

УДК 537.86

**ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УНЧ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН  
В ОДНОРОДНОЙ ИОНОСФЕРЕ**

**И.Ю. Сергеев**

**FEATURES OF ELF ELECTROMAGNETIC WAVE PROPAGATION  
IN THE HOMOGENEOUS IONOSPHERE**

**I.Yu. Sergeev**

В работе рассмотрены квазистационарные уравнения Максвелла для гиротропных волн, для которых, вопреки принятому подходу, оставляются оба решения. В результате анализа дисперсионных соотношений было установлено, что в одном из решений коэффициент диффузии сильно зависит от угла направления магнитного поля. В частности, коэффициент диффузии в направлении, перпендикулярном полю, равен нулю, тогда как вдоль него достигает своего максимального значения. Данное свойство позволяет сделать вывод о том, что низкочастотные электромагнитные флуктуации в ионосферной плазме обладают способностью вытягиваться вдоль направления магнитного поля Земли, образуя длинные области с постоянным направлением электрического тока и поля и медленно меняющейся амплитудой. Чтобы проверить это утверждение, была решена численным методом прямая задача об эволюции флуктуации электрического тока. Результат показал, что изначально сферически симметричная флуктуация вытягивается вдоль линий магнитного поля в 5–30 раз, причем в ряде случаев уширение поперек поля полностью отсутствует.

Quasi-stationary Maxwell equations for gyrotropic waves have been examined. In spite of the conventional approach, the second solution has also been considered. The dispersion equation analysis shows that attenuation of one of the modes tends to zero in the perpendicular direction to the magnetic field, whereas along these lines the attenuation is finite. Based on this feature we may conclude that low-frequency electromagnetic fluctuations can expand along the Earth's magnetic field. They form long areas with invariable direction of the electric field and current and slowly varying amplitude. To check this conclusion, we solved numerically the direct problem of electromagnetic fluctuation evolution. The obtained result reveals that the spherically symmetric fluctuation expands 5–30 times along magnetic field lines while in some cases the broadening across the magnetic field is completely absent.

**Собственные моды гиротропных волн в однородной ионосфере**

Низкочастотное электромагнитное возмущение в ионосферной плазме, находящейся во внешнем однородном поле  $\vec{B}$ , определяется квазистационарными уравнениями Максвелла совместно с законом Ома и условием отсутствия продольного электрического поля [1–3]:

$$\begin{aligned} & (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}) \times \vec{B} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \times \\ & \times (\sigma_p \vec{E} \times \vec{B} - \sigma_H B \vec{E}) = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}, \\ & (\vec{E} \cdot \vec{B}) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля,  $\vec{j}$  – плотности стороннего тока,  $\sigma_p$ ,  $\sigma_H$  – проводимости Педерсена и Холла соответственно,  $c$  – скорость света.

Линейность уравнения (1) позволяет искать решение в виде линейной комбинации плоских гармонических волн. Не нарушая общности, будем полагать, что волна распространяется вдоль оси X:  $E_{x,y,z} = I_{x,y,z} \exp(i\omega t - ikx)$ , где  $\omega$  – циклическая частота,  $k$  – волновое число,  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$  – комплексные амплитуды. Пусть геомагнитное поле  $\vec{B}$  расположено в плоскости XY под углом  $\alpha \neq 0$  к оси X. Обозначим  $\sigma'_p = 4\pi\sigma_p / c^2$ ,  $\sigma'_H = 4\pi\sigma_H / c^2$ .

Из второго уравнения системы (1) получаем  $\cos\alpha E_x = -\sin\alpha E_y$ , что позволяет исключить  $E_y$ . Подставляя выражения для плоской волны в (1), получим [2]:

$$\begin{cases} i\omega\sigma'_H I_x + k^2 \sin\alpha I_z + i\omega\sigma'_p \sin\alpha I_z = 0 \\ i\omega\sigma'_p I_x + k^2 \cos^2\alpha I_x - i\omega\sigma'_H \sin\alpha I_z = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Необходимым и достаточным условием для решения системы (2) и, соответственно, существования плоской волны является уравнение  $\cos^2\alpha k^4 + i\sigma'_p (\cos^2\alpha + 1) k^2 \omega - (\sigma'^2_p + \sigma'^2_H) \omega^2 = 0$ . Легко заметить, что это уравнение может быть разрешено в действительных  $\omega$  и  $k$  только при равенстве второго слагаемого нулю, т. е. распространение волны без затухания возможно только при  $\sigma_p = 0$ , что соответствует общему принципу диссипации энергии в джоулево тепло. Решение данного уравнения дает дисперсионное соотношение:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{k^2}{\sigma'_p (g^2 + 1)} \frac{1}{2} \times \\ & \times \left( i(\cos^2\alpha + 1) \pm \sqrt{4g^2 \cos^2\alpha - \sin^4\alpha} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

показывающее, что существует две моды, определяемые верхним и нижним знаком. В дальнейшем будем рассматривать только область углов  $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ , т. к. остальные квадранты симметричны, что следует как из общих соображений, так и из выражения (3).

Анализируя (3), можно заметить, что в интервале углов  $\alpha^* \leq \alpha \leq 90^\circ$ , где  $\alpha^*$  определяется уравнением

$$\cos^2\alpha^* = 1 + 2g \left( g - \sqrt{g^2 + 1} \right), \quad (4)$$

$\omega$  имеет только мнимую составляющую, и электрическое поле будет эволюционировать согласно закону диффузии со своим коэффициентом диффузии для каждой из двух мод:

$$d_{1,2} = \frac{\cos^2 \alpha + 1 \pm \sqrt{\sin^4 \alpha - 4g^2 \cos^2 \alpha}}{2\sigma_p'(g^2 + 1)}. \quad (5)$$

Рассмотрим вещественные  $k$ . В случае  $\alpha^* \leq \alpha \leq 90^\circ$  частота имеет только мнимую составляющую, а выражение для собственных мод можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} E_x &= A_x \exp(-\beta_{1,2}t) \cos(kx + \phi_0), \\ E_z &= A_z \exp(-\beta_{1,2}t) \cos(kx + \phi_0). \end{aligned} \quad (6)$$

$\beta_{1,2} = d_{1,2}k^2$  – коэффициенты затухания,  $A_{x,z}$  – вещественные амплитуды,  $\phi_0$  – начальная фаза.

В интервале углов  $0 < \alpha < \alpha^*$  электрическое поле определяется выражениями:

$$\begin{aligned} E_x &= A_x \exp(-\beta t) \cos(\pm \omega' t - kx + \phi_{0x}), \\ E_z &= A_z \exp(-\beta t) \cos(\pm \omega' t - kx + \phi_{0z}), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\omega' = |\operatorname{Re}(\omega)|$ ,  $\beta = \operatorname{Im}(\omega)$  – коэффициент затухания,  $\phi_{0x}, \phi_{0z}$  – начальные фазы. Выражения (7) представляют собой две затухающих волны, бегущие в прямом и обратном направлениях.

Таким образом, если волна распространяется в конусе  $0 < \alpha < \alpha^*$ , то мы имеем гармоническую волну с затуханием  $\beta$ . Эту область будем называть волновой. Если же распространение происходит вне данного конуса, то, как было показано выше, мы имеем «расплывание» поля согласно закону диффузии. Данную область назовем квазидиффузной.

График зависимости  $\beta, \beta_1, \beta_2$  от угла  $\alpha$  приведен на рис. 1. Из него следует, что затухание моды 2 уменьшается вплоть до нуля при увеличении угла до  $90^\circ$ . Данный факт означает, что произвольное электромагнитное возмущение имеет тенденцию вытягиваться вдоль направления внешнего магнитного поля. Степень проявления эффекта зависит от того, в какой пропорции в каждое конкретное возмущение входят первые и вторые моды. Указанное свойство позволяет предположить, что электромагнитный шум в ионосферной плазме вытягивается вдоль магнитного поля Земли, образуя протяженные области с постоянным направлением электрического поля и медленно меняющейся напряженностью. Однако чтобы проверить данное предположение, необходимо рассмотреть как минимум двухмерную задачу. Такие вычисления представлены в следующем разделе.

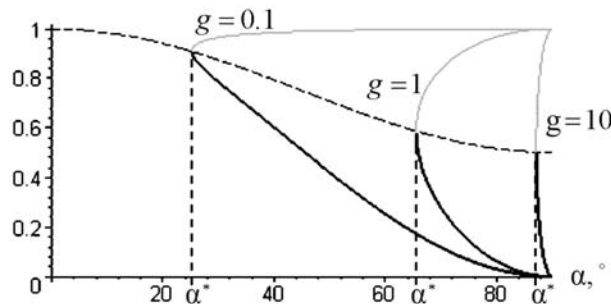


Рис. 1. Зависимость коэффициентов затухания от угла при различных  $g$ . Штриховая –  $\beta \sigma_p'(g^2 + 1)/k^2$ , серая –  $\beta_1 \sigma_p'(g^2 + 1)/k^2$ , черная –  $\beta_2 \sigma_p'(g^2 + 1)/k^2$ .

Если рассматривать вещественные  $\omega$ , что соответствует падению плоской волны на полупространство, то волновое число будет иметь как действительную, так и мнимую составляющую  $k = k' - ik''$ . На рис. 2 приведена угловая зависимость глубины проникновения поля  $x^* = \ln 10/k''$ , что представляет собой дистанцию, на которой амплитуда волны уменьшается в 10 раз. Данная величина может быть рассмотрена как оценка расстояния распространения возмущения определенной частоты в однородной ионосфере от источника. Из графика следует, что глубина проникновения в поперечном направлении ( $\alpha = 90^\circ$ ) для моды 2 равна нулю, а энергия каналирует преимущественно вдоль магнитного поля, что соответствует ранее сделанному утверждению о вытягивании электромагнитного возмущения.

### Численное решение задачи об эволюции флуктуации электрического тока

Рассмотрим аксиально-симметричное возмущение электрического тока, имеющего плавные границы, а также плавно нарастающее и спадающее со временем:

$$j_{y,z}(x, y, t) = \frac{q_{y,z}}{\pi^{3/2} a^2 t^*} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{t^2}{t^{*2}}\right), \quad (8)$$

где  $q_y, q_z$  – коэффициенты пропорциональности,  $a, t^*$  – характерные радиус и время флуктуации. Внешнее магнитное поле направим вдоль оси X. Исходя из сказанного выше, будем рассматривать только перпендикулярный магнитному полю ток, то есть  $\vec{j} = j_y \vec{e}_y + j_z \vec{e}_z$ , где  $\vec{e}_y$  и  $\vec{e}_z$  – орты соответствующих осей. Несмотря на то, что  $\vec{j}^z$  кажется более физичным, на самом деле ток  $\vec{j}^y = j_y \vec{e}_y$  лучше соответству-

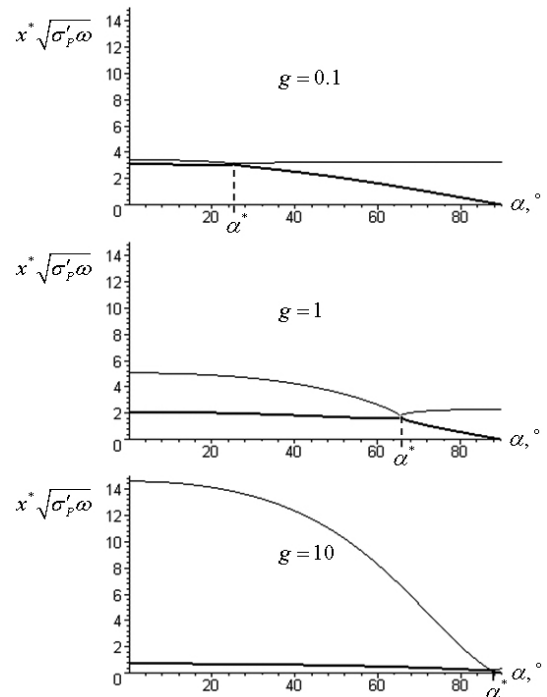


Рис. 2. Угловая зависимость глубины проникновения. 1-я мода —————, 2-я мода ————

ет трехмерной задаче и реальным флуктуациям, т. к. является аналогом ограниченной в трехмерном пространстве области.

Перейдем к безразмерным переменным в соответствии с выражениями

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{x}{a}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{a}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t^*}, \quad \tilde{E}_{y,z}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = \\ &= \frac{c^2 t^{*2}}{4\pi q} E_{y,z}(x, y, t); \\ \tilde{j}_{y,z}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) &= \frac{c^2 a^2 t^{*2}}{4\pi q_{y,z}} j_{y,z}(x, y, t) = \\ &= \frac{1}{\pi^{3/2}} e^{-\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - \tilde{t}^2}; \\ \tilde{\sigma}_{p,H} &= \frac{4\pi a^2}{c^2 t^{*2}} \sigma_{p,H}. \end{aligned} \quad (9)$$

Вначале рассмотрим ток  $\tilde{j}^y$ . Численное решение уравнения (1) представлено на рис. 3, где для сравнения также приведено пространственное распределе-

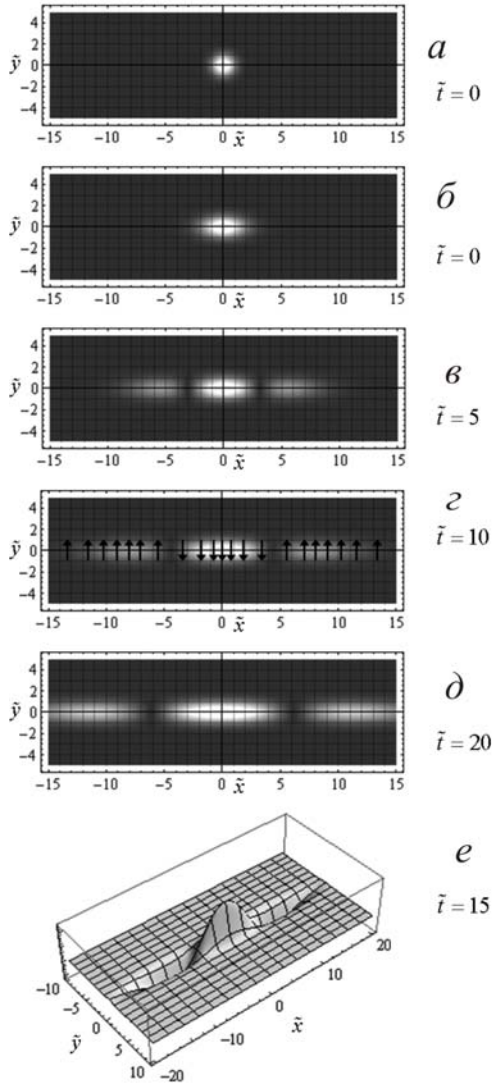


Рис. 3. Пространственное распределение стороннего тока  $\tilde{j}_y$  (а) и электрического поля  $\tilde{E}_y$  (б, в, з, д, е) в различные моменты времени при  $\tilde{\sigma}_p = 1$ ,  $\tilde{\sigma}_H = 0.1$ . На рис. 3, з стрелками обозначено направление поля.

ние  $\tilde{j}_y$ . Вычисления показывают, что  $\tilde{E}_z \ll \tilde{E}_y$ , поэтому будем рассматривать только  $\tilde{E}_y$ . В этом случае наведенный ток  $j_y \approx \sigma_p E_y$  и представленное на рис. 3 распределение поля также описывает распределение у-компоненты наведенного тока. Из графиков следует, что возмущение распространяется только в направлении внешнего магнитного поля, образуя узкие вытянутые области с медленно меняющейся величиной поля и тока. Так, уже при  $\tilde{t} = 0$  возмущение вытягивается приблизительно в два раза, а при  $\tilde{t} = 15$  – в 20 раз. При этом его поперечные размеры не изменяются. Численные расчеты дают  $\tilde{E}_y(0, \tilde{y}, \tilde{t}) / \tilde{E}_y(0, 0, \tilde{t}) = \tilde{j}_y(0, \tilde{y}, \tilde{t}) / \tilde{j}_y(0, 0, \tilde{t}) = \exp(-\tilde{y}^2)$ , т. е. в перпендикулярном магнитному полю направлении возмущение не распространяется совсем, и его профиль остается равным профилю стороннего тока  $\tilde{j}_y$ . Незамкнутый ток образует по разные стороны от оси Y две области, заряженные противоположными по знаку зарядами.

Стоит отметить, что хотя поле и меняет знак при изменении координаты x, распространение не является волновым. Изменение знака связано с тем, что в уравнение (1) в качестве источника входит производная по времени от тока, которая имеет разный знак при нарастании и убывании функции. Если рассмотреть флуктуацию вида  $\tilde{e}_y \exp(-\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2) \text{erf}(\tilde{t}) / \pi$  (erf( $\tilde{t}$ ) – интеграл ошибок), представляющую собой плавное «включение» тока, то возмущение поля будет иметь вид однополярного импульса, изображенного на рис. 4. По своей сути возмущение, вызванное током  $\tilde{j}_y$  (9), является суперпозицией двух однополярных импульсов, сгенерированных в разные моменты времени: импульс от нарастающей фазы тока и импульс, имеющий противоположный знак, от убывающей фазы тока. Соответственно первый импульс, будучи сгенерированным раньше, успел вытянуться сильнее.

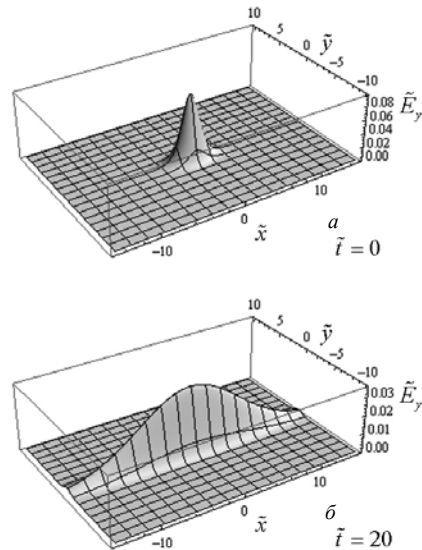


Рис. 4. Пространственное распределение электрического поля от источника вида  $\tilde{e}_y \exp(-\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2) \text{erf}(\tilde{t}) / \pi$  при  $\tilde{\sigma}_p = 1$ ,  $\tilde{\sigma}_H = 0.1$ .

Далее рассмотрим возмущение, создаваемое током  $\tilde{j}_z$ . Пространственное распределение поля, полученное численным решением (1), представлено на рис. 5. Из графика видно, что за  $\tilde{t} = 3$  возмущение увеличивается в продольном направлении примерно в 5 раз. Затем, как показывают расчеты, эффект преимущественного распространения вдоль магнитного поля ослабевает, и возмущение начинает распространяться также и в поперечном направлении. Однако возмущенная область продолжает оставаться существенно вытянутой вдоль оси X. В данном случае присутствует как диффузное, так и волновое распространение [1].

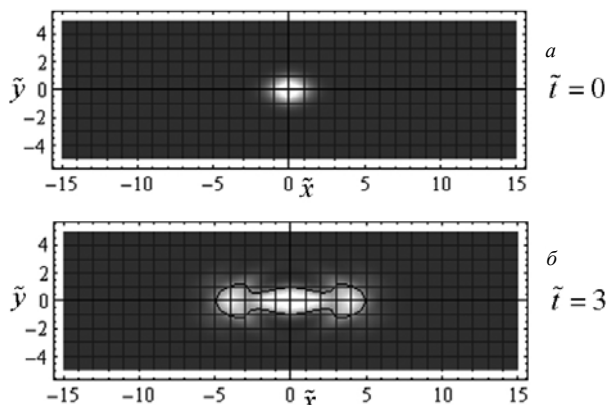


Рис. 5. Пространственное распределение модуля вектора электрического поля  $\tilde{E} = \sqrt{\tilde{E}_y^2 + \tilde{E}_z^2}$  генерируемого током  $\tilde{j}_z$  при  $\tilde{\sigma}_p = 1/2$ ,  $\tilde{\sigma}_H = 2$ .

### Выводы

1. Анализ распространения низкочастотных электромагнитных волн в однородной ионосферной плазме позволяет выделить две области: волновую – внутри конуса  $0 < \alpha < \alpha^*$  с осью, параллельной внешнему магнитному полю, и квазидиффузную – вне этого конуса. В волновой области собственные волны распространяются в виде гармонических колебаний с затуханием, определяемым проводимостями Холла и Педерсена. В квазидиффузной распространение подчиняется закону диффузии с коэффициентом диффузии, зависящим от угла.

2. Спектр собственных волн представляет собой две моды. Первая мода характеризуется малым затуханием в волновой области при  $\sigma_H \gg \sigma_p$ . Вторая мода обладает нулевым распространением поперек магнитного поля при любых соотношениях  $\sigma_H$  к  $\sigma_p$ .

3. Анализ свойств собственных волн позволяет сделать вывод о том, что низкочастотный электромагнитный шум (электромагнитные флуктуации) в ионосферной плазме имеет тенденцию вытягиваться вдоль направления магнитного поля Земли, образуя длинные области с постоянным направлением электрического поля и медленно меняющейся напряженностью. Численные расчеты, моделирующие двумерную флуктуацию электрического тока, показали справедливость такого утверждения. При этом было установлено, что некоторые типы флуктуаций могут вытягиваться вдоль магнитного поля в десятки раз, сохраняя практически неизменными поперечные размеры.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергеев И.Ю., Сорокин В.М. Генерация узкополосного спектра электромагнитных возмущений при пролете ракеты // Электронный журнал «Исследовано в России». 2004. V. 243. С. 2604–2611. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2004/243.pdf>
2. Сергеев И.Ю., Сорокин В.М., Ященко А.К. Низкочастотное излучение осесимметричного тока в ионосферной плазме // Известия ВУЗов. Радиофизика. 2000. Т. 43, N 8. С. 688–695.
3. Sorokin V.M., Sergeev I.Yu., Pokhotelov O.A. Low latitude gyrotronic waves in a finite thickness ionospheric conducting layer // JASTP. 2009. V. 71. P. 175–179.

ИЗМИРАН, Троицк