

**ДИНАМИКА НЕОДНОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ СТРУКТУР В СРЕДАХ  
С ПЕРЕМЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ (ВКЛЮЧАЯ ИОНОСФЕРУ, МАГНИТОСФЕРУ И ГИДРОСФЕРУ)**

**В.Ю. Белашов**

**DYNAMICS OF MULTIDIMENSIONAL NONLINEAR WAVE STRUCTURES IN MEDIA WITH  
VARIABLE DISPERSION (INCLUDING IONOSPHERE, MAGNETOSPHERE AND HYDROSPHERE)**

**V.Yu. Belashov**

Рассматривается проблема динамики 2D- и 3D-солитонов и нелинейных волн, описываемой обобщенным уравнением Кадомцева–Петвиашвили, в средах с переменным во времени и пространстве дисперсионным параметром  $\beta = \beta(t, \mathbf{r})$ . Такая ситуация, например, имеет место при изучении эволюции 3D-БМЗ-волн в плазме, где  $\beta = v_A (c^2 / 2\omega_{oi}^2) (\cot^2 \theta - m_e / m_i)$ ,  $v_A = f[B(t, \mathbf{r}), n(t, \mathbf{r})]$ ,  $\theta = (\mathbf{k} \wedge \mathbf{B})$ , а также волн на поверхности «мелкой» жидкости, где  $\beta = (\sqrt{gH / 6})(H^2 - 3\sigma / \rho g)$  – функция глубины. Еще один характерный пример – распространение солитоноподобных внутренних гравитационных волн (ВГВ) на высотах F-слоя ионосферы в областях резких градиентов основных ионосферных параметров, в том числе на фронтах солнечного терминатора и пятна солнечного затмения.

The lecture concerns the problem of dynamics of 2D and 3D solitons and nonlinear waves. This dynamics is described by the generalized Kadomtsev–Petviashvili equation in media with time- and space-varying dispersion  $\beta = \beta(t, \mathbf{r})$ . For example, this takes place when studying the evolution of 3D fast magnetosonic (FMS) waves in magnetized plasma for which  $\beta = v_A (c^2 / 2\omega_{oi}^2) (\cot^2 \theta - m_e / m_i)$ ,  $v_A = f[B(t, \mathbf{r}), n(t, \mathbf{r})]$ ,  $\theta = (\mathbf{k} \wedge \mathbf{B})$ , and also the waves on surface of the “shallow water” when  $\beta = (\sqrt{gH / 6})(H^2 - 3\sigma / \rho g)$  is a function of depth. One more characteristic example is the propagation of soliton-like internal gravity waves (IGW) at the heights of the ionosphere F-layer in regions with sharp gradients of ionospheric parameters including regions of fronts of solar terminator and solar eclipse spot.

**Введение**

В настоящей лекции представлены в виде краткого обзора основные результаты по теоретическому и численному исследованию динамики нелинейных волновых 2D- и 3D-структур солитонного типа, описываемой уравнениями класса Кадомцева–Петвиашвили (КП), обобщенными на случай переменной в пространстве и во времени дисперсии, с учетом дисперсионных эффектов высшего порядка, процессов диссипации и неустойчивости [Белашов, 1997; Belashov, 2005]. Такие объекты интересны тем, что их изучение играет важную роль как при исследовании общей волновой динамики, так и при моделировании нелинейных волновых процессов в верхней атмосфере (ионосфере) и гидросфере, а также при исследовании распространения волновых структур в замагниченной плазме. Актуальность этих задач определяется существующими проблемами теории неодномерных нелинейных волн в средах с дисперсией, той ролью, которую могут играть волновые процессы гидродинамического типа в диспергирующих средах (в том числе в атмосфере и гидросфере Земли и в плазме ионосферы и магнитосферы), а также необходимостью учета, в отличие от классических моделей, эффектов, свойственных реальным средам, и отсутствия законченной теории процессов трансформации нелинейных волновых возмущений в областях резких градиентов параметров среды. В этих областях наблюдаются интенсивные переходные процессы (дисперсия переменна), что важно для физики верхней атмосферы и ионосферы – областей фронтов солнечного терминатора (СТ) и солнечного затмения (СЗ), – гидросферы (изменяющийся в пространстве и во времени рельеф дна), а также для физики плазмы (области неоднородности и анизотропии в замагниченной и пылевой плазме и др.

Несмотря на значительные успехи, достигнутые в последние три десятилетия в области теории неодномерных солитонов и ее приложений (см. [Belashov, 2005] и ссылки в этой работе), существующий большой объем теоретического и экспериментального материала стимулирует пересмотр ряда положений о физике наблюдаемых процессов и требует анализа и обобщения с учетом ситуаций, когда в сложных неустойчивых средах дисперсия является переменной во времени и пространстве. Тогда можно ожидать развития процессов, приводящих к нарушению структуры волновых образований и их распаду с турбулизацией волнового поля и переходом в хаотические режимы или, в результате развития неустойчивости, к коллапсу с высвечиванием энергии. Особенно актуальной эта проблема является для физики атмосферы и гидросферы, где имеют место интенсивные переходные процессы, связанные со сложной динамикой параметров, а также физики ионосферной и магнитосферной плазмы, когда дисперсионные характеристики среды являются функциями соотношения параметров компонент плазмы и направления внешнего магнитного поля.

Построенная к настоящему времени теория неодномерных нелинейных систем класса КП [Кадомцев, 1970; Захаров, 1980] относится главным образом лишь к весьма идеализированным моделям. При аналитическом исследовании удается в лучшем случае решить проблему устойчивости неодномерных решений, изучить характер асимптотик и с помощью анализа в многомерном фазовом пространстве получить качественные характеристики решений и построить их классификацию. Для случаев постоянной дисперсии эти задачи в последние 10–12 лет были в достаточной степени решены [Belashov, 2005], однако в более общем случае, когда дисперсия в среде может быть функцией  $\beta = \beta(t, \mathbf{r})$ , исследования, ко-

торые существенно продвинулись благодаря результатам, полученным в работе [Белашова, 2007], все еще далеки от своего завершения.

