УДК 523.987

СТРОЕНИЕ СОЛНЕЧНЫХ ВОЛОКОН: МОДЕЛИРОВАНИЕ СПОКОЙНЫХ ПРОТУБЕРАНЦЕВ А.А. Соловьев

STRUCTURE OF SOLAR FILAMENTS: MODELING OF QUIESCENT PROMINENCES

A.A. Solov'ev

При моделировании спокойных протуберанцев на Солнце обычно в системе уравнений магнитогидростатики задается линейная зависимость газового давления и продольного тока от магнитного потенциала A, затем относительно этого потенциала решается соответствующее дифференциальное уравнение. До сих пор эта схема к успеху не привела, на сегодня нет ни одной модели протуберанца, удовлетворяющей основным наблюдательным данным. Предлагается новый подход: решение обратной магнитогидростатической задачи для систем с трансляционной и осевой симметрией, когда распределения газового давления и плотности не задаются априорно, а находятся путем интегрирования уравнения равновесия по заданному потенциалу A. Метод применен для моделирования протуберанцев, имеющих вид горизонтально расположенных прямых волокон (трансляционная симметрия, $\partial/\partial y = 0$).

В качестве примера применения нового подхода рассчитана структура магнитных аркад с прогибом в вершине и с продольным магнитным полем, предложенных в свое время Пикельнером в качестве основной модели для спокойных протуберанцев с нормальной полярностью поля. Показано, что такие магнитные аркады даже при напряженности поля всего в 5 Гс могут поддерживать плотные и очень холодные (*T*<10000 K) волокна на высотах до 40–50 Мм. Внешнее магнитное поле для поддержания равновесия протуберанца не требуется. Полный электрический ток вдоль оси волокна равен нулю.

When simulating structure of quiescent solar prominences, we usually specify linear dependence of gas pressure and longitudinal current on the magnetic potential A for the set of magnetohydrostatic equations. A corresponding differential equation is then solved relative to this potential. This approach is not successful, as there is no model satisfying main observational data by now. We propose to solve the reverse magnetohydrostatic problem for systems with translational and axial symmetry (distribution of the gas pressure and density are not specified a priori; they are found from integration of the equilibrium equation using the given potential A). The method is used for modeling prominences in the form of filaments stretched along the horizontal axis (translational symmetry, $\partial/\partial y = 0$).

To illustrate application of the new approach, we calculated structure of magnetic arcades with longitudinal magnetic field and deflection on the top; Pikelner proposed to use them as the fundamental model for quiescent prominences with normal polarity of the field. Having the field intensity of only 5 G, such magnetic arcades are shown to support dense and very cold (T<10000 K) plasma filaments at heights of about 40–50 Mm. No external longitudinal magnetic field is needed to equilibrate the prominence. The net electric current along the axis is zero.

Введение

Спокойные протуберанцы – одно из ярких проявлений солнечной активности, их изучению всегда уделялось большое внимание (например, [1, 2]). Плотность газа в волокие (протуберанце) примерно на два порядка выше, чем в окружающей короне, а температура более чем на два порядка ниже. Очевидно, что удержание таких масс газа на высотах до 100 Мм возможно лишь за счет магнитных сил. Напряженность поля в спокойных протуберанцах составляет по разным оценкам от нескольких до 40-50 Гс, чего вполне достаточно для обеспечения равновесия. Простая модель магнитной поддержки плотного изотермического вертикального слоя, подвешенного в «магнитном гамаке» ("hammook-like" model) была предложена Киппенханом и Шлютером [3]. Эта модель традиционно упоминается во всех обзорах, и даже делаются попытки ее обобщить [1, 4, 5], однако она совершенно неудовлетворительна по ряду параметров. Во-первых, обсуждается изотермическое решение, во-вторых, магнитное поле в модели считается неубывающим с удалением от оси волокна, магнитные силовые линии уходят от плотного слоя вверх и в стороны, оставаясь взаимно параллельными. В-третьих, никакой связи с линией раздела полярностей на

фотосфере поле волокна не имеет. Понятно, что модель с такими искусственными, далекими от физической реальности граничными условиями и с расходящимся интегралом энергии может, с большими оговорками, описать только небольшую часть магнитной структуры протуберанца. Проблема встраивания ее в какую-то достаточно реалистичную магнитоплазменную конфигурацию, в частности, учет внешнего поля, связывающего протуберанец с фотосферой, которое должно обеспечить равновесие всего магнитного гамака, остается нерешенной. Пикельнер [6] предложил модель протуберанца в виде магнитной арки с прогибом в вершине. Локальная изотермическая модель [3] могла быть использована для описания области магнитной впадины в вершине арки, но решение, описывающее конфигурацию в целом, неизвестно. Куперус и Рааду [7] использовали в качестве модели протуберанца магнитный жгут, удерживаемый в вертикальном токовом слое. Но при этом лишь схематически обсуждается магнитная структура, распределения давления и плотности вообще не рассматриваются. Лерч и Лоу [8, 9] рассмотрели поддержку жгута-волокна горизонтальным поперечным магнитным полем, но параметры их модели также далеки от реальности. Лоу [10] в модели плотного волокна, удерживаемого в поле бесконечного прямого тока, получил волокно с температурой около 700 000 К (вместо 5000-7000 К, как в реальных волокнах). Раст и Кумар [11, 12] также подчеркивают жгутовую природу магнитного поля протуберанцев. Об этом говорят и прямые измерения лучевых скоростей в них (например, [13]). Теоретическая интерпретация долгопериодических с периодом около 1 ч колебаний волокон также основана на жгутовой модели [14]. Солнечные волокна можно также классифицировать по направлению закрученности их магнитного поля - винт левой или правой руки (см., например, [15] и ссылки там), но в этих работах не ставится задача расчета пространственного распределения плотности и температуры в протуберанцах, обсуждаются лишь возможные механизмы формирования крупномасштабной жгутовой структуры волокон с определенным направлением закрученности поля, охватывающей целое полушарие Солнца.

В моделях с поддержкой волокна поперечным полем полярности магнитного поля по разным сторонам волокна могут оказаться противоположными тому распределению полярностей, которое наблюдается на фотосферной линии раздела полярностей под волокном. Поэтому такие конфигурации, в отличие от аркадных моделей, в которых распределение полярностей поля считается нормальным, называют инверсными. Недавно Лоу и Занг [16] получили точное аналитическое решение магнитогидростатической задачи, описывающее цилиндрический магнитный жгут, уравновешенный горизонтально в плоскопараллельной атмосфере. Предполагается, что в жгуте плотность газа и его давление связаны уравнением политропы с показателем n > 1 (рассчитана модель с n = 4). Жгут удерживается в равновесии внешним потенциальным полем, в котором присутствует однородная продольная составляющая. Распределение плотности в цилиндрическом объеме волокна неоднородно, однако для политропы с показателем n >1 температура в области уплотнения газа не понижается, а, напротив, повышается, поэтому фактически модель [16] к солнечным протуберанцам неприменима.

Кроме высокой плотности и низкой температуры, важной отличительной особенностью солнечных протуберанцев является их тонкая структура: протуберанец весь как бы сплетен из тонких и плотных нитей, поперечный размер которых доходит до 300 км. В работе [5] сделана попытка учета тонкой структуры протуберанцев на основе модели [3]. Протуберанец представлен как совокупность отдельных изотермических слоев, каждый из которых подвешен в своем гамаке магнитных силовых линий, уходящих в бесконечность вверх и в стороны и не имеющих связи с фотосферой. Это принципиальное ограничение модели [3], которое делает ее физически бессмысленной.

Нами предлагается другой подход к построению модели спокойного протуберанца, основанный на решении обратной магнитогидростатической зада-

чи, когда не магнитное поле рассчитывается по априорно заданному (в виде, как правило, очень простой зависимости) распределению газового давления, а, наоборот, магнитное поле считается известным и по нему рассчитываются давление, плотность и температура в протуберанце [17]. Такой подход действительно позволяет получать модели очень плотных и очень холодных волокон, равновесно существующих на больших высотах в значительно более горячей и разреженной солнечной короне, свободной от магнитного поля. Особенностью нашего моделирования является и то, что полученные равновесные решения не сшиваются, как это обычно делается, с вакуумными решениями для внешней по отношению к волокну области, а вписываются в реалистическую модель гидростатической внешней среды - солнечной короны [17].

Постановка магнитогидростатической задачи

Рассмотрим плоскую атмосферу, в которой при отсутствии магнитного поля выполняется условие обычного гидростатического равновесия:

$$\rho_0(z)g(z) = -\frac{dP_0(z)}{dz},\qquad(1)$$

где $\rho_0(z)$ и $P_0(z)$ – равновесные распределения плотности и давления с высотой z, g(z) – ускорение силы тяжести. Пусть в некоторой части этой атмосферы горизонтально располагается прямое магнитное волокно, для которого выполняется требование трансляционной симметрии, т. е. имеет место инвариантность относительно произвольных смещений вдоль одной из координатных осей (совпадающей с осью волокна). Пусть в декартовых координатах x, y, z это будет ось Y, тогда: $\partial/\partial y = 0$. Ось X будет направлена поперек волокна, а ось Z направим вертикально вверх, ведя отсчет от границы переходного слоя между хромосферой и короной. Сила тяжести имеет вид: $-\rho g(z) \mathbf{e}_z$. В области расположения магнитного волокна равновесные распределения давления и плотности плазмы будут отличаться от невозмущенных величин, связанных уравнением (1), вследствие действия магнитной силы. Система уравнений магнитной гидростатики имеет вид:

$$-\nabla P + (4\pi)^{-1} [\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}] - \rho g(z) \mathbf{e}_{z} = 0, \qquad (2)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{3}$$

$$P = \rho \frac{\Re}{\mu} T. \tag{4}$$

где **В** – напряженность магнитного поля, T – температура плазмы, μ – средняя молярная масса газа, \Re – универсальная газовая постоянная. Если ввести так называемую функцию магнитного потока A(x, z) (имеющую, как нетрудно показать, смысл *у*-компоненты векторного потенциала магнитного поля), через которую полоидальные компоненты поля выражаются в соответствии с (3) производными

$$B_x = -\frac{\partial A}{\partial z}, \quad B_z = \frac{\partial A}{\partial x},$$
 (5)

то система (2)-(4) легко приводится к виду [1, 18]:

$$\Delta A = -\frac{1}{2} \frac{dB_y^2(A)}{dA} - 4\pi \frac{\partial P(A,z)}{\partial A}, \qquad (6)$$

$$\rho(x,z)g(z) = -\frac{\partial P(A,z)}{\partial z}, \qquad (7)$$

$$T(x,z) = \frac{\mu}{\Re} \frac{P(x,z)}{\rho(x,z)}.$$
(8)

Следует подчеркнуть, что входящее в (7) продольное магнитное поле В_v при наличии трансляционной симметрии зависит только от магнитного потенциала А и его следует определять вместе с другими неизвестными функциями A(x, z). p(A, z), $\rho(A, z)$ из решения системы уравнений (6)-(8). Эта система, очевидно, является неполной: в ней отсутствует уравнение переноса энергии, которое обычно плохо известно, и потому число неизвестных функций здесь на единицу больше числа уравнений. По этой причине при решении магнитогидростатической задачи некоторые зависимости между функциями, описывающими систему, приходится задавать дополнительно. Часто для замыкания системы (6)-(8) используют политропическую гипотезу: *P=const*·р^{*n*}. На наш взгляд, в данном случае это нецелесообразно. Физические условия в протуберанцах весьма сложны, перенос энергии в них заведомо не описывается политропой. Априорное использование политропического закона резко сужает класс получаемых равновесий и может исключить саму возможность получить решение, которое могло бы моделировать протуберанец. В самом деле, используя (4), получаем: $T=const \cdot \rho^{n-1}$. Если, например, n > 1, то в области сгущения газа температура его растет, а не понижается, как это имеет место в холодных и плотных солнечных волокнах.

Наш подход заключается в том, чтобы решать не прямую задачу магнитогидростатики, когда правая часть уравнения (6) подбирается из сугубо математических соображений из такого расчета, чтобы удалось получить аналитическое решение для потенциала А, но обратную: считая магнитный потенциал (функцию потока) известным, рассчитать термодинамическую структуру протуберанца. Обычно, приступая к моделированию протуберанца, мы уже представляем себе его магнитную конфигурацию, как, например, это имеет место в схематических моделях [6, 7, 11, 12] и многих других. Следует лишь задать интересующую нас магнитную форму протуберанца аналитически, т. е. подобрать соответствующую функцию A(x, z), и затем проинтегрировать уравнение равновесия по А, найдя тем самым распределение газового давления в системе. Затем из (7) можно найти распределение плотности, а из уравнения состояния идеального газа (8) – температуру.

Общее решение обратной магнитостатической задачи

Получим общее решение обратной задачи магнитогидростатики для систем, обладающих трансляционной симметрией. Считая магнитный потенциал A(x, z) заданным, мы можем напрямую проинтегрировать уравнение (6) и получить выражения для давления (а затем для плотности и температуры) для любого заданного априори магнитного поля. Впервые такая задача в наиболее общей ковариантной форме с использованием так называемого вектора Килинга была решена [19] для любых систем, обладающих трансляционной, осевой или винтовой симметрией. Однако использовать общую ковариантную форму записи для решения конкретных физических задач невозможно, поэтому здесь мы рассмотрим отдельно вывод необходимых нам уравнений только для систем с трансляционной симметрией в декартовой системе координат (аналогичный вывод можно сделать и в случае осевой симметрии в цилиндрической или сферической системах координат, но это выходит за рамки настоящей работы).

Проинтегрируем (6), рассматривая z как фиксированный параметр, тогда $dA=A_zdz+A_xdx=A_xdx$. Здесь и ниже для краткости записи производную от A по координате будем обозначать соответствующим нижним индексом. Тогда

$$-4\pi P = \frac{B_y^2(A)}{2} + \int \left[A_{xx} + A_{zz}\right] A_x dx - 4\pi C(z) .$$
 (9)

Отсюда после взятия одного из интегралов получим:

$$8\pi P = -B_y^2(A) - 2\int A_{zz}A_x dx - (A_x)^2 + 8\pi C(z).$$
(10)

Если вдали от волокна при $z \to \pm \infty$, $x \to \pm \infty$ функция магнитного потока стремится к нулю, то, очевидно, константа интегрирования имеет вид: $C(z) = (8\pi)^{-1}B_y^2(0) + P(z,0)$, где $B_y^2(0)$ – внешнее продольное магнитное поле, не зависящее от координат, а $P(z,0) \equiv P_0(z)$ – гидростатическое давление атмосферы, свободной от магнитного поля (см. (1)). Следовательно,

$$8\pi P(z, A) = 8\pi P_0(z) - \left(B_y^2(A) - B_y^2(0)\right) - \left(2\int A_{zz}A_x dx + (A_x)^2\right).$$
(11)

Распределение плотности в системе найдем, вычислив, согласно (7), частную производную $\partial P(A, z)/\partial z$. Заметим, что для любой дифференцируемой функции S(x, z) справедливы следующие выражения:

$$\frac{\partial S(x,z)}{\partial x} = \frac{\partial S(x,A)}{\partial x} + A_x \frac{\partial S(x,A)}{\partial A} = A_x \frac{\partial S(z,A)}{\partial A};$$
$$\frac{\partial S(x,z)}{\partial z} = \frac{\partial S(z,A)}{\partial z} + A_z \frac{\partial S(z,A)}{\partial A} = A_z \frac{\partial S(x,A)}{\partial A}.$$

Из второго равенства, полагая, что A_x не обращается тождественно в нуль, находим

$$\frac{\partial S(z,A)}{\partial z} = \frac{\partial S(x,z)}{\partial z} - A_z \frac{\partial S(z,A)}{\partial A} = \\ = \frac{\partial S(x,z)}{\partial z} - \frac{A_z}{A_x} \left(A_x \frac{\partial S(A,z)}{\partial A} \right).$$

Выражение, стоящее справа в круглой скобке, со-

гласно первому из приведенных выше дифференциальных соотношений, равно производной $\partial S(x,z)/\partial x$. Следовательно,

$$\frac{\partial S(A,z)}{\partial z} = \frac{\partial S(x,z)}{\partial z} - \frac{A_z}{A_x} \frac{\partial S(x,z)}{\partial x}.$$
 (12)

Используя (12), мы в результате несложных вычислений находим из выражения для давления (11) распределение плотности в следующем виде:

$$\rho(z, x)g(z) = \rho_0(z)g(z) + \frac{1}{8\pi} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left((A_x)^2 + 2 \int A_{zz} A_x dx \right) - 2A_z \Delta A \right].$$
(13)

Магнитные аркады Пикельнера

В качестве примера применения полученных выражений (11), (13) рассчитаем структуру двух магнитных аркад с прогибом поля в центральной части типа тех, что были в свое время предложены Пикельнером [6] в качестве модели спокойного протуберанца с нормальной полярностью магнитного поля.

Пусть функция магнитного потока аркад имеет вид:

$$A_{1}(x,z) = \frac{B_{0}}{k} (1 + sk^{2}x^{2}) \exp(-k^{2}(s(z - z_{0})^{2} + x^{2})), (14)$$

где B_0 – единица измерения напряженности магнитного поля, k – обратный масштаб длины, а z_0 – вертикальная координата некоторого геометрического центра структуры, выбором которой, наряду с выбором k, определяется высота расположения магнитной аркады в короне. Для простоты модели мы будем полагать $z_0 = 0$. Свободный безразмерный параметр *s* определяет степень прогиба магнитных силовых линий в вершине магнитной аркады.

Геометрическая форма двух таких магнитных аркад, определяемая из условия A(x, z) = const, показана на рис. 1 для двух значений константы *s*.



Рис. 1. Геометрическая форма магнитных силовых линий в плоскости (x-z) для магнитных аркад, описываемых функцией потока (14), при s=1.2 (*a*) и s=1.4 (*б*). Чем больше *s*, тем больше прогиб поля в вершине арки.

Важно подчеркнуть, что волокна в данной модели располагаются строго над линией раздела магнитных полярностей в фотосфере, что соответствует данным наблюдений [1, 2].

Распределение плотности числа частиц в аркадной структуре представлено на рис. 2. Как видим, действительно, плазма скапливается в области прогиба аркады, причем, чем сильнее выражен прогиб, тем более плотную массу вещества он может поддерживать. Распределение плотности в волокне получено с учетом описанной в [17] гидростатической модели внутренней короны Солнца, представленной на рис. 3. За начальный уровень z = 0 выбран слой в переходной области с высотой над фотосферой около 1.5 Мм и с параметрами [1]: $T_{00} = 7000$ K, $P_{00} = = 1 \ \partial u \mu \cdot c m^{-2}$, $\rho_{00} = 1.7 \cdot 10^{-12} \ r \cdot c m^{-3}$, т. е. $n_{00} = 10^{12} \cdot c m^{-3}$. Температура газа в короне быстро нарастает от 7000 К на исходном уровне до 1.8 МК на высотах около 40 Мм. Концентрация частиц на этих высотах в окружающей волокно короне составляет примерно 10⁹ см⁻³. Модель дает зависимости $P_0(z)$ и $\rho_0(z)$, входящие в формулы (11) и (13).

На рис. 4 показано распределение температуры в данной магнитной конфигурации, рассчитанное по формулам (8), (11) и (13) также с учетом модели короны [17]. Для обратного масштаба длины было принято значение k = 1/50 Мм, масштаб напряженности поля выбран равным $B_0 = 5$ Гс, а для квадрата продольного магнитного поля, входящего в выражение (11), принято $B_y^2(A) = 0.5k^2A^2$. Последнее означает, что продольное магнитное поле в аркаде в среднем лишь на 30 % слабее поперечного. Следует особо подчеркнуть, что $B_y(A)$ очень быстро убывает с расстоянием от оси волокна, так что внешнее по отношению к волокну магнитное поле $B_y(0)$ в данной задаче отсутствует и для равновесия системы не требуется.



Рис. 2. Распределение плотности (концентрации) плазмы при s=1.2 (*a*) и при s=1.4 (*б*) в единицах $n_{00} \cong 10^{12} \,\mathrm{cm}^{-3}$.







Рис. 4. Пространственное распределение температуры в корональной магнитной арке с прогибом в вершине для двух случаев: *s*=1.2 (*a*) и *s*=1.4 (*б*). Температура выражена в миллионах К. В первом случае наиболее низкие температуры на высоте kz≈0.8 составляют около 14·10³ K, во втором (3÷4)·10³ K.

Нетрудно убедиться и в том, что полный электрический ток в направлении оси волокна также обращается в нуль в соответствии с законом Ампера.

Как видим, в этом случае мы получаем аркаду, «ноги» которой несколько перегреты по сравнению с короной, но на вершине аркады располагается массивное холодное волокно с концентрацией частиц, в 20–30 раз превышающей концентрацию частиц в окружающей горячей короне на том же геометрическом уровне, и с температурой менее 10000 К в наиболее холодной части волокна. Средняя высота волокна-протуберанца составляет около 0.8 k^{-1} =40 Мм.

Заключение

Реализован новый подход к моделированию солнечных протуберанцев – решение обратной магнитогидростатической задачи для систем с трансляционной симметрией. Метод применен для расчета равновесной структуры прямых волокон, горизонтально расположенных непосредственно над фотосферной линией раздела полярностей. В отличие от известных моделей с поддержкой равновесия волокна за счет внешнего поля, когда аналитические линейные решения уравнения равновесия строятся раздельно для цилиндрической области протуберанца и для его внешнего окружения, в данной модели волокно описывается одним точным нелинейным решением. На основе развитого метода впервые рассчитана предложенная Пикельнером [6] модель протуберанца в виде магнитной аркады с прогибом в вершине, где удерживается плотный и холодный газ. Магнитная арка с потенциальной «ямой» в вершине при напряженности поля всего в несколько гаусс может удерживать в равновесии волокно с плотностью в нескольких единиц ×10¹⁰см⁻³ и с температурой (5÷10)·10³ К на высотах до 40–50 Мм.

Работа поддержана Программой Президиума РАН П-30 и Программой ОФН-15.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прист Э. Солнечная магнитогидродинамика. М.: Мир, 1985. 589 с.

2. Tandberg-Hanssen E. The Nature of Solar Prominences. Dordrecht, Kluwer, 1995. 308 p.

3. Kippenhahn R., Schlüter A. Eine Theorie der Solaren filamente // Zeitschrift für Astrophysik. 1957. V. 43. P. 36–62.

4. Low B.C. The vertical filamentary structures of quiescent prominences // Solar Phys. 1982. V. 75, N 0.1. P. 119–131.

5. Low B.C., Petrie G.J.D. The internal structure and dynamics of solar quiescent prominences // Astrophys. J. 2005. V. 626. P. 551–562.

6. Pikelner S.B. Origin of quiescent prominences // Solar Phys. 1971. V.17. P. 44–49.

7. Kuperus M., Raadu M.A. The support of prominences formed in neutral sheets // Astron. Astrophys. 1974. V. 31. P. 189–193.

8. Lerche I., Low B.C. Cylindrical prominences and the magnetic influence of the photospheric boundary // Solar Phys. 1980. V. 66. P. 285–303.

9. Lerche I., Low B.C. On the equilibrium of cylindrical plasma supported horizontally by magnetic fields in uniform gravity // Solar Phys. 1980. V. 67. P. 229–243.

10. Low B.C. The field and plasma configuration of a filament overlying a solar bipolar region // Astrophys. J. 1981. V. 246. P. 538–548.

11. Rust D.M., Kumar A. Evidence for helically kinked magnetic field ropes in solar eruptions // Astrophys. J. 1996. V. 464. P. L199–L202.

12. Rust D.M. The helical flux rope structure of solar filaments // Advances in Space Research. 2003. V. 32, N. 10. P. 1895–1903.

13. Bashkirtsev V.S., Mashnich G.P. Oscillatory processes in prominences // Solar Phys. 1984. V. 91. P. 93–101.

14. Соловьев А.А. Теоретическая интерпретация колебательных процессов в петельных протуберанцах // Солнечные данные. 1985. № 9. С. 65–68.

15. Yeates A.R., Mackay D.H. Modelling the global solar

corona. III. Origin of the hemispheric pattern of filament // Solar Phys. 2009. V. 254. P. 77–88.

16. Low B.C., Zhang M. Magnetostatic structures of the solar corona. III. Normal and inverse quiescent prominences // Astrophys. J. 2004. V. 609. P. 1098–1111.

17. Соловьев А.А. Структура солнечных волокон. Протуберанцы в короне, свободной от магнитного поля // Астрономический журнал. 2010. Т. 87, № 1. С. 93–102.

18. Low B.C. Nonisothermal magnetostatic equilibria in a uniform gravity field. I. Mathematical formulation // Astrophys. J. 1975. V. 197. P. 251.

19. Шаповалов В.Н., Шаповалова О.В. К вопросу о стационарных инвариантных конфигурациях идеальной плазмы // Известия вузов. Физика. 2003. Т. 46. С. 74–76.

Главная Пулковская астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург