

УДК 534.222.2

НОВАЯ МОДЕЛЬ РАЗЛЕТА ПРОДУКТОВ ВЗРЫВА В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ

И.Ю. Сергеев

A NEW MODEL OF EXPLOSION PRODUCT EXPANSION IN RAREFIED GAS

I.Yu. Sergeev

В работе представлена новая модель разлета продуктов взрыва в разреженном газе. Используется подход, основанный на учете процессов диссипации энергии в стандартной модели «снежного плуга», что позволяет получить, во-первых, точное аналитическое решение, а во-вторых, результаты, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными. Сравнение представленной модели с существующими (простой моделью снежного плуга, моделью Стюарта и моделью Холвея) показывает, что последние могут быть описаны в рамках данной модели. Вместе с тем, новая модель способна учесть еще ряд процессов, неучтенных в названных моделях. Сравнение с экспериментом СПОЛОХ показывает хорошее соответствие результатов расчетов наблюдаемым характеристикам.

A new analytical model of explosion product expansion in rarefied gas is presented. This model rests on an approach based on energy dissipation processes in the simple snowplow model. This enables us to obtain firstly an accurate analytical solution and secondly results that check well with experimental data. Comparison between the said and existing models (simple snowplow model, Stuart's model and Holway's model) shows that such approach can be applied to describe all dissipation processes in use and also take into account other energy dissipation channels. Comparison of the analytical model presented and the SPOLOH experiment reveals close agreement between calculation results and observed characteristics.

Введение

Модель взрыва в разреженном газе отличается от широко известных моделей для плотной атмосферы, разработанных, например, Седовым, Тейлором, Коробейниковым и др. Взрыв в разреженном газе, как правило, характеризуется условиями, при которых средняя длина свободного пробега молекул и атомов внутри возмущенной области существенно меньше ее размера, тогда как вне этой области значительно превосходит его. При таких условиях частицы покоящегося окружающего газа застревают в расширяющейся области, увеличивая ее массу – так называемый эффект снежного плуга. В ходе этого процесса происходит перераспределение энергии, что приводит к уменьшению скорости движения газа внутри возмущенной области. На сегодняшний день существует три теоретические модели взрыва в разреженном газе: простая модель снежного плуга, модель Стюарта и модель Холвея [1, 2]. Рассмотрим их более подробно.

Обзор существующих моделей взрыва в разреженном газе

Простая модель снежного плуга [1] использует эффект снежного плуга в чистом виде, что описывается уравнением сохранения полной кинетической энергии $T \equiv \int_0^R \frac{1}{2} v^2 \rho(r, t) 4\pi r^2 dr = T_0$, где v – скорость возмущенного газа, R – радиус области взрыва, r – радиус точки наблюдения, T_0 – начальная кинетическая энергия. Такой подход соответствует действительности только в том случае, если нет никаких процессов диссипации кинетической энергии. В действительности таких процессов достаточно много: трение и внутренняя энергия, ударная волна, электромагнитное излучение и т. д. Основные из них – это трение, давление на поверхности возмущенной области и движение газа вне этой области, включая ударную и акустическую волну. Решение данной модели приведено на рис. 1, где \bar{R} – обез-

размерен-

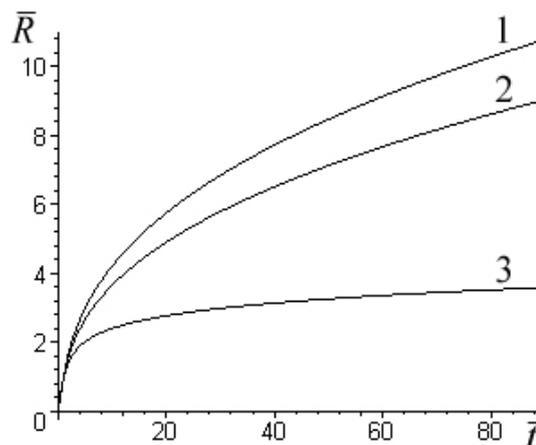


Рис. 1. Сравнение теоретических моделей (зависимость радиуса области взрыва от времени в безразмерных переменных): 1 – простая модель снежного плуга; 2 – модель Стюарта; 3 – модель Холвея при $l=6$.

ный радиус, \bar{t} – обезразмеренное время (7). Рисунок показывает, что простая модель снежного плуга не соответствует физике реальных процессов, поскольку из нее следует, что область взрыва бесконечно расширяется. В реальных процессах любое движение с течением времени останавливается.

Модель Стюарта [1] основана на простой модели снежного плуга, но дополнительно рассматривает процесс диссипации энергии – трение расширяющегося через внешнюю атмосферу газа, что описывается следующим уравнением:

$$\bar{R}(1 + \bar{R}^3 / 3) d^2 \bar{R} / d\bar{t}^2 + (3(\gamma - 1) / 2 + (\gamma + 1) \bar{R}^3 / 2) (d\bar{R} / d\bar{t})^2 = 1, \quad (1)$$

где γ – показатель адиабаты. Численное решение уравнения представлено на рис. 1. Из графика видно, что скорость расширения области взрыва убывает сильнее, чем в предыдущем случае, однако мо-

дель все еще не соответствует реальным процессам.

Модель Холвея является развитием модели Стюарта. Она учитывает еще один канал диссипации энергии [2]. Ее численное решение изображено на рис. 1, который показывает, что расширение в конечном итоге почти останавливается. Однако громоздкость уравнения и невозможность получения аналитического результата делает его малоприменимым для решения ряда задач, например таких, как вычисление электромагнитных эффектов взрыва. Вместе с тем, модель Холвея проявляет некоторую нефизичность. В частности, численное решение уравнения (20) из работы [2] дает для величины \bar{R} при $\bar{t} = 100$ значения 2.47, 0.97, 0.45, 0.22, при X (определение X см. ниже) соответственно равно 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999. Это значит, что при стремлении распределения плотности в области взрыва к бесконечно тонкой сфере (что то же самое при $X \rightarrow 1$), «конечный» радиус приближается к 0, что противоречит физическому смыслу. Слово «конечный» взято в кавычки, т. к. в данной модели радиус, строго говоря, продолжает бесконечно увеличиваться, хотя темпы его роста и становятся очень малы на больших временах.

Указанные недостатки существующих моделей выявляют необходимость создания новой, которая, с одной стороны, давала бы аналитическое решение, а с другой – соответствовала экспериментальным данным.

Построение аналитической модели взрыва в разреженном газе

Основываясь на анализе существующих моделей, построим новую. Будем отталкиваться от простой модели снежного плуга. Чтобы учесть процессы диссипации энергии, в уравнении сохранения кинетической энергии (см. выше) в правой части вместо начального значения T_0 будем использовать $\mu(t)T_0$, где $\mu(t)=T/T_0$ – коэффициент уменьшения кинетической энергии, T – полная кинетическая энергия в области взрыва в текущий момент времени. В качестве исходного уравнения получаем:

$$\int_0^R \frac{1}{2} v^2 \rho(r, t) 4\pi r^2 dr = \mu(t) T_0. \quad (2)$$

Данный подход учитывает все процессы диссипации энергии. Сложность задачи переходит в плоскость нахождения функции $\mu(t)$ и последующего решения уравнения (2). По своему смыслу μ – монотонно убывающая функция, такая, что $\mu(0)=1$, $\mu(\infty)=0$.

Пусть $Q=dT/dt$ – скорость диссипации кинетической энергии. Тогда Q пропорциональна величине кинетической энергии: $Q=-\alpha T$ (α – положительный коэффициент). Это предположение представляется обоснованным, поскольку, во-первых, большинство процессов в природе, связанных с диссипацией, имеют такую же зависимость, например, остывание нагретого тела: скорость уменьшения температуры нагретого тела, т. е. внутренней энергии, пропорциональна величине самой температуры (если говорить строго, то пропорциональна разности температур нагретого тела и окружающей среды, но в условиях

данной задачи $\mu(\infty)=0$). Во-вторых, приведенная зависимость может быть рассмотрена как линейное приближение. Однако окончательно подтвердить или опровергнуть выдвинутое предположение можно будет, сравнив результаты модели с экспериментальными данными. С учетом вышесказанного получаем:

$$\partial T / \partial t = -\alpha T. \quad (3)$$

Решением уравнения (3) будет $T=T_0 \exp(-\alpha t)$ или, что тоже самое, $\mu=\exp(-\alpha t)$.

Далее, так же как и в [1], будем полагать, что $v=\xi V$ и $\rho(r, t)=K(t)\rho_r(\xi)$, где $\xi=r/R$, $V=dR/dt$, – скорость границы области взрыва, ρ – плотность, $K(0)=1$. Справедливость сделанных предположений обсуждается в [1]. К этому лишь добавим, что детальные численные расчеты, проведенные в [3], подтверждают предположение о линейной зависимости скорости. Из второго предположения следует:

$$X = \int_0^1 \xi^4 \rho(\xi, t) d\xi / \int_0^1 \xi^2 \rho(\xi, t) d\xi,$$

где X – константа, зависящая только от распределения газа внутри сферы. $X=3/5$ для однородной плотности и $X=1$ для бесконечно тонкой сферы ($\rho_r(\xi)=\delta(\xi-1)$). Используя выражение для X , получаем:

$$\frac{1}{2} \int_0^R v^2 \rho(r, t) 4\pi r^2 dr = X m V^2 / 2. \quad (2)$$

Откуда из (2) находим:

$$V^2 m = \mu(t) V_0^2 m_0, \quad m = m_0 + 4/3 \pi R^3 \rho_1. \quad (4)$$

Здесь m_0 – масса продуктов взрыва, m – полная масса вещества, вовлеченного в движение (с учетом «захваченного» газа), $V_0=V(0)$, ρ_1 – плотность окружающего газа. Полагаем, что в начальный момент времени вся химическая энергия ВВ E_0 переходит в кинетическую, т. е. $T_0=E_0$. Отсюда с учетом выражений для X и кинетической энергии находим:

$$V_0 = \sqrt{2E_0 / (X m_0)}. \quad (5)$$

Обезразмеривая (5), получаем нелинейное уравнение на \bar{R} :

$$\left(1 + \frac{1}{3} \bar{R}^3\right) \left(\frac{d\bar{R}}{d\bar{t}}\right)^2 = \mu(\bar{t}), \quad (6)$$

$$\bar{R} = \sqrt[3]{4\pi \rho_1 / m_0} R, \quad \bar{t} = V_0 \sqrt[3]{4\pi \rho_1 / m_0} t. \quad (7)$$

t – время, отсчитываемое от момента взрыва. Уравнение (6) может быть решено аналитически. Точное решение имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{t} = & -\frac{2}{\alpha} \ln \left\{ 1 - \alpha \frac{\sqrt[3]{3}}{10} \left[\sqrt[4]{27} \times \right. \right. \\ & \times F \left(\frac{2\sqrt[3]{3} \sqrt{1 + \bar{R}/\sqrt[3]{3}}}{\sqrt{3} + 1 + \bar{R}/\sqrt[3]{3}}, k \right) \operatorname{sgn}(\sqrt{3} - 1 - \bar{R}/\sqrt[3]{3}) + \\ & + 2\sqrt[4]{27} \eta \left(\bar{R}/\sqrt[3]{3} + 1 - \sqrt{3} \right) \times \\ & \times F(1, k) + 2\bar{R}/\sqrt[3]{3} \sqrt{1 + (\bar{R}/\sqrt[3]{3})^3} - \\ & \left. \left. - \sqrt[4]{27} F(2\sqrt[3]{3}/(\sqrt{3} + 1), k) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

$$k = \sin(75^\circ) \equiv \sqrt{2 + \sqrt{3}} / 2,$$

$F(x, k) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-x'^2)(1-k^2x'^2)}} dx'$ – неполный эллиптический интеграл первого рода, sgn – функция знака вещественной переменной ($\text{sgn}(x)=1$ при $x>0$ и $\text{sgn}(x)=-1$ при $x\leq 0$), η – функция «ступеньки» ($\eta(x)=1$ при $x>0$ и $\eta(x)=0$ при $x\leq 0$).

Ранее было сделано утверждение, что подход, используемый для построений данной модели, учитывает все линейные процессы диссипации энергии. Проверим, способна ли модель описать каналы, используемые в существующих моделях, для чего сравним их. Для начала отметим, что при $\alpha=0$ (т. е. $\mu(t)=1$) новая аналитическая модель тождественно переходит в простую модель снежного плуга.

Для сравнения с моделью Стюарта установим некоторые свойства уравнения (1). В предельных случаях имеем $T/T_0=1$ при $\bar{t} \rightarrow 0$ и $T/T_0=(\gamma-1)/\gamma$ при $\bar{t} \rightarrow \infty$. Таким образом, для сравнения с моделью Стюарта представляется разумным использовать для μ экспоненциальную функцию, равную 1 при $\bar{t}=0$ и $(\gamma-1)/\gamma$ при $\bar{t} \rightarrow \infty$. В качестве такой функции выберем $\mu = (\gamma-1)/\gamma + \exp(-\bar{t}/3)/\gamma$. Данная зависимость не соответствует общему принципу диссипации энергии до нуля, но она используется только в целях сравнения.

Вначале проведем аналитическое сравнение моделей в предельных случаях. При малых \bar{t} и $\gamma=3/5$ из (1) получаем $R = \sqrt{2E_0 / (Xm_0)} t$, в то время как (8) дает $R=V_0t$, то есть обе модели имеют одинаковую зависимость. Для больших \bar{t} из (1) имеем: $R = \sqrt[5]{75(\gamma-1)E_0 / (8\pi\gamma X\rho_1)} t^{2/5}$. Предел решения (8) при $\bar{t} \rightarrow \infty$ дает точно такое же выражение. Численное сравнение во всех областях приведено на рис. 2. Из приведенного анализа и численного сравнения следует, что представленная модель способна описать модель Стюарта, по крайней мере, с достаточно высокой точностью.

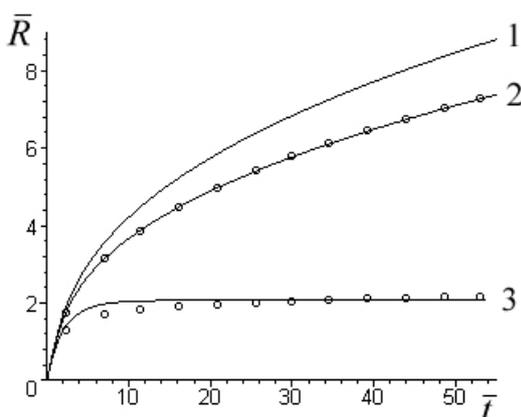


Рис. 2. Сравнение разработанной модели с другими теоретическими моделями (зависимость радиуса области взрыва от времени в безразмерных переменных): 1 – при $\alpha=0$ (она же простая модель снежного плуга); 2 – при $\mu = (\gamma-1)/\gamma + \exp(-\bar{t}/3)/\gamma$ (окружности – модель Стюарта); 3 – при $\alpha=3/4$ (окружности – модель Холвея при $l=20$).

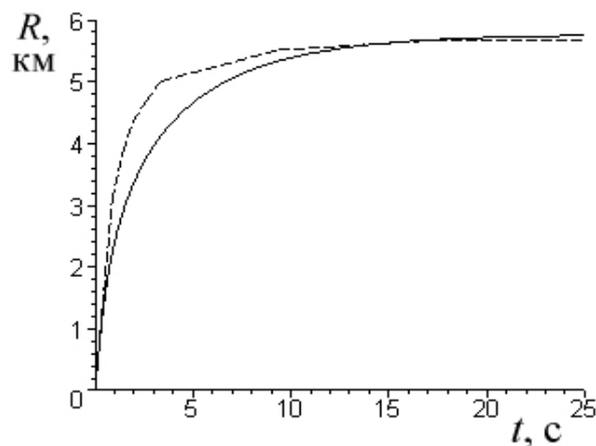


Рис. 3. Зависимость радиуса области взрыва от времени. Сплошная кривая – представленная модель при $\alpha=0.12$, $X=0.86$. Прерывистая кривая – данные эксперимента СПЛОХ-1.

Сравнение с моделью Холвея представлено на рис. 2. Графики показывают, что новая модель способна описать с хорошей степенью точности процессы диссипации энергии, учтенные и в этой модели, тем самым подтверждая, что они близки к линейным.

Таким образом, представленная аналитическая модель может описать все 3 модели взрыва в разреженном газе. Далее сравним ее с данными эксперимента СПЛОХ-1 [4], в котором на высоте 170 км ($\rho_1=8.2 \cdot 10^{-10}$ кг/см³) был подорван заряд массой 12 кг, при этом энергия взрыва составила $6.5 \cdot 10^7$ Дж. Результат сравнения изображен на рис. 3, из которого следует, что модель достаточно хорошо описывает экспериментальные данные.

Автор выражает благодарность В.М. Сорокину за полезную дискуссию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stuart G.W. Explosions in Rarefied Atmosphere // Phys. Fluids. 1965. V. 8. P. 603–606.
2. Holway L.H. Similarity model of an explosion in a Rarefied Atmosphere // Phys. Fluids. 1969. V. 12. P. 2506–2510.
3. Brode H.L. Blast wave a spherical charge // Phys. Fluids. 1959. V. 2, N 2. P. 217–229.
4. Ружин Ю.Я. Плазменные возмущения при инъекции энергичных частиц в ионосфере: Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. М.: ИЗМИРАН, 1992. 385 с.

ИЗМИРАН, Троицк