### Основные уравнения

Рассмотрим в качестве исходной систему уравнений гидродинамики с граничными условиями [Белашов, 1997]

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + (c^2 / \rho) \nabla \rho &= 0, \\ \partial_t \rho + \nabla(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \partial_t \Phi + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \frac{c^2(\rho - \rho_0)}{2\rho} + \frac{c^2 z}{\rho} &= 0, \quad \Delta \Phi = 0, \quad (1) \\ \partial_t \eta + \partial_x \eta \partial_x \Phi + \partial_y \eta \partial_y \Phi - \partial_z \Phi &= 0, \\ \partial_t \Phi + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + (c^2 / \rho) \eta &= 0, \\ z = \eta(x, y, t), \\ \partial_z \Phi \Big|_{z=-\rho_0} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь введены понятия обобщенных плотности  $\rho$  и скорости «звука»  $c(\rho)$  в пренебрежении дисперсией, которая в зависимости от смысла, который мы придаем входящим в нее функциям и переменным, описывает волны на поверхности жидкости, волны в атмосфере, ионно-звуковые или быстрые магнито-звуковые (БМЗ) волны в плазме (подробно см. в работах [Belashov, 2005, 2011; Белашова, 2006]).

Используя разложение по степеням малых параметров, а также учитывая диссипацию и дисперсионные эффекты высшего порядка, свойственные реальным физическим средам, как это сделано в цитированных выше работах, можно получить обобщенное уравнение КП

$$\partial_x (\partial_t u + \alpha u \partial_x u - \nu \partial_x^2 u + \beta \partial_x^3 u + \gamma \partial_x^5 u) = \kappa \Delta_{\perp} u. \quad (2)$$

В уравнении (2), например для волн на поверхности жидкости,  $u$  – массовая скорость частиц жидкости,

$$\alpha = 3c_0 / 2H, \quad c_0 = (gH)^{1/2}, \quad \kappa = -(c_0 / 2),$$

$$\beta = (c_0 / 6)(3\sigma / \rho g - H^2),$$

$$\begin{aligned} \gamma = (c_0 / 6) \left[ H^2 \left( \frac{2}{5} H^2 - \sigma / \rho g \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{12} (3\sigma / \rho g - H^2)^2 \right], \end{aligned}$$

где  $H$  – глубина жидкости,  $\nu$  – коэффициент вязкости.

Для ионно-звуковых волн в плазме без магнитного поля

$$\alpha = \frac{3}{2} c_s / n_i, \quad c_s = \sqrt{T_e / m_i}, \quad \kappa = c_s / 2,$$

$$\beta = c_s D^2 / 2, \quad D^2 = T / 4\pi n_0 e^2, \quad \gamma = 0,$$

$$\nu = (\rho_0 / 2\rho)(c_{\infty}^2 - c_0^2) \tau \int_0^{\infty} \xi \phi(\xi) d\xi$$

имеет смысл коэффициента релаксационного затухания звуковых колебаний (в рассматриваемом длинноволновом пределе затуханием Ландау пре-

небрегаем), а  $c_{\infty}$  и  $c_0$  представляют собой скорости соответственно высокочастотного и низкочастотного звука (последняя совпадает с  $c_s$ ); функция  $\phi(t, \tau)$  определяет релаксационный процесс.

Для БМЗ-волн в замагниченной плазме  $u = h = B_{\perp} / B_0$  – безразмерная амплитуда БМЗ-волны ( $B_{\perp}$  – магнитное поле волны),

$$\alpha = \frac{3}{2} v_A \sin \theta,$$

$$v_A = B / \sqrt{4\pi n m}, \quad m = m_e + m_i,$$

$$\beta = v_A (c^2 / 2\omega_{0i}^2)(\cot^2 \theta - m_e / m_i),$$

$$\gamma = v_A (c^4 / 8\omega_{0i}^4) \times$$

$$\times \left[ 3(m_e / m_i - \cot^2 \theta)^2 - 4\cot^4 \theta (1 + \cot^2 \theta) \right],$$

$$\kappa = -(v_A / 2),$$

где  $\nu$  – коэффициент затухания монохроматической волны, обусловленного как столкновительными, так и бесстолкновительными механизмами:

$$\nu = \nu_{\text{col}} + \nu_L \quad [\text{Belashov, 2005}],$$

где  $\nu_L$  описывает бесстолкновительное затухание, связанное в основном с электронами.

Отметим теперь, что в реальных физических средах дисперсионные коэффициенты могут быть функциями пространственных координат и времени. Так, для БМЗ-волн может иметь место ситуация, когда

$$v_A = f[B(t, \mathbf{r}), n(t, \mathbf{r})], \quad \theta = (\mathbf{k} \hat{\mathbf{B}}),$$

где  $n$  – электронная концентрация, а для волн на поверхности жидкости – когда глубина есть функция  $H(x, y, t)$ . Во многих задачах эти зависимости могут быть достаточно медленными, однако такое имеет место далеко не всегда. Характерный пример – распространение солитоноподобных ВГВ и возбуждаемых ими перемещающихся ионосферных возмущений (ПИВ) на высотах F-слоя ионосферы в областях резких градиентов ионосферных параметров. в том числе на фронтах СТ и пятна СЗ.

Далее мы рассмотрим соответствующие примеры, однако предварительно следует сказать о возможных типах решений обобщенного уравнения КП (2) и их устойчивости.

### Возможные типы решений и их устойчивость

Детальный анализ решений уравнения (2) был выполнен в работах [Белашов, 1991, 2011; Belashov, 2002, 2005]. Здесь мы приведем только основные результаты. Исследование характера возможных решений и их классификация проводились на основе качественного анализа уравнения (2) в  $d(n-1)$ -фазовом пространстве ( $d$  и  $n$  – размерность и порядок уравнения соответственно) и анализа асимптотик его решений. При этом в (2) был включен также член  $\delta \partial_x^4 u$ , описывающий эффекты неустойчивости различного типа. В качестве примера на рис. 1 показаны фазовые портреты при  $d=1$  с соответствующими профилями волновых структур для различных значений параметров уравнения, т. е., в конечном счете, характеристик среды распространения.

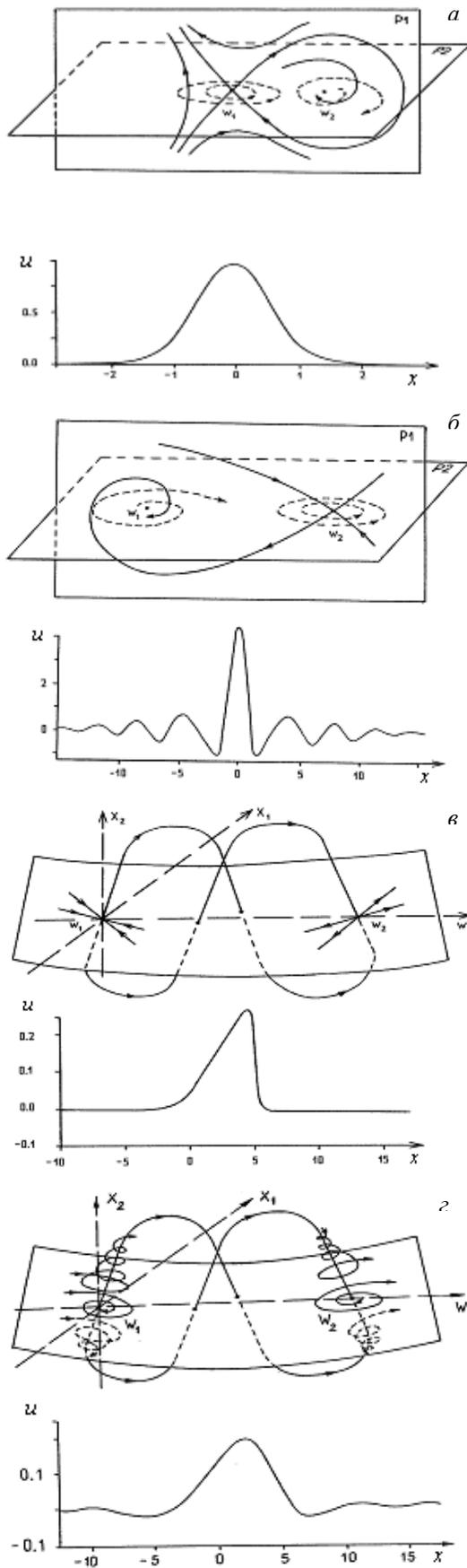


Рис. 1. Фазовые портреты и соответствующие им профили решений уравнения (2) при  $d=1$  (сплошные и штриховые линии отвечают фазовым траекториям соответственно в плоскостях  $P_1$  и  $P_2$ ):  $v=\delta=0, \gamma=1, \beta=-1$  (а);  $v=\delta=0, \gamma=1, \beta=3.16$  (б);  $\beta=\gamma=0, \delta \leq (4/27)v^3 C^8, v=0.1, \delta=1 \cdot 10^{-6}$  (в);  $\beta=\gamma=0, \delta > (4/27)v^3 C^8, V>0, v=0.01, \delta=0$  (г).

Асимптотики решений, в зависимости от значений коэффициентов уравнения, могут быть как монотонно-, так и осцилляторно-затухающими:

$$w = A_1 \exp \left\{ (2\gamma)^{-1/2} \left[ C^2 + \sqrt{C^4 \pm 4\gamma} \right]^{1/2} \chi \right\},$$

$$\gamma = -1, V > 0 \text{ и } V < 0;$$

$$w = A_2 \exp \left\{ \left( 2C^{-1}\gamma^{-1/2} \right)^{-1} \left( 2C^{-2}\gamma^{1/2} - 1 \right)^{1/2} \chi \right\} \times \cos \left\{ \left( 2C^{-1}\gamma^{-1/2} \right)^{-1} \left( 2C^{-2}\gamma^{1/2} + 1 \right) \chi + \Theta \right\},$$

$$\gamma = 1, V < 0,$$

где  $w=u(x, y, t)/V, C=|V|^{-1/4}, \chi=x \pm y + (\kappa - V)t, A_1, A_2, \Theta$  – произвольные постоянные.

Из рис. 1 и выражений для асимптотик хорошо видно, что в решениях уравнения в зависимости от знаков  $V, \gamma$  и  $\beta$  могут иметь место солитоны как с монотонными, так и с осциллирующими асимптотиками. При этом изменяющаяся величина  $\gamma > 0$  будет определять «скорость» спадания асимптотик к нулю или приводить монотонные и осцилляторно-затухающие асимптотики к осциллирующему виду при  $\gamma > C^4/4 = |V|/4$ , что имеет существенное значение при рассмотрении распространения солитонных структур в средах с переменной дисперсией, когда изменение параметра  $\gamma$  может определять трансформацию волны из устойчивого состояния в неустойчивое и наоборот. Фазовые портреты, показанные на рис. 1, а, б и отвечающие солитонам с монотонными и осциллирующими асимптотиками, с изменением величины коэффициента  $\gamma$  могут, в зависимости от величины этих изменений, также трансформироваться с изменением типов особых точек и траекторий фазовых кривых.

Устойчивость солитонных решений детально исследовалась в [Белашов, 1991], при этом в (2) полагалось  $v=0$  и в соответствии с теоремой Ляпунова исследовались экстремумы гамильтониана при вариациях переменных, сохраняющих величину импульса системы. На рис. 2 показаны примеры для  $d=2$  и  $d=3$ .

Обратите внимание на то, что при изменяющейся дисперсии абсолютно устойчивые случаи 1 и 2 и локально устойчивый случай 5 (рис. 2, а) при изменении значений коэффициентов (параметров среды распространения) могут перейти в неустойчивые – соответственно в 6 (штриховая линия на рис. 2, а) и 4 (см. стрелки, отвечающие переходам 1→6 и 5→4). Например, это может произойти при увеличении отношения  $|\beta/\gamma|$  при  $\beta < 0$ , что соответствует случаю усиления отрицательных дисперсионных эффектов (фазовая скорость с увеличением  $k$  уменьшается) в области малых  $k$  для НЧ-составляющей волнового пакета). Таким образом, устойчивая при некоторых локальных значениях дисперсионных параметров волна, эволюционируя в область пространства с другими их значениями, может стать неустойчивой и наоборот.

Из рис. 2, б (3D-случай) видно, что, когда параметры среды изменяются в направлении или по мере распространения во времени уединенной нелинейной

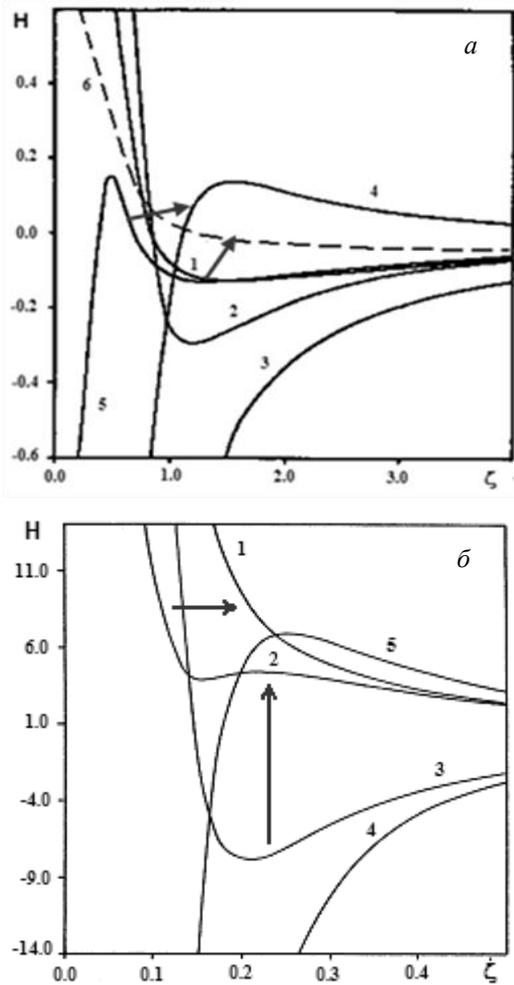


Рис. 2. Изменение  $H(\zeta, \eta)$  при  $d=2$  вдоль линий  $\eta=[(4b/c)^2\zeta^5]^{1/3}$  (а); при  $d=3$  вдоль линий  $\eta=(2b/c)\zeta^{5/2}$ , где  $\zeta, \eta \in R$  – варьируемые переменные (б).

волны, функция  $H(\zeta, \eta)$  трансформируется и в зависимости от дисперсионных свойств среды может из ограниченной снизу переходить в монотонную, что соответствует потере в данной области пространства (или в данный промежуток времени) солитонам своей устойчивости и его разрушению. Возможен и обратный процесс.

Перейдем теперь к рассмотрению приложений обобщенного уравнения КП вида (2) при изучении нелинейных волновых процессов в реальных физических средах.

### Распространение пучка БМЗ-волн в замагниченной плазме

БМЗ-волны, которые возбуждаются в плазме при  $4\pi nT/B^2 \ll 1$  в области частот  $\omega < \omega_B/m_i c$  при условиях  $k\lambda_D \ll 1, k_x^2 \gg k_1^2, v_x \ll v_A = B^2/4\pi n m_i$ , когда справедливо дисперсионное соотношение  $\omega \approx v_A k_x (1 + k_1^2/k_x^2 + \chi(\theta) \lambda_D^2 k_x^2)$ , исследовались нами (см. работу [Белашова, 2006] и многочисленные ссылки в ней) аналитически и численно. Если  $4\pi nT/B^2 < m_e/m_i$ , структура БМЗ-волн зависит от знака дисперсионного коэффициента  $\beta = v_A (c^2/2\omega_{0i}^2) (m_e/m_i - \cot^2 \theta)$ . При этом вблизи конуса углов, где дисперсия меняет знак,  $\beta \rightarrow 0$ , что приводит к появ-

лению в дисперсионном уравнении члена вида  $\gamma k_x^5$ ,

$$\gamma = v_A (c^4/8\omega_{0i}^4) \times \left[ 3 \left( m_e/m_i - \cot^2 \theta \right)^2 - 4 \cot^4 \theta \left( 1 + \cot^2 \theta \right) \right],$$

и в итоге получается обобщенное уравнение КП

$$\partial_x \left( \partial_t h + \alpha h \partial_x h + \beta \partial_x^3 h + \gamma \partial_x^5 h \right) = - (v_A/2) \Delta_{\perp} h. \quad (3)$$

Характер дисперсии при этом определяется соотношением знаков дисперсионных коэффициентов  $\beta$  и  $\gamma$ . Имеют место следующие случаи:

$\beta > 0, \gamma < 0$  (область В) – случай отрицательной дисперсии;

$\beta > 0, \gamma > 0$  (область А) и  $\beta < 0, \gamma < 0$  (область С) – случай смешанной дисперсии.

При изучении распространения 3D-пучка БМЗ-волн в плазме под углами к магнитному полю вблизи конуса  $\theta = \arctan(m_i/m_e)^{1/2}$  изменение в пространстве или во времени характеристик среды может иметь ключевое значение. Покажем это, выполняя масштабные преобразования в (3) и осуществляя переход к граничной задаче

$$\partial_t \left( \partial_x h + 6h \partial_t h - \varepsilon \partial_t^3 h - \lambda \partial_t^5 h \right) = \Delta_{\perp} h,$$

где  $\Delta_{\perp} = \partial_{\rho}^2 + (1/\rho) \partial_{\rho}$  (аксиально-симметричная геометрия).

Имея на границе  $x=0$  гармонический по времени и ограниченный в поперечном направлении  $l_{\rho}$  пучок БМЗ-волн  $h_0 = h(t, 0, \rho) = \cos(mt) \exp(-\rho^2)$ , в результате его эволюции в зависимости от значений коэффициентов уравнения  $\beta$  и  $\gamma$  будем иметь следующие случаи (рис. 3): в областях углов В и С при распространении наблюдается рассеяние магнитного звука (кривые 3, 4); в области А вначале происходит подфокусировка пучка, далее, вследствие нелинейного насыщения наблюдается его некоторая дефокусировка, а затем эволюция приводит к формированию устойчивого стационарного пучка БМЗ-волн, т. е. 3D-солитона БМЗ (кривые 1, 2). Ясно, что, например, при одновременной смене знаков  $\beta$  и  $\gamma$  на отрицательные или при смене знака  $\gamma$  на отрицательный при положительном  $\beta$  фокусирующий пучок перейдет в режим дефокусировки и последующего рассеяния. Такая ситуация может иметь место вблизи конуса углов  $\theta = \arctan(m_i/m_e)^{1/2}$  при изменении в пространстве и/или во времени функции  $v_A = f[B(t, \mathbf{r}), n(t, \mathbf{r})]$ , что может быть связано как с неоднородностью поля и/или неоднородностью среды, так и с искривлением траектории распространения пучка (изменением  $\theta = (\mathbf{k} \wedge \mathbf{B})$ ).

### Солитоны на поверхности жидкости при изменяющемся рельефе дна

Как было показано выше, для волн на поверхности мелкой жидкости также справедливо обобщенное уравнение КП вида (2). Здесь рассмотрим некоторые результаты для более простого случая, когда  $\gamma=0, v=0$  и (2) переходит в обычное уравнение КП. Отметим при этом, что, если аналитические решения

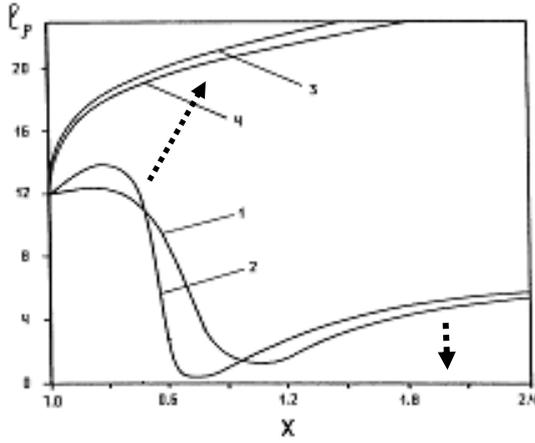


Рис. 3. Изменение поперечного сечения пучка при его распространении вдоль оси X.

уравнения КП известны, то в случае  $\beta = \beta(t, x, y)$  дисперсионный член становится квазилинейным, модель уже не является точно интегрируемой и должна исследоваться численно. Представим некоторые результаты численного исследования эволюции 2D-солитонов при изменении геометрии дна водоема, полученные в [Belashov, 2005; Белашова, 2007]. Рассматривались следующие модельные типы функции  $\beta$ :

$$\beta(x, y) = \begin{cases} \beta_0, & x \leq a; \\ \beta_0 + c, & x > a; \end{cases} \quad (4)$$

$$\beta(x, y, t) = \begin{cases} \beta_0, & x \leq a; \\ \beta_0 + nc, & n = (t - t_{cr}) / \tau = 1, 2, \dots; x > a; \end{cases} \quad (5)$$

$$\beta(t) = \beta_0 (1 + k_0 \bar{\beta} \sin \omega t), \quad \bar{\beta} = (\beta_{max} - \beta_{min}) / 2, \quad (6)$$

$$0 < k_0 < 1, \quad \pi / 2\tau < \omega < 2\pi / \tau,$$

где  $a$  и  $c$  – константы. В терминологии задачи о распространении волн на поверхности мелкой жидкости это соответственно означает, что по достижении  $t_{cr}$  происходят резкий «разлом дна» (4), постепенное «изменение высоты» участка дна (5) и «колебания дна» со временем (6).

Начальные условия во всех случаях задавались в виде точного решения уравнения КП – 2D-солитона. На рис. 4 представлен пример эволюции начального импульса в случае, когда при  $t_{cr}$  скачкообразное изменение  $\beta$  имеет место позади солитона («отрицательная» ступенька  $c < 0$  в (4)). Видно, что в этой ситуации эволюция 2D-солитона приводит к формированию волнообразного хвоста, не связанного с уходящим вперед солитоном и обусловленным лишь локальным воздействием резкого изменения «рельефа»  $\beta = \beta(x, y)$ . Следовательно, формирование осцилляторной структуры связано не столько с уменьшением роли дисперсионных эффектов позади солитона, сколько со скачкообразным изменением  $\beta$  в пространстве.

На рис. 5 представлен пример результатов моделирования трансформации 2D-солитона при изменении рельефа дна в соответствии с (5) для «положительной» ступеньки ( $c > 0$  в (5)) впереди начального возмущения. Видно, что в данном случае характер эволюции солитона всецело определяется наличием ступеньки – начинают развиваться процессы, связан-

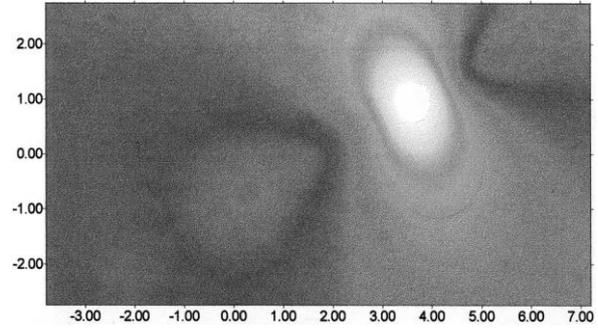


Рис. 4. Решение для закона изменения дисперсии (4),  $a=5.0, c=-0.0038, t=0.6$  (шкалы по X, Y – отн. ед.).

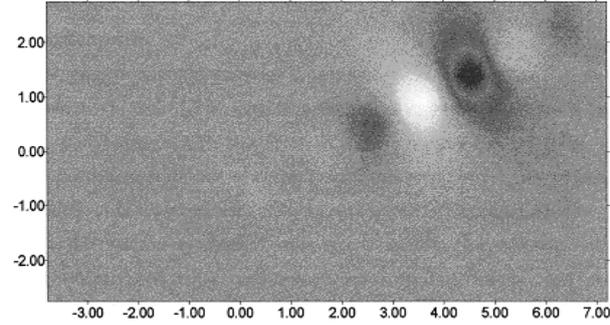


Рис. 5. Решение для закона изменения дисперсии (5),  $a=5.0, c=0.0038, t=0.8$ .

ные уже при незначительной ее высоте с интенсивной генерацией на переднем фронте гармоник с большими  $k_x$ , в результате чего происходит заметное нарушение структуры солитона, которое даже при малых значениях параметра  $c$  приводит к опрокидыванию волны.

В экспериментах, проводившихся для модели дна (6) при разных значениях параметра  $k_0$  и  $\omega = const$ , удалось установить, что устойчивые решения могут формироваться только при  $k_0 \leq \beta_0$  в (6), в остальных случаях решения неустойчивы. На рис. 6 видно, что в процессе эволюции структура 2D-солитона вдоль осей X и Y приобретает волнообразный характер, а амплитуда максимума уменьшается с ростом  $t$ .

Резюмируя вышесказанное, можно отметить, что численное моделирование эволюции 2D-солитонов, описываемых моделью уравнения КП с  $\beta = \beta(t, x, y)$ , позволило получить различные типы как устойчивых, так и неустойчивых решений, включая решение смешанного «солитон-несолитонного» типа для различного характера изменения дисперсии.

### Динамика солитонов ВГВ во фронтальных областях СТ и СЗ

Основные результаты, которые мы здесь рассмотрим, были получены и представлены впервые в работах [Белашова, 2006, 2007].

Рассмотрим вначале волновые эффекты, обусловленные движением фронта СТ. На высотах F-слоя, где концентрация заряженных частиц значительно выше, чем в нижележащих областях, в связи с нарушением при движении СТ баланса ионизации и общего динамического баланса, обусловленным быстрым изменением степени освещенности во фронтальной зоне СТ, формируется область резких градиентов основных ионосферных параметров (электронной концентрации,

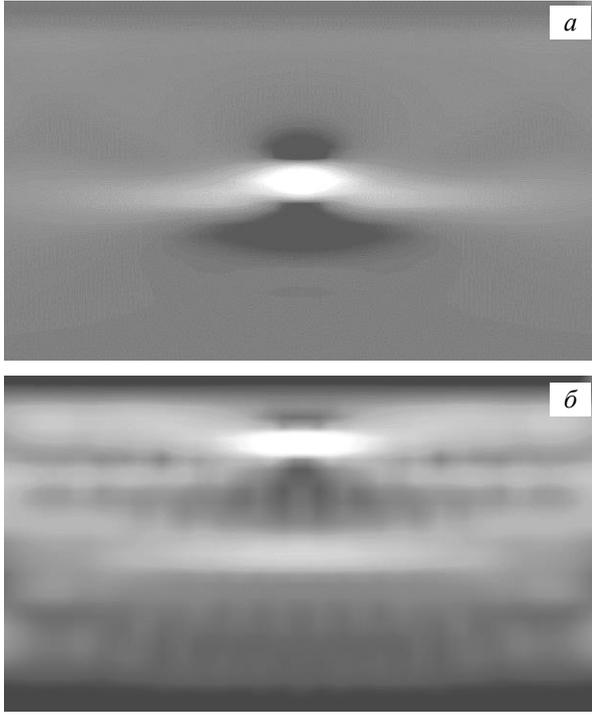


Рис. 6. Эволюция 2D-солитона уравнения КП для закона изменения дисперсии (6) при  $t=0.4$  (а) и  $t=2.0$  (б).

электронной и ионной температур, скоростей рекомбинации и ионообразования и т. д.), движущаяся со скоростью СТ, соответствующей линейной скорости вращения Земли на высоте F-области.

Введем динамическую модель слоя F, описывающую временные зависимости ионосферных характеристик, определяющих процессы диффузии, ионизации и рекомбинации на высотах F-области, т. е. эффекты воздействия СТ на плазму, связанные с восходно-заходными процессами. Динамическая модель будет представлять собой следующую систему:

$$\begin{aligned}
 N_0 &= N_{0m} \exp\left[-\gamma_N(t-t_m)^2/t_{ch}^2\right], \\
 Q(z, \chi) &= Q(h_0, 0) \exp\left(1 - \sec \chi e^{-\zeta}\right) \exp(-\zeta), \\
 \beta_0 &= Q(h_0, 0) / N_{0m}, \\
 D_0 &= D_{0m} T_i, \quad H = (kT_e) / (m_e g), \\
 H_i &= k(T_e + T_i) / (m_i g), \\
 T_e &= T_{em} \exp\left[-\gamma_e(t-t_m)^2/t_{ch}^2\right], \\
 T_i &= T_{im} \exp\left[-\gamma_i(t-t_m)^2/t_{ch}^2\right], \\
 P &= 1 + \exp\left[-(t-t_m)^2/t_{ch}^2\right],
 \end{aligned} \tag{7}$$

где функции описывают фоновые (по отношению к временным масштабам исследуемых возмущений) изменения на высотах F-области и определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
 N(t, z) &= N_0(t) N_1(z), \\
 \beta &= \beta_0 \exp(-P\zeta), \\
 D_0 &= D_\alpha \sin^2 I \exp(-\zeta),
 \end{aligned} \tag{8}$$

где  $\zeta = z/H_i$ ,  $z = h - h_0$ ,  $h_0 = H_i \ln \alpha$  отвечают максимуму электронной концентрации;  $\alpha = 2H_i \sqrt{\beta_0 / D_0}$ ;  $\chi$  – зенитный угол Солнца;  $t_{ch}$  характеризует временной

масштаб, индекс  $m$  соответствует максимальному значению функции;  $\gamma_k$  – некоторые функции, определяющие степень влияния на соответствующую компоненту;  $D_0 \exp(z/H_i) = D_\alpha \sin^2 I$ ,  $D_\alpha$  – коэффициент амбиполярной диффузии,  $I$  – магнитное склонение;  $\beta = \beta_0 \exp(-Pz/H_i)$  и  $Q$  – соответственно коэффициент рекомбинации и скорость ионообразования,  $0 \leq P \leq 2$  характеризует перемешивание газа остальные обозначения стандартные.

Отметим следующее важное обстоятельство. При выборе соответствующих масштабов  $t_{ch}$ , амплитуд  $N_{0m}$ ,  $Q(h_0, 0)$ ,  $D_{0m}$ ,  $T_{em}$ ,  $T_{im}$  и вида функций  $\gamma_k$  динамическая модель (7), (8) будет описывать временной ход основных ионосферных параметров для соответствующего источника, что эквивалентно доопределению задачи начальным и граничным условиями [Белашова, 2006]. Если, к примеру, положить  $t_{ch} = 24$  ч и выбрать характерные для F-слоя значения амплитуд  $N_{0m}$ ,  $Q(h_0, 0)$ ,  $D_{0m}$ ,  $T_{em}$ ,  $T_{im}$  и временных моментов  $t_m$ , отвечающих максимумам соответствующих функций, то получим, что модель (7), (8) описывает в некотором приближении суточный ход основных ионосферных параметров. В этом случае, помимо прочего, модель может быть использована для исследования динамики средне- и крупномасштабных волновых структур на высотах F-слоя в областях с резко выраженными градиентами ионосферных характеристик (утренний и вечерний сектора) на фоне медленных суточных изменений.

Из уравнения непрерывности для электронной концентрации  $N(t, z) = N_0(t) N_1(z)$  в F-слое, рассматривая возмущения, распространяющиеся под углами, близкими горизонтали, при  $N_1(z) = \exp \zeta$  с учетом замены

$$t \rightarrow \xi - Vt,$$

где  $V$  – скорость СТ на соответствующей высоте  $h$ , а  $\xi$  – пространственная координата вдоль  $\mathbf{V}$ , легко получить в системе координат, связанной с «источником», выражение для вертикальной компоненты скорости нейтральных частиц:

$$\begin{aligned}
 u_z &= \left[ ac \left(1 - e^{-v'}\right) \sin I \cos I \right]^{-1} \times \\
 &\times \left\{ VH_i / N_0 \partial_\xi N_0 \left(1 - e^{-\zeta}\right) + \right. \\
 &+ \left. \left[ \beta H_i / (1 - P) \left(1 - e^{(1-P)\zeta}\right) + Qz / N_0 \right] \times \right. \\
 &\times \left. e^{-\zeta} + 3D_0 / 2H_i e^\zeta \right\},
 \end{aligned} \tag{9}$$

где  $t' = \xi / V$ , а значения параметров определяются динамической моделью (7), (8) с учетом зависимостей основных параметров  $Q(t)$ ,  $D_0(t)$ ,  $N(t) = N_0(t)$ ,  $u(t) = u_z(t) / ac$  от времени.

В приближении изотермической атмосферы при учете слабой нелинейности функции  $u = u_z / ac$ ,  $a = \exp(z/2H)$ ,  $c = \sqrt{gH}$  и слабой дисперсии  $|Hk_x| \ll 1$  будет справедливо обобщенное уравнение КП:

$$\begin{aligned}
 \partial_t u + ac \left[ (2\gamma - 1) / \gamma^2 \right] u \partial_\xi u \pm \\
 \pm \left[ (\gamma - 2) / \gamma \right]^2 VH^2 \partial_\xi^3 u \times \\
 \times \left[ 2u + \left[ (\gamma - 2) / \gamma \right]^2 \varepsilon H^2 \partial_\xi^2 u \right] = (V/2) \int_{-\infty}^{\xi} \partial_y^2 u d\xi.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Для такого «глобального» явления, как СТ, можно с достаточной точностью положить  $\partial/\partial y=0$ . Выполняя замены

$$u \rightarrow Vu/\alpha, \quad \xi \rightarrow (-\delta/V)^{1/4} \xi, \quad t \rightarrow (-\delta/V^5)^{1/4} t,$$

где  $\alpha = ac(2\gamma-1)/\gamma^2$ ,  $\delta = [(y-2)/y]^4 \varepsilon VH^4$ ,  $\gamma = c_p/c_v$ , запишем уравнение для  $\text{sgn}(\delta)=1$  в виде [Белашов, 1997]

$$\partial_t u + u \partial_\xi u + 2(-\varepsilon)^{-1/2} \partial_\xi^3 u - \partial_\xi^5 u = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) представляет собой 1D-аналог уравнения (10) и записано в системе координат, связанной с СТ. Для уравнения (11) с начальным условием (9), с использованием модели (7) и алгоритмов, предложенных в работе [Белашов, 1997], решалась задача Коши для  $z=0, H, 2H$ . Значения ионосферных параметров модели выбирались близкими характерным для F-слоя в условиях суточного цикла зимнего и летнего сезонов.

На рис. 7 и 8 показаны примеры результатов численного моделирования для геомагнитной широты  $\varphi_m=45^\circ$ . Можно видеть, что полученные решения свидетельствуют о генерации фронтом СТ как в утреннем, так и в вечернем секторах своего рода солитоноподобных волновых «предвестников» с периодами  $\sim 40-60$  мин с существенно различающимися для летнего и зимнего сезонов масштабами, которые определяются совокупностью факторов: высотой  $z$ , геомагнитной широтой, параметром дисперсии  $\varepsilon$ , зависящим, в свою очередь, от значений ряда ионосферных характеристик, а также особенностей изменения ионосферных параметров в конкретном суточном цикле. Моделирование для  $\partial/\partial y \neq 0$  (уравнение (10)) показывает, что картина для  $z=0$  в целом представляет собой пучок двумерных солитоноподобных волн (с  $k_x \gg k_y$ ), напоминающий при  $y=0$  многосолитонные решения уравнения Кертевича де Вриза [Belashov, 2005]. Для  $z=H, 2H$

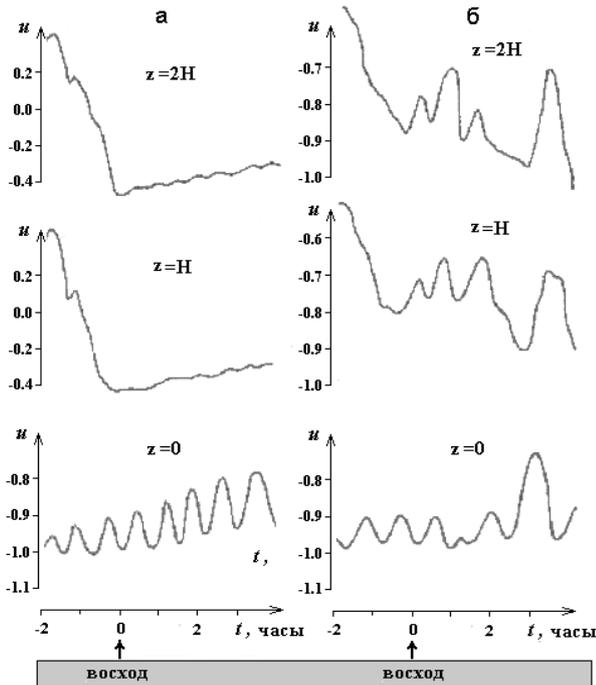


Рис. 7. Возмущения в F-слое ионосферы, обусловленные СТ (утренний сектор): зима (а), лето (б);  $t=0$  соответствует моменту восхода Солнца на высоте  $z=0$ .

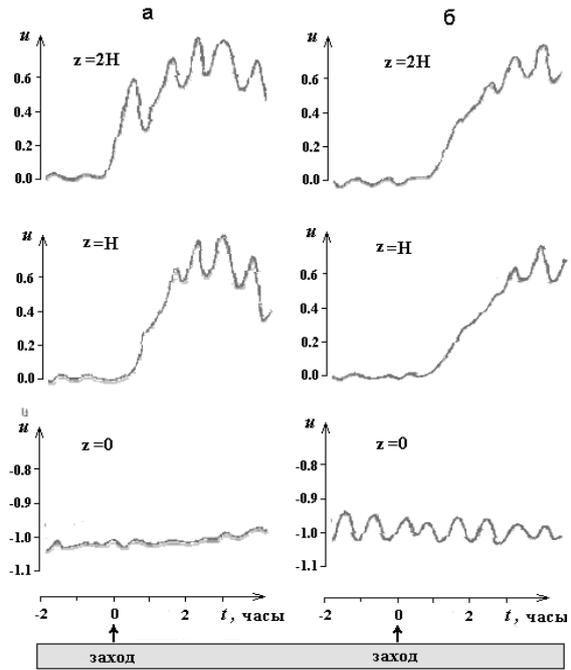


Рис. 8. Возмущения в F-слое ионосферы, обусловленные СТ (вечерний сектор): зима (а), лето (б);  $t=0$  соответствует моменту захода Солнца на высоте  $z=0$ .

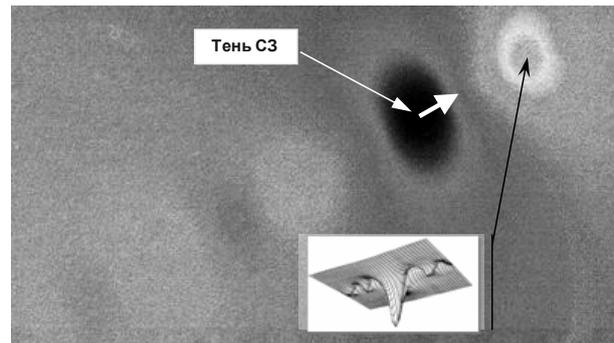


Рис. 9. Общий вид численного решения уравнения (10) (функция  $u(\xi, y)$ ) для импульсного источника типа пятна СЗ (XY-плоскость),  $V \approx 1667$  км/ч = 463 м/с – линейная скорость вращения Земли на высоте максимума слоя F.

качественный вид решения сохраняется, однако волны здесь менее регулярны и в среднем имеют большую амплитуду. Характеристики таких солитоноподобных образований сильно зависят от сезона и ионосферных параметров.

Если в модели (7), (8) выбрать  $t_{ch}$ , соответствующее такому источнику, как СЗ, то модель будет достаточно адекватно описывать волновые эффекты в F-слое ионосферы, связанные с прохождением такого возмущающего фактора, как пятно СЗ. На рис. 9 показан пример результатов моделирования для СЗ с параметрами, отвечающими частичному солнечному затмению, наблюдавшемуся в Дальневосточном регионе России 18 марта 1988 г. Исследования показали, что характеристические периоды предвестников фронта СЗ составляют  $\sim 3-10$  мин, а их пространственные масштабы определяются значениями параметров F-слоя. Моделирование для условий, соответствующих упомянутому выше СЗ и восходно-заходным периодам 1–10 марта 1990 г. (интервал международного геофизического календаря), дало хорошее согласие с результатами специальных

целенаправленных экспериментов по «пассивному» наклонному зондированию ионосферы, проводившихся в эти сроки в Дальневосточном регионе России [Белашов, 1997].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Белашов В.Ю. Об устойчивости двумерных и трехмерных солитонов в слабо диспергирующих средах // Доклады академии наук СССР. 1991. Т. 320, № 1. С. 85–89.
- Белашов В.Ю. Уравнение КП и его обобщения. Теория, Приложения. Магадан: СВКНИИ ДВО РАН, 1997. 162 с.
- Белашов В.Ю. Динамика неодномерных нелинейных волновых структур солитонного и вихревого типов в комплексных средах с дисперсией. Теория, моделирование, приложения // XII Международная Байкальская молодежная научная школа по фундаментальной физике. Иркутск, 2011. С. 3–9.
- Белашова Е.С. Численное исследование динамики неодномерных волновых структур солитонного типа в средах с переменной дисперсией. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Казань: КГУ, 2007. 212 с.
- Белашова Е.С., Белашов В.Ю. Солитоны как математические и физические объекты. Казань: КГЭУ, 2006. 205 с.
- Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
- Кадоццев Б.Б., Петвиашвили В.И. Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах // Доклады академии наук СССР. 1970. Т. 192, № 4. С. 753–756.
- Belashov V.Yu. Structure of the solutions of generalized Kadomtsev-Petviashvili equations // Radiophysics and Quantum Electronics. 2002. V. 45, N 5. P. 376–380.
- Belashov V.Yu., Vladimirov S.V. Solitary Waves in Dispersive Complex Media. Theory, Simulation, Applications. Springer-Verlag GmbH & Co. KG Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo. 2005. 303 p.
- Belashov V.Yu., Belashova E.S., Vladimirov S.V. Structure and evolution of IGW and TID in regions with sharp gradients of the ionospheric parameters // J. Geophys. Res. 2007. V. 112. A07302. doi:10.1029/2006JA012220.

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия*