Секция D. Конденсированные состояния. БШФФ-2009. С. 344–348

УДК 530.145, 539.12

ИНТЕГРИРОВАНИЕ КВАНТОВОЙ МОДЕЛИ ТИРРИНГА ПРИ КОНЕЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

В.В. Семенов, С.Э. Коренблит

INTEGRATION OF THE QUANTUM THIRRING MODEL AT A FINITE TEMPERATURE

V.V. Semenov, S.E. Korenblit

С использованием методов термополевой динамики и динамического отображения делается попытка конструктивного определения операторной бозонизации в модели Тирринга при конечной температуре.

An attempt to constructively define operational bosonization for the Thirring model at a finite temperature is made using methods of thermofield dynamics and dynamic mapping.

Введение

Введение температуры $T = 1/\varsigma$ в квантовой теории поля [1, 2] достигается путем переупорядочивания над новым температурным вакуумом $|\,0(\varsigma)\rangle$ выражений для гейзенберговских полей (ГП) $\psi(x)$ в терминах свободных физических полей $\varphi(x)$, определенных при T=0 над «холодным» вакуумом $|\,0\tilde{0}\rangle$, связанным с новым вакуумом температурным преобразованием Боголюбова [2]:

$$V_{\vartheta}\,|\,0(\varsigma)\rangle = |\,0\tilde{0}\rangle\,, \tag{1}$$

где $\vartheta = \vartheta(k^1, \varsigma)$.

Тогда, если $\rho = +1$ для бозонов или $\rho = -1$ для фермионов и соответственно

$$g(k^1, \varsigma) = \exp\{\varsigma\omega(k^1)\} f(k^1, \varsigma) = \cosh^2\vartheta \tag{2}$$

или $g(k^1, \varsigma) = \cos^2\vartheta$ при

$$g(k^1, \varsigma) - \rho f(k^1, \varsigma) = 1, \tag{3}$$

то соответствующее интерполирующее $\psi(x, \varsigma)$ и физическое $\varphi(x, \varsigma)$ термополя, как и тильда-сопряженные к ним термополя $\tilde{\psi}(x, \varsigma)$, $\tilde{\varphi}(x, \varsigma)$ [2], определяются при $\sigma = \pm 1$ соотношениями вида

$$\psi(x, \varsigma) = g^{1/2}(i\partial_1, \varsigma)\psi(x) - \sigma f^{1/2}(i\partial_1, \varsigma)\tilde{\psi}(x), \tag{4}$$

$$\varphi(x, \varsigma) = g^{1/2}(i\partial_1, \varsigma)\varphi(x) - \sigma f^{1/2}(i\partial_1, \varsigma)\tilde{\varphi}(x), \tag{5}$$

полностью переносящими на термополя температурную зависимость состояний (1). В общем случае отсюда следует отсутствие каких-либо уравнений движения для термополей, поскольку уже поля $\varphi(x)$ и $\tilde{\varphi}(x)$ в (5) подчиняются разным свободным уравнениям [2]. Счастливым исключением из этого правила являются, по крайней мере, свободное эрмитово (псевдо-) скалярное поле $(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\times$ $\times\varphi(x, \varsigma) = 0$ и безмассовое поле Дирака в двух измерениях [1], $i(\gamma^\mu\partial_\mu)\chi(x, \varsigma) = 0$, где множитель i пока не актуален. Однако нелинейные вклады в уравнениях для взаимодействующих полей неизбежно разрушают принцип суперпозиции для термополя (4). Поэтому как для самодействующего скалярного поля, где гейзенберговские уравнения (ГУ) для $\psi(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ совпадают, так и для самодействующего поля Дирака, где множитель i меняет относительный знак взаимодействия в уравнении для $\tilde{\psi}(x)$ (см. ниже), левая часть уравнения (4) уже не является решением ГУ для полей в правой части. С другой стороны, при условии, что оба набора полей полны, неприводимы [3] и асимптотически совпадают при $t \to \pm\infty$, гейзенберговские поля $\psi(x)$ и (4) должны в слабом смысле [2] стремиться к физическим полям $\varphi(x)$ и (5) соответственно над исходным и температурным вакуумами (1). При наличии связанных состояний [2], и в том числе для точно решаемых двумерных моделей Швингера и Тирринга [3], условия полноты и неприводимости для асимптотических полей $\varphi(x)$ и $\varphi(x, \varsigma)$ не выполняются автоматически.

В данной работе конструктивно дается положительный ответ на поставленный в [1] вопрос о судьбе операторных соотношений бозонизации при конечных температурах с использованием, в отличие от [1], методов термополевой динамики [2]. Показано, что ГУ модели Тирринга [4] допускают точные решения в терминах скалярных физических термополей (5), как гейзенберговские термополя $\Psi(x, \varsigma)$, для которых соотношения типа (4) не имеют смысла даже асимптотически при $t \to \pm\infty$ в слабом смысле [2] над исходным вакуумом $|\,0\tilde{0}\rangle$, поскольку этим полям не соответствуют никакие наблюдаемые частицы. Эти поля удобно строить, используя естественную линеаризацию ГУ модели, обнаруженную в различных точно решаемых моделях четырехфермионного взаимодействия в [5], [6].

Гамильтониан модели Тирринга [4] при нулевой температуре описывает ферми-взаимодействие поля

---

[1] Обозначения: $x^\mu = \left(x^0, x^1\right)$, $x^0 = t$, $\hbar = c = 1$, $\partial_\mu = \left(\partial_0, \partial_1\right)$, метрический тензор $g^{00} = -g^{11} = 1$, тензор Леви-Чивиты $\varepsilon^{01} = -\varepsilon^{10} = 1$, дираковски сопряженное поле $\overline{\Psi}(x) = \Psi^\dagger(x)\gamma^0$, гамма-матрицы $\gamma^0 = \sigma_1$, $\gamma^1 = -i\sigma_2$, $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma_3$, где σ_i – матрицы Паули и I – единичная матрица, $x^\xi = x^0 + \xi x^1$, $2\partial_\xi = 2\partial/\partial x^\xi = \partial_0 + \xi\partial_1$, $P^1 = -i\partial_1$.

Дирака нулевой массы в двумерном пространстве–времени:

$$H_{I[\Psi]}(x^0) = \frac{g}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx^1 J_{(\Psi),\mu}(x) J^{\mu}_{(\Psi)}(x), \tag{6}$$

подчиняющегося каноническим антикоммутационным соотношениям

$$\left\{\Psi_{\xi}(x), \Psi_{\xi'}(y)\right\}|_{x^0=y^0} = 0, \tag{7}$$

$$\left\{\Psi_{\xi}(x), \Psi^{\dagger}_{\xi'}(y)\right\}|_{x^0=y^0} = \delta_{\xi,\xi'}\delta\left(x^1-y^1\right), \tag{8}$$

где $\xi, \xi' = \pm 1,$ а ГП и векторный ток имеют вид

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix}\Psi_1(x)\\ \Psi_2(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Psi_{+1}(x)\\ \Psi_{-1}(x)\end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$J^{\mu}_{(\Psi)}(x) = \overline{\Psi}(x)\gamma^{\mu}\Psi(x),\ \mu = 0, 1. \tag{10}$$

В термополевой динамике [2] необходимо удвоить число степеней свободы, снабдив все поля Ψ их тильда-партнерами $\tilde{\Psi}$. Согласно [2], полученная теория будет определяться гамильтонианом $\hat{H}[\Psi,\tilde{\Psi}] = H[\Psi] - \tilde{H}[\tilde{\Psi}],$ где $\tilde{H}[\tilde{\Psi}] = H^{*}[\tilde{\Psi}^{*}],$ причем $H[\Psi] = H_{0[\Psi]}(x^0) + H_{I[\Psi]}(x^0),$ где $\tilde{H}_{I[\tilde{\Psi}]} = H_{I[\tilde{\Psi}]},$ а для свободного гамильтониана

$$H_{0[\Psi]}(x^0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx^1 \Psi^{\dagger}(x) E(P^1)\Psi(x) \tag{11}$$

при $E(P^1) = \gamma^5 P^1$ имеем $\tilde{H}_{0[\tilde{\Psi}]} = -H_{0[\tilde{\Psi}]},$ и, как обычно [2], для свободных безмассовых (термо-) полей Дирака подстановка (5) $\chi(x) \to \chi(x,\varsigma)$ не меняет вида оператора: $\hat{H}_0[\chi,\tilde{\chi}] = H_0[\chi] - \tilde{H}_0[\tilde{\chi}].$ Однако эти свободные ферми-поля, вообще говоря, не являются теперь физическими полями данной модели теории поля [1, 3], и каждое из слагаемых в $\hat{H}[\Psi,\tilde{\Psi}]$ должно быть, как известно [3], эквивалентно в слабом смысле свободному гамильтониану безмассовых (псевдо-) скалярных полей $\phi(x),\ \varphi(x),$ по крайней мере при $T = 0.$ Считая, в отличие от [2], всю зависимость от температуры перенесенной на операторы, согласно (5), будем поэтому и решение для $T \neq 0$ искать в представлении этих же свободных безмассовых скалярных полей над $|0\tilde{0}\rangle.$ Таким образом, вместо динамического отображения $\psi(x) = \Upsilon[\varphi(x)]$ с последующей обратной к (5) подстановкой $\varphi(x) \to \varphi(x,\varsigma)$ над температурным вакуумом $|0(\varsigma)\rangle$ [2], здесь строится динамическое отображение для $\psi(x) \to \Psi(x;\varsigma) = \Upsilon[\varphi(x,\varsigma)],$ по сути, с теми же самыми коэффициентными функциями, но уже в представлении физических термополей $\varphi(x,\varsigma)$ с последующей подстановкой (5) $\varphi(x,\varsigma) \to \varphi(x)$ над «холодным» вакуумом $|0\tilde{0}\rangle.$ Такой путь демонстрирует определенную универсальность точного решения модели Тирринга в этом представлении.

Независимость ГУ для полей Ψ и $\tilde{\Psi}$ позволяет рассмотреть решение только для первого из них. Второе поле, кинематически независимое в смысле (7), получается аналогично:

$$i\gamma^{\nu}\partial_{\nu}\Psi(x;\varsigma) = g\gamma_{\nu}J^{\nu}_{(\Psi)}(x;\varsigma)\Psi(x;\varsigma), \tag{12}$$

или для отдельных компонент поля Ψ (9):

$$2\partial_{\xi}\Psi_{\xi}(x;\varsigma) = -igJ^{-\xi}_{(\Psi)}(x;\varsigma)\Psi_{\xi}(x;\varsigma), \tag{13}$$

где введены правая и левая компоненты векторного тока:

$$J^{\xi}_{(\Psi)}(x;\varsigma) = J^{0}_{(\Psi)}(x;\varsigma) + \xi J^{1}_{(\Psi)}(x;\varsigma) = \\ = 2\Psi^{\dagger}_{\xi}(x;\varsigma)\Psi_{\xi}(x;\varsigma). \tag{14}$$

Линеаризация

Из уравнения (12) и соотношений антикоммутации для операторов поля (7), (8) следует, что в каноническом уравнении движения для оператора «тока» (10), (14) из правой части (12)

$$i\partial_0\gamma_{\nu}J^{\nu}_{(\Psi)}(x;\varsigma) - \left[\gamma_{\nu}J^{\nu}_{(\Psi)}(x;\varsigma), H_{0(\Psi)}\left(x^0;\varsigma\right)\right] = \\ = \left[\gamma_{\nu}J^{\nu}_{(\Psi)}(x;\varsigma), H_{I(\Psi)}\left(x^0;\varsigma\right)\right] \Rightarrow 0 \tag{15}$$

исчезает вклад коммутатора с гамильтонианом взаимодействия $H_{I(\Psi)}\left(x^0;\varsigma\right).$ Поэтому эволюция этого «тока» будет описываться некоторым свободным гамильтонианом $H_{0(\chi)}\left(x^0;\varsigma\right),$ квадратичным при таком же значении коммутатора слева по некоторым свободным физическим (пробным) полям Дирака $\chi(x,\varsigma),$ подчиняющимся таким же антикоммутационным соотношениям (7), (8):

$$i\partial_0\gamma_{\nu}J^{\nu}_{(\chi)}(x;\varsigma) - \\ -\left[\gamma_{\nu}J^{\nu}_{(\chi)}(x;\varsigma), H_{0(\chi)}\left(x^0;\varsigma\right)\right] = 0. \tag{16}$$

Как показано в [6], учет возможного вклада в (15) швингеровских членов являлся бы преждевременным и приводил бы к противоречию с условиями сохранения векторного и аксиального токов. Действительно, свой точный смысл этот оператор «тока» (10), (14) приобретает лишь после фиксации пространства представления антикоммутационных соотношений (7), (8) и приведения его в этом представлении к нормальной форме, например, путем перенормировки с помощью ε-раздвижки и вычитания вакуумного среднего [3]:

$$\hat{J}^{0}_{(\Psi)}(x;\varsigma) = \lim_{\tilde{\varepsilon}\to 0}\hat{J}^{0}_{(\Psi)}(x;\varsigma;\tilde{\varepsilon}), \tag{17}$$

$$\hat{J}^{1}_{(\Psi)}(x;\varsigma) = \lim_{\varepsilon\to 0}\hat{J}^{1}_{(\Psi)}(x;\varsigma;\varepsilon), \tag{18}$$

где $\tilde{\varepsilon}^0 = \varepsilon^1 \to 0$ при

$$\tilde{\varepsilon}^1 = \varepsilon^0,\ \varepsilon^2 > 0, \tag{19}$$

$$\hat{J}^{\nu}_{(\Psi)}(x;\varsigma;a) = Z^{-1}(a)[\overline{\Psi}(x+a;\varsigma)\gamma^{\nu}\Psi(x;\varsigma) - \\ -\langle 0|\overline{\Psi}(x+a;\varsigma)\gamma^{\nu}\Psi(x;\varsigma)|0\rangle] \tag{20}$$

и аналогично для компонент (14). Константа перенормировки $Z(a)$ определена ниже в (59). С учетом этих замечаний, наблюдения (15), (16) позволяют идентифицировать гейзенберговский ток (10) в правой части (12) с током свободных пробных полей $\chi(x,\varsigma)$, умноженным на неизвестную пока константу β :

$$\gamma_\nu J^\nu_{(\Psi)}(x;\varsigma) \Rightarrow \frac{\beta}{2\sqrt{\pi}}\gamma_\nu \hat{J}^\nu_{(\chi)}(x;\varsigma), \tag{21}$$

в смысле

$$\frac{\beta}{2\sqrt{\pi}}\gamma_\nu \hat{J}^\nu_{(\chi)}(x;\varsigma;\varepsilon) \to \frac{\beta}{2\sqrt{\pi}}\gamma_\nu : J^\nu_{(\chi)}(x;\varsigma), \tag{22}$$

что приводит к линеаризации [6] обоих ГУ (12), (13) в представлении этих свободных полей $\chi(x,\varsigma)$. Разумеется, первое – по x^0, а второе – по x^ξ, однако второе – привилегия двумерия и начальные условия к нему далеко не очевидны, тогда как первое допускает физически обоснованные шредингеровские начальные условия при $x^0 = 0$.

Скалярные пробные поля

В различных двумерных моделях бозонизация как возможность оперировать функционалами от бозонных полей вместо фермионных операторов и наоборот является мощным инструментом получения различных непертурбативных решений. Использование бозонизации значительно упрощает интегрирование линеаризованных ГУ (12). Будучи формально [3] следствием лишь условий сохранения векторного тока (10), аксиально-векторного тока $J^\mu_{5(\Psi)}(x) = \overline{\Psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\Psi(x)$ и равенства $\gamma^\mu\gamma^5 = -\varepsilon^{\mu\nu}\gamma_\nu$, соотношения бозонизации имеют смысл слабых равенств только для нормальной формы (17), (18) операторов тока, что неявно предполагает и выбор определенных представлений (анти-) коммутационных соотношений. Для свободных безмассовых полей $\chi(x,\varsigma)$, $\varphi(x;\varsigma)$ этот выбор осуществляется, по сути, автоматически и его оказывается вполне достаточно именно в силу линеаризации (22). При этом для свободных полей имеем операторные равенства

$$J^\mu_{(\chi)}(x;\varsigma) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial^\mu\varphi(x;\varsigma), \tag{23}$$

$$J^\xi_{(\chi)}(x;\varsigma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\partial_{-\xi}\varphi^{-\xi}\left(x^{-\xi};\varsigma\right), \tag{24}$$

где символ нормальной формы здесь и далее опущен, а свободное безмассовое бозонное термополе $\varphi(x;\varsigma)$ является унитарно-неэквивалентным представлением (5) поля Клейна–Гордона:

$$\varphi(x;\varsigma) = V_\vartheta^{-1}\varphi(x)V_\vartheta = \varphi^{(+)}(x;\varsigma) + \varphi^{(-)}(x;\varsigma) \tag{25}$$

и удовлетворяет уравнению $\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x;\varsigma) = 0$.

Дуальное к $\varphi(x;\varsigma)$ поле имеет противоположную четность и определяется уравнениями

$$\phi(x;\varsigma) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dy^1 \varepsilon\left(x^1 - y^1\right)\partial_0\varphi\left(y^1, x^0;\varsigma\right), \tag{26}$$

$$\partial^\mu\phi(x;\varsigma) = -\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi(x;\varsigma),\ \partial_\mu\partial^\mu\phi(x;\varsigma) = 0, \tag{27}$$

где $\varepsilon(x^1) = \pm 1$ соответственно при $x^1 > 0$, $x^1 < 0$. С этими полями связаны заряды

$$O(\varsigma) = \int_{-\infty}^{\infty} dy^1 \partial_0\varphi\left(y^1, x^0;\varsigma\right), \tag{28}$$

$$\bar{O}(\varsigma) = \int_{-\infty}^{\infty} dy^1 \partial_0\phi\left(y^1, x^0;\varsigma\right), \tag{29}$$

а их линейные комбинации определяют левые и правые термополя и их заряды [3]:

$$\varphi^\xi\left(x^\xi;\varsigma\right) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x;\varsigma) - \xi\phi(x;\varsigma)\right], \tag{30}$$

$$Q^\xi(\varsigma) = \frac{1}{2}\left[O(\varsigma) - \xi\bar{O}(\varsigma)\right]. \tag{31}$$

Коммутационные соотношения для полей $\varphi(x;\varsigma)$, $\phi(x;\varsigma)$, $\varphi^\xi\left(x^\xi;\varsigma\right)$ и их зарядов не зависят от температуры:

$$\left[\varphi(x;\varsigma), \varphi(y;\varsigma)\right] = \left[\phi(x;\varsigma), \phi(y;\varsigma)\right] =$$

$$= -i\frac{\varepsilon(x^0 - y^0)}{2}\theta((x-y)^2), \tag{32}$$

$$\left[\varphi^\xi(s;\varsigma), \varphi^{\xi'}(\tau;\varsigma)\right] = -\frac{i}{4}\varepsilon(s-\tau)\delta_{\xi,\xi'}. \tag{33}$$

Она проявляется в коммутаторах «частотных частей» (26), заданных, согласно (5), отдельно операторами рождения и уничтожения над исходным вакуумом:

$$c(k^1)\,|\,0\rangle = \tilde{c}(k^1)\,|\,0\rangle = 0$$

в виде

$$\varphi^{\xi(+)}\left(x^\xi;\varsigma\right) = -\frac{\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk^1}{2k^0}\theta\left(-\xi k^1\right)\times$$

$$\times\left[\cosh\vartheta c\left(k^1\right)e^{-ik^0x^\xi} - \sinh\vartheta\tilde{c}\left(k^1\right)e^{+ik^0x^\xi}\right], \tag{34}$$

$$\varphi^{\xi(-)}\left(x^\xi;\varsigma\right) = \left[\varphi^{\xi(+)}\left(x^\xi;\varsigma\right)\right]^\dagger. \tag{35}$$

$$\left[\varphi^{\xi(\pm)}(s;\varsigma), \varphi^{\xi'(\mp)}(\tau;\varsigma)\right] =$$

$$= \mp\frac{1}{4\pi}\delta_{\xi,\xi'}\ln\left(i\mu\frac{\varsigma}{\pi}\sinh\left(\frac{\pi(\pm\{s-\tau\} - i0)}{\varsigma}\right)\right) \pm$$

$$\pm\frac{1}{2\pi}\delta_{\xi,\xi'}g\left(\varsigma,\mu_1\right), \tag{36}$$

$$g\left(\varsigma,\mu_1\right) = \int_{\mu_1}^{\infty}\frac{dk^1}{k^0}\frac{1}{e^{\varsigma k^0} - 1},\ k^0 = |\,k^1\,|. \tag{37}$$

$$\left[\varphi^{\xi(\pm)}(s;\varsigma), Q^{\xi'(\mp)}(\varsigma)\right] = +\frac{i}{4}\delta_{\xi,\xi'}, \tag{38}$$

$$\left[Q^{\xi(\pm)}(\varsigma), Q^{\xi'(\mp)}(\varsigma)\right] = \pm f\left(\varsigma, L\right)\delta_{\xi,\xi'}, \tag{39}$$

$$f\left(\varsigma, L\right) = \frac{1}{4} + \frac{L^2}{2}\int_0^\infty dk^1 k^1\frac{1}{e^{\varsigma k^1} - 1}e^{-\frac{(k^1L)^2}{2}}. \tag{40}$$

Параметры регуляризации μ, μ_1 впоследствии стремятся к нулю, а L – к бесконечности. Аналогичные формулы справедливы для тильда-партнеров этих полей и их зарядов. Кинематическая независимость тильда-партнеров от полей $\varphi(x;\varsigma)$, $\phi(x;\varsigma)$, $\varphi^{\xi}\left(x^{\xi};\varsigma\right)$ и их зарядов также нарушается для соответствующих им частотных частей (25), (34) и их зарядов $Q^{\xi(\pm)}$.

Следуя [3], с помощью введенных полей можно построить представление решений уравнения Дирака для безмассового свободного пробного поля при конечной температуре, $\partial_{\xi}\chi_{\xi}\left(x^{-\xi};\varsigma\right)=0$, в виде локальных нормальных экспонент от левых и правых бозонных полей $\varphi^{\xi}(x^{\xi};\varsigma)$ и их зарядов $Q^{\xi}(\varsigma)$ (30), (31). Однако кинематической независимости (7) для тильда-партнеров теперь можно добиться, только «запутав» в одном поле сразу оба заряда $Q^{\xi}(\varsigma)$ и $\tilde{Q}^{\xi}(\varsigma)$:

$$\chi_{\xi}\left(x^{-\xi};\varsigma\right)=$$

$$=N_{\varphi}\left\{e^{-i\sqrt{\pi}\left[2\varphi^{-\xi}\left(x^{-\xi};\varsigma\right)+\frac{\xi}{2}Q^{\xi}(\varsigma)+\frac{1}{2}\tilde{Q}^{\xi}(\varsigma)+\frac{1}{2}\tilde{Q}^{-\xi}(\varsigma)\right]}\right\}u_{\xi}, \tag{41}$$

где u_{ξ}, c – числовой спинор, равный

$$u_{\xi}=\sqrt{\frac{\mu}{2\pi}}e^{-\frac{3\pi}{8}a_1-g\left(\varsigma,\mu_2\right)}e^{-\frac{i\pi\xi}{4}}, \tag{42}$$

с расходящейся константой a_1. В отличие от [7], выбранные таким образом поля обладают правильными свойствами симметрии [2] относительно операции «тильда».

Интегрирование ГУ

В выбранном представлении правая часть ГУ (12) с учетом линеаризации легко приводится к нормальной форме:

$$\partial_0\Psi_{\xi}(x;\varsigma)=$$

$$=\left(-\xi\partial_1-i\frac{\beta g}{2\sqrt{\pi}}J_{(\chi)}^{-\xi,(-)}(x;\varsigma)\right)\Psi_{\xi}(x;\varsigma)-$$

$$-\Psi_{\xi}(x;\varsigma)\left(i\frac{\beta g}{2\sqrt{\pi}}J_{(\chi)}^{-\xi