

УДК 533.9, 519.6

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗЕМНОЙ МАГНИТОСФЕРЫ С СОЛНЕЧНЫМ ВЕТРОМ ПРИ ПОМОЩИ МОДИФИЦИРОВАННОГО СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО МЕТОДА НА ОСНОВЕ АДАПТИРУЮЩЕЙСЯ ПОД РЕШЕНИЕ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СЕТКИ**

**Е.А. Молоков, М.О. Васильев**

**SOLVING THE PROBLEM OF THE EARTH MAGNETOSPHERE AND SUN WIND INTERACTION BY MEANS OF MODIFIED GRID-CHARACTERISTIC METHOD ON THE BASIS OF ADAPTED TO THE SOLUTION HIERARCHICAL GRID**

**E.A. Molokov, M.O. Vasiliev**

За прошедшие 50 лет космической эпохи человечество сделало огромный шаг в освоении космического пространства, произведя сотни запусков искусственных спутников Земли. Существенной проблемой эксплуатации спутников является их время жизни на околоземных орбитах, ограниченное вследствие воздействия космического излучения. Для определения необходимого уровня защиты спутников, а также для оперативного управления ими необходимы данные о характере распределения магнитогидродинамических характеристик в ближнем космическом пространстве. Задачи этого класса являются одними из наиболее сложных задач современных численных методов – в литературе описано лишь несколько (BATSRUS [http://csem.engin.umich.edu], OpenGGCM [Raeder, Wang, 2001] и GUMICS [Janhunen, 1996]) программных комплексов, решающих полную задачу (от возникновения солнечного ветра и до его переноса к поверхности Земли) обтекания земной магнитосферы солнечным ветром с приемлемой точностью. Данная работа посвящена построению численной модели взаимодействия магнитосферы Земли с солнечным ветром.

For pasted 50 years of Space Age humanity has made a giant step toward space development with hundreds of launching of the artificial Earth satellites. One of the crucial challenges of satellites operation is its lifetime at near-earth orbit that is limited by cosmic radiation influence. For satellites shielding and for its operational control the data about magneto-hydro dynamical parameters distribution around the Earth is required. Solution of tasks of this type is one of the most complicated sphere of modern calculating methods – only few (BATSRUS [http://csem.engin.umich.edu], OpenGGCM [Raeder, Wang, 2001] and GUMICS [Janhunen, 1996]) software packages, described in literature, can solve the flow problem with the appropriate accuracy. This paper devotes to mathematical modeling of the Earth magnetosphere and solar wind interaction.

**Постановка задачи**

Процессы переноса плазмы в космическом пространстве между Солнцем и Землей описываются уравнениями идеальной магнитной гидродинамики с учетом некоторых факторов (таких как гравитация, ионизация, излучение и т. д.) в правой части. Рассмотрим задачу о влиянии набегающего переменного потока солнечной плазмы на процессы переноса в пределах нескольких десятков радиусов от Земли. В рамках этой задачи будем рассматривать идеальную плазму, состоящую только из протонного газа. Примем также, что характерные скорости намного меньше скорости света. В качестве внешних факторов будем учитывать только гравитационное притяжение Земли.

В рамках описанных выше условий можем записать трехмерную систему уравнений МГД:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} &= G, \\ P &= (\gamma - 1)\rho e, \\ U &= [\rho, \rho V_x, \rho V_y, \rho V_z, e, B_x, B_y, B_z]^T, \\ G &= [0, \rho g_x, \rho g_y, \rho g_z, \rho(\vec{V} \vec{g}), 0, 0, 0]^T, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\rho$  – плотность плазмы,  $V$  – скорость,  $B$  – напряженность магнитного поля.

Выражения для  $F_x$ ,  $F_y$  и  $F_z$  приведены в работе [Janhunen, 1996].

В дальнейшем будем рассматривать только одномерную постановку задачи, введя следующее пространственное расщепление уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha_x \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\alpha_x} \frac{\partial F_x}{\partial x} \right) + \alpha_y \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\alpha_y} \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) + \\ + \alpha_z \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\alpha_z} \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) &= 0, \\ 0 \leq \alpha_{x, y, z} &\leq 1, \\ \sum_{i=x, y, z} \alpha_i &= 1. \end{aligned} \tag{3}$$

**Модифицированные уравнения МГД**

Так как рассматриваемые характерные масштабы достаточно велики (размер ячейки  $\sim 10^3$  км), а напряженность магнитного поля около Земли обладает резким градиентом ( $B \sim 1/r^3$ ), то численные методы даже на достаточно мелких сетках неизбежно приводят к возникновению нефизических решений. Дальнейшего уменьшения размера ячеек и увеличения точности метода недостаточно для решения поставленной задачи, так как это требует вычислительных мощностей, которые на данный момент недоступны.

В подобных случаях в литературе [Куликовский и др., 2001; Ogino, Walker, 1992; Kenneth et al., 1999] используется, например, следующий подход. Так как невозмущенное (дипольное) магнитное поле Земли описывается уравнением МГД, имеющим стационарное решение, то можно аналитически исключить это решение из уравнений.

Представим магнитное поле в виде суммы двух компонент: дипольной  $B_d$  и возмущения поля  $B_p$ :

$$B = B_d + B_p. \tag{4}$$

Принимая во внимание, что  $\text{rot}(B_d)=0$ ,  $\text{div}(B_d)=0$ ,  $\text{div}(B_p)=0$ , несложно получить следующее выражение для потоков  $F_x$ :  $F_x = F_{p_x} + F_{pd_x}$ .

$$F_{p_x} = \begin{pmatrix} \rho V_x; \rho V_x^2 + P + \frac{B_p^2}{8\pi} - \frac{B_{p_x}^2}{4\pi}; \rho V_x V_y - \frac{B_{p_x} B_{p_y}}{4\pi}; \rho V_x V_z - \frac{B_{p_x} B_{p_z}}{4\pi}; \\ (e + P + \frac{B_p^2}{8\pi}) V_x - \frac{B_{p_x}}{4\pi} (V B_p); 0; V_x B_{p_y} - V_y B_{p_x}; V_x B_{p_z} - V_z B_{p_x} \end{pmatrix}^T;$$

$$F_{pd_x} = \begin{pmatrix} 0; \frac{1}{4\pi} [(B_p B_d) - 2 \cdot B_{p_x} B_{d_x}]; -\frac{1}{4\pi} [B_{p_x} B_{d_y} - B_{d_x} B_{p_y}]; -\frac{1}{4\pi} [B_{p_x} B_{d_z} - B_{d_x} B_{p_z}]; \\ \frac{1}{4\pi} [(B_p B_d) V_x - (B_p V) B_{d_x} - (B_d V) B_{p_x}]; 0; V_x B_{d_y} - V_y B_{d_x}; V_x B_{d_z} - V_z B_{d_x} \end{pmatrix}^T. \quad (5)$$

Таким образом, можно разделить исходную задачу (1)–(2) на две подзадачи: перенос плазмы и взаимодействие плазмы с магнитным полем Земли.

**Численный метод**

Для решения с приемлемой точностью задач, учитывающих локальный резкий градиент давления, полезно введение иерархичности сетки в местах резких градиентов. В данном случае область с резким градиентом давления занимает интервал высот от 50 тыс. км и до поверхности Земли. Введение в этой области иерархической сетки с глубиной до трех-четырех уровней вложенности обеспечивает необходимую точность получаемого решения, при этом характерный размер наименьших ячеек составляет порядка  $10^3$  км.

Отдельно опишем структуру вычислительной ячейки.

Каждая ячейка разностной сетки имеет форму прямоугольного параллелепипеда с размерами  $(h_x, h_y, h_z)$ . Для самой ячейки заданы усредненные по ее объему плотность, вектор скорости и полная энергия плазмы. Магнитное поле усредняется по площади грани ячейки, а электрическое поле усредняется по длине ребра. На рис. 1 проиллюстрировано пространственное распределение гидродинамических и электромагнитных величин для отдельной ячейки. Для удобства восприятия (и для корректного описания в рамках иерархической сетки) индексы ячейки

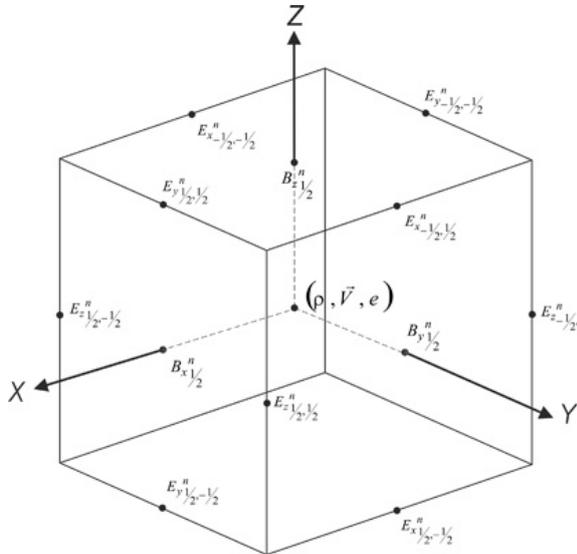


Рис. 1. Структура элементарной ячейки расчетной области.

были опущены. Индекс 1/2 означает полуцелое положение данной величины.

Такое специфическое усреднение магнитного и электрического полей вызвано требованием сохранения соленоидальности магнитного поля в процессе счета. Действительно, если рассматривать эволюцию магнитного поля как результат циркуляции электрического поля, то можно записать

$$\frac{1}{\Delta t} (B_{x/2}^{n+1} - B_{x/2}^n) h_y h_z = -c \left[ \left( E_{z/2, 1/2}^n - E_{z/2, -1/2}^n \right) h_y \times - \left( E_{y/2, 1/2}^n - E_{y/2, -1/2}^n \right) h_z \right]. \quad (6)$$

Аналогичные разностные выражения можно получить и для остальных граней. Легко убедиться, что такая разностная схема обеспечивает соленоидальность магнитного поля.

Для интерполяции электрического поля  $E$  на ребрах ячейки можно выбрать любой подходящий для этого метод. В рамках данной задачи для интерполяции  $E$  использовалось среднее поле, рассчитанное по четырем соседним с ребром граням.

Для вычисления эволюции гидродинамических параметров был использован метод Роу [Куликовский и др., 2001].

**Численные результаты**

Для численного эксперимента было выбрано событие, произошедшее в магнитосфере Земли 29 мая 2007 г. Ниже приводится сравнение с расчетами, которые были выполнены для этой же постановки задачи, но в рамках модели BATSRUS [http://csem.engin.umich.edu].

Как видно из рис. 2–4, полученные результаты достаточно хорошо согласуются с результатами по модели BATSRUS. При этом стоит отметить, что в ходе счета использовалась сетка менее подробная, чем в модели BATSRUS.

**Заключение**

В статье описан метод решения задачи обтекания солнечным ветром магнитосферы Земли. К достоинствам метода можно отнести возможность решения задачи на иерархических сетках, а также приемлемую точность получаемого решения даже на достаточно грубых расчетных сетках. Показано, что получаемое

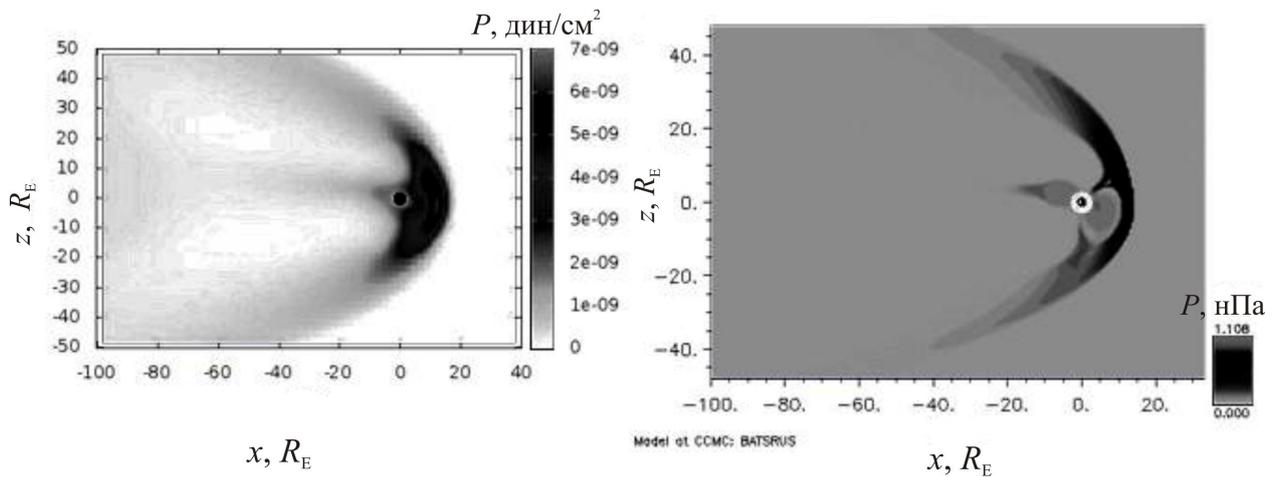


Рис. 2. Распределение давления, полученное с помощью разработанной модели (слева) и модели BATSRUS (справа).

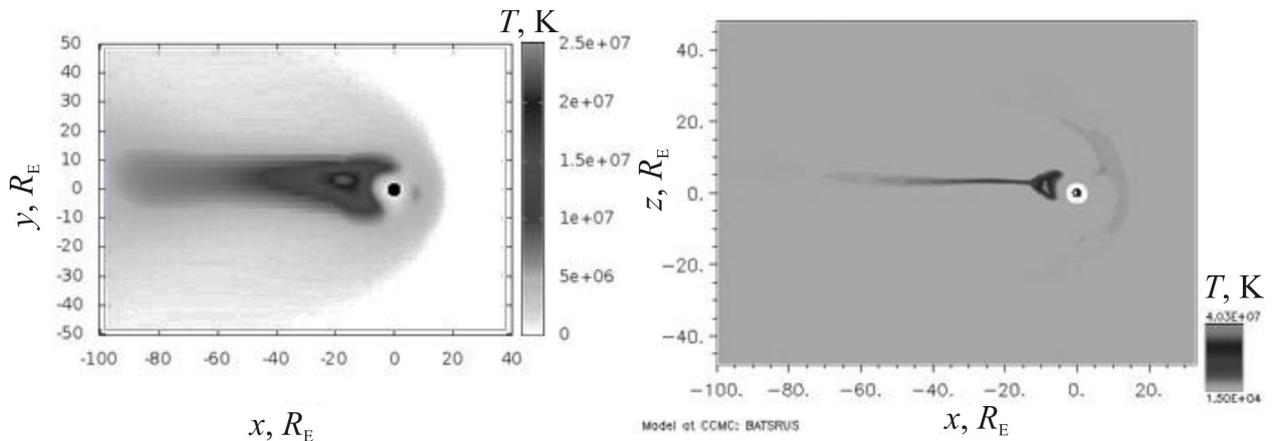


Рис. 3. Распределение температуры, полученное с помощью разработанной модели (слева) и модели BATSRUS (справа).

решение полностью согласуется с подобными же решениями, выполненными с помощью иных программных комплексов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 608 с.

Janhunen P. GUMICS-3 – a global ionosphere-magnetosphere coupling simulation with high ionospheric resolution // ESA Symposium Proceedings on 'Environmental Modelling for Space-based applications', ESTEC, Noordwijk, NL, 18–20 Sep 1996. ESA SP-392. 1996.

Powell K.G., Roe P.L., Linde T.J., et al. A solution-adaptive upwind scheme for ideal magnetohydrodynamics // J. Computational Phys. 1999. V. 154. P. 284–309.

Ogino T., Walker R.J., Ashour-Abdalla M. A Global magnetohydrodynamic simulation of the magnetosheath and magnetosphere when the interplanetary magnetic field is northward // IEEE Transactions on Plasma Science. 1992. V. 20, N 6. P. 817.

Raeder J., Wang Y.L., Fuller-Rowell T.J. Geomagnetic storm simulation with a coupled magnetosphere-ionosphere-thermosphere model // Space Weather: Progress and Challenges in Research and Applications / AGU. Washington, 2001. 377 p. (Shows how CTIM affects storm results). (Geophysical Monograph. V. 125)

Center for Space Environment Modeling.

Московский физико-технический институт, Долгопрудный