазу $k\tilde{\varphi} = \text{Im} \tilde{\Phi}$ и амплитуду $A = A_0 \exp[\text{Re} \tilde{\Phi}]$. Для крупномасштабных неоднородностей, у которых минимальный размер неоднородностей $l_m \approx 1/\max(\kappa)$ удовлетворяет неравенству (7), результаты МПВ переходят в формулы геометрической оптики.

Приближение фазового экрана

К сожалению, все вышеописанные методы не учитывают сильных флуктуаций в условиях многолучевости и при сильной фокусировке на линзообразных неоднородностях. При прохождении волны через слабые неоднородности вначале эти эффекты отсутствуют, но при дальнейшем отклонении волны от первоначального направления нарастают и на определенном расстоянии появляются множественность, интерференция и фокусировка в окрестностях различного рода каустик. На каустике амплитуда волны в ГО-приближении обращается в бесконечность, что говорит о неприменимости здесь этого приближения. Таким образом, ГО-приближение неприменимо для описания сильных флуктуаций. Тем более неприменимы здесь борновское и рытовское приближения. Более удобным представляется метод фазового экрана. Этот метод учитывает описанное выше преобразование слабых флуктуаций на выходе из неоднородного слоя в сильные флуктуации далеко от неоднородности.

Для этого поле на выходе из слоя на плоскости S' (рис. 1), найденное, например, методом ГО или МПВ, по формуле Грина пересчитывается в удаленную область, где эти методы неприменимы. Когда неоднородный слой является достаточно тонким, он модулирует только фазу прошедшей волны и мы получаем модель фазового экрана. Основным недостатком такого подхода является необходимость задания координат этой плоскости, которые обычно (особенно в задачах диагностики) не известны с достаточной точностью.

Метод двойного взвешенного фурье-преобразования (ДВФП)

В этом методе для поля волны в неоднородной среде используется интегральное представление смешанного типа в виде преобразования Фурье как по координатам источника, так и по координатам наблюдателя, причем это двойное преобразование осуществляется не для самого поля, а для его произведения с полем в свободном пространстве. В малоугловом приближении параболическое уравнение для этого произведения получается из параболических уравнений для полей-сомножителей. В результате получаем решение, которое для однородной в среднем среды имеет вид [Kravtsov, Tinin, 2000; Кравцов и др., 2011]

$$U(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0) = -\frac{A_0 k^2}{4\pi^3 Z^3} \times \exp\left\{ik \left[Z + \frac{(\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}_0)^2}{2Z} \right]\right\} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \xi d^2 \xi_0 \times \exp\left\{ik \left[2 \frac{\xi \xi_0 - \xi \boldsymbol{\rho}_0 - \xi_0 \boldsymbol{\rho}}{Z} + \tilde{\varphi}(\xi, \xi_0) \right]\right\},$$

где $Z = z_t - z_0$ – расстояние между плоскостями с источником и приемником. Если l_e – минимальный размер неоднородностей, то при выполнении условия

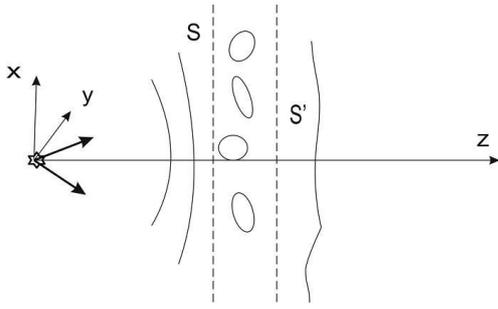


Рис. 1. Распространение волны через область с неоднородностями.

(7) для всех z' внутри неоднородной области четырехкратный интеграл в (8) вычисляется методом стационарной фазы и (8) сводится к ГО-приближению. При слабых флуктуациях фазы из (8) получаем результаты метода Рытова, а при малой протяженности неоднородной среды по z -результаты метода фазового экрана. Таким образом, представление (8) учитывает как дифракционные эффекты френелевского типа при слабых флуктуациях фазы, так и сильные флуктуации, связанные с многолучевостью и каустиками. Пусть в плоскости излучения $z=z_0$ имеется набор источников. Тогда, измеряя пространственное распределение поля в приемной плоскости $z=z_i$, для каждой точки излучения в плоскости $z=z_0$ можно выполнить следующую обработку поля по алгоритму обратного двойного взвешенного фурье-преобразования (ДВФП) и получить

$$\begin{aligned} \hat{U}(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}_0^*) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2\rho d^2\rho_0 U(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{2ik}{Z} (\mathbf{p}^* \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_0^* \mathbf{p}) - ik \frac{(\mathbf{p} + \mathbf{p}_0)^2}{2Z} - ikZ \right\} = \\ &= -\frac{A_0 \pi Z}{4k^2} \exp \left\{ ik \left[\frac{2\mathbf{p}^* \mathbf{p}_0^*}{Z} + \tilde{\varphi}(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}_0^*) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда следует, что, измеряя фазу поля волны, обработанного с помощью алгоритма (9), можно найти линейный интеграл (5), используемый во многих методах диагностики неоднородных сред. Выражение (5) совпадает с линейным интегралом, полученным в ГО-приближении. Но ГО-приближение не учитывает, что высокочастотное поле формируется пучком волн, ограниченных радиусом Френеля. В силу этого разрешающая способность при измерении без обработки (9) $\tilde{\varphi}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)$ ограничена этим радиусом. Обработка (9) базируется на представлении (8), которое описывает дифракционные эффекты и многолучевость и, следовательно, устраняет вклад этих эффектов в снижение разрешения. Таким образом, обработка с помощью ДВФП является оптимальной с точки зрения измерения параметров неоднородностей, например, методами томографии.

Теперь рассмотрим применение рассмотренных выше методов при уменьшении ошибки ГНСС-измерений (глобальные навигационные спутниковые системы) и при анализе вертикального зондирования ионосферы.

Ионосферные ошибки ГНСС-измерений и их устранение

В ГО-приближении ошибки фазового и группового путей ионосферной радиоволны на частотах ГНСС могут быть представлены в виде рядов по обратным степеням частоты, и i -ая поправка в ГО-приближении имеет вид

$$\Delta D_{ig}^{(i)}(f) = d_i / f^{i+1}, \quad (9)$$

где d_i не зависит от частоты. Такая простая зависимость ионосферной ошибки от частоты позволяет построить алгоритм ее исключения с помощью измерений на нескольких частотах. Основной вклад в ионосферные эффекты вносит поправка первого порядка, пропорциональная полному электронному содержанию. С учетом (10) эта поправка устраняется в двухчастотных измерениях. Обнаруженная во многих исследованиях пропорциональность между поправками второго и первого порядков позволяет уже в двухчастотных измерениях устранить эффекты первого и второго порядков.

Значительное повышение точности ГНСС-измерений при использовании двухчастотных измерений ставит вопрос об устранении поправок высших порядков и повышении точности путем увеличения частот. В частности, при трехчастотном приеме, учитывая, что поправки имеют вид (10), можно устранить одновременно ошибки первого, второго и третьего порядков [Kim, Tinin, 2011].

Дифракционные эффекты в ГНСС-измерениях

Спектр ионосферных неоднородностей довольно широкий. Наименьшие размеры l_m обычно находятся в области 70 м. Оценки радиуса Френеля для частот ГНСС-диапазона на высотах 320 км дают значения 200–700 м. Таким образом, имеются неоднородности, для которых не выполняются условия ГО-приближения (7). Для учета влияния дифракции на таких неоднородностях на многочастотную коррекцию, необходим волновой подход. Для этого можно использовать МПВ и показать [Kim, Tinin, 2011], что из-за дифракционных эффектов поправки не имеют вид d^i/f^{i+1} , как поправки в ГО-приближении, и не могут быть устранены в многочастотных измерениях.

На рис. 2, а, б, взятого из [Kim, Tinin, 2011], приведены результаты моделирования зависимости от угла возвышения средних и среднеквадратичных отклонений поправок многочастотных измерений при $l_m=1$ км. Из расчетов видно, что при переходе к трехчастотным измерениям наблюдается уменьшение не только средней поправки, но и ее флуктуаций.

Теперь рассмотрим случай, когда внутренний масштаб меньше радиуса Френеля. Для этого возьмем $l_m=70$ м. Результаты моделирования средней поправки слабо отличаются от приведенных на рис. 2, а и поэтому здесь опущены. Однако, как видно из рис. 3, при $l_m=r_{Fr}$ переход к многочастотным измерениям не только не уменьшает флуктуации ошибки, а наоборот, увеличивает их. Одним

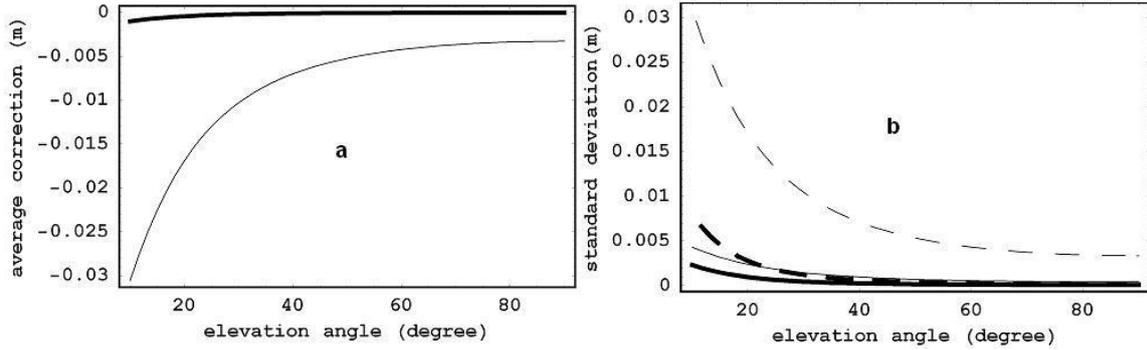


Рис. 2. Зависимости от угла возвышения для средних поправок (а) и среднеквадратичных отклонений поправок (б) при двухчастотном (тонкая линия) и трехчастотном приеме (жирная линия) при $l_m=1$ км. Сплошные линии соответствуют первому порядку, штриховые – третьему.

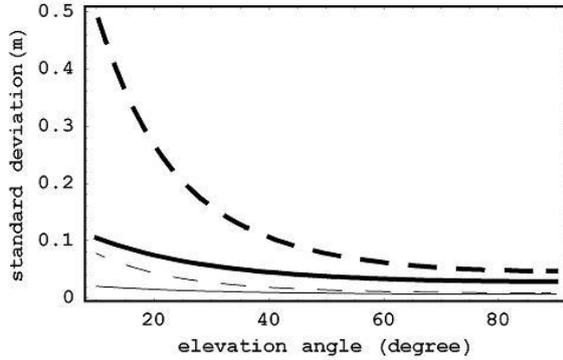


Рис. 3. То же самое, что на рис. 2, б, но при $l_m=70$ м.

из путей устранения этого эффекта является пространственная обработка сигнала на базе обратного ДВФП, рассмотренная выше. Однако в ГНСС-измерениях нет возможности пространственной обработки сигнала в двух плоскостях. Поэтому для использования ДВФП при устранении дифракционных эффектов в многочастотных ГНСС нужен переход от двойного преобразования к однократному [Тинин, 2012].

Рассмотрим действие обратного оператора в виде френелевского преобразования поля $U(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)$:

$$\begin{aligned} \hat{U}(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}_0) &= \hat{L}_b[U(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)] = \\ &= C_0 \int_{-\infty}^{\infty} d^2\rho U(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) \exp\left\{-ik \frac{(\mathbf{p}^* - \mathbf{p})^2}{2(z_t - z_b)} - ikZ\right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

С помощью френелевской инверсии (11) обычно пересчитывают результаты измерений из плоскости измерений в значения поля на плоскости виртуального экрана $z=z_b$, расположенного на выходе из неоднородной среды, при условии, что между этими плоскостями нет неоднородностей. Однако формулы ДВФП говорят о возможности использования процедуры инверсии (11), когда экран помещен в неоднородную область или между источником и неоднородной областью [Тинин, 2012]. В этом же сборнике в работе Книжина будут представлены результаты моделирования такой инверсии при диагностике удаленных неоднородностей. Здесь мы ее используем для устранения остаточной ошибки в многочастотных ГНСС-измерениях.

На рис. 4 приведены результаты расчетов зависимости от положения виртуального экрана для

среднеквадратичного отклонения остаточных ошибок первого (сплошные линии) и третьего (штриховая линия) порядков при двухчастотном (тонкие линии) и трехчастотном (жирные линии) приеме. Как видно из результатов моделирования, после пространственной обработки достаточно двухчастотных измерений, чтобы получить приемлемую точность при соответствующем выборе координат экрана. Положение экрана можно выбрать из условия минимума флуктуаций амплитуды [Тинин, 2012].

Отражение волны от слоя со случайными неоднородностями

Вышеприведенные результаты получены при применении ДВФП к параболическому уравнению, к которому сводится волновое уравнение при малоугловом распространении. Очевидно, при вертикальном зондировании это неприемлемо. Чтобы применить ДВФП для решения задачи отражения волн от слоя со случайными неоднородностями, применим метод Фока собственного времени (или пятого параметра) [Фок, 1957]. В этом методе с помощью преобразования

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -i/(2k) \int_0^{\infty} U(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \tau) d\tau \quad (11)$$

волновое уравнение сводится к параболическому уравнению. Решая его методом ДВФП и подставляя найденное решение в (12), для линейного слоя

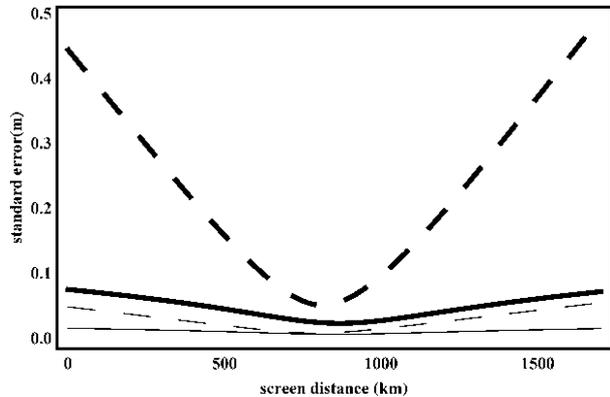


Рис. 4. Зависимости среднеквадратичного отклонения остаточных ошибок от положения виртуального экрана.

с неоднородностями $\varepsilon(z) = 1 - \varepsilon'z + \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})$ получаем

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{4}{k} e^{\frac{i3\pi}{4} \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{9/2}} \times \int_0^\infty d\tau \tau^{-9/2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty d^3\xi d^3\xi_0 \times \exp \left\{ ik \left[\frac{\tau}{2} + \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2}{2\tau} + \frac{2}{\tau} (\xi_0 - \mathbf{r}_0)(\xi - \mathbf{r}) - \frac{\varepsilon' \tau}{4} (z_0 + z) - \frac{\varepsilon'^2 \tau^3}{96} + \tilde{\varphi}_1(\xi, \xi_0, \tau) \right] \right\}, \quad (12)$$

где

$$\tilde{\varphi}_1(\xi, \xi_0, \tau) = 1/2 \times \int_0^\tau \tilde{\varepsilon}_1 \left[\xi_0 (1 - \tau'/\tau) + \zeta \tau' - \mathbf{e}_z \varepsilon' (\tau' - \tau) \tau' / 4 \right] d\tau'. \quad (13)$$

В отсутствие неоднородностей из (13) следует строгое решение, полученное в [Li et al., 1990].

В отсутствие фоновой неоднородности, т. е. при $\varepsilon' = 0$, из (13) получаем

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{4}{k} e^{\frac{i3\pi}{4} \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{9/2}} \times \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^{9/2}} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty d^3\xi d^3\xi_0 \times \exp \left\{ ik \left[\frac{\tau}{2} + \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2}{2\tau} + 2 \frac{(\xi_0 - \mathbf{r}_0)(\xi - \mathbf{r})}{\tau} + \tilde{\varphi}_1(\xi, \xi_0, \tau) \right] \right\}. \quad (14)$$

При $k|\tilde{\varphi}_1| \ll 1$ (15) переходит в борновское приближение [Tinin, 2004]. Следовательно, наше решение учитывает дифракционные эффекты и рассеяние назад, что очень важно в дифракционной томографии и при описании вертикального зондирования ионосферы. В малоугловом приближении из (15) получаем результаты рассмотренного выше варианта метода ДВФП.

Мы получили формулы, с помощью которых можно исследовать различные статистические моменты для сигнала, отраженного от случайно неоднородного плазменного слоя. Кроме того, на базе полученных результатов можно создать алгоритм пространственной обработки сигнала, позволяющий получать измерения со сверхфренелевским разрешением в условиях многолучевости и сильных флуктуаций. Эта обработка имеет вид, аналогичный ДВФП, но с учетом отражения и рассеяния назад.

Я надеюсь, что рассмотренные выше методы описания поля зондирующего сигнала позволят разработать новые способы его квазиоптимальной пространственно-временной обработки и найдут свое применение при диагностике ионосферной плазмы и плазмы термоядерного синтеза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Кравцов Ю.А., Тинин М.В., Книжин С.И. Дифракционная томография неоднородной среды при сильных вариациях фазы // Радиотехника и электроника. 2011. Т. 56, №. 7. С. 816–822.

Тинин М.В. Интегральное представление для поля волны, распространяющейся в крупномасштабной неоднородной среде // Изв. вузов. Радиофизика. 2012. Т. 55, №. 6. С. 431–439.

Фок А.В. Работы по квантовой теории поля. Ленинград: ЛГУ, 1957. 161 с.

Kim B.C., Tinin M.V. Potentialities of multifrequency ionospheric correction in Global Navigation Satellite Systems // J. Geod. 2011. V. 85. P.159–169.

Kravtsov Yu.A., Tinin M.V. Representation of a wave field in a randomly inhomogeneous medium in the form of the double-weighted Fourier transform // Radio Sci. 2000. V. 35, N 6. P. 1315–1322.

Li Y.L., Liu C.H., Franke S.J. Three-dimensional Green's function for wave propagation in a linearly inhomogeneous medium – the exact analytic solution // J. Acoust. Soc. Am. 1990. V. 87, N 6. P. 2285–2291.

Tinin M.V. Wave scattering in a multiscale random inhomogeneous medium // Waves in random media. 2004. V. 14. P. 97–108.

Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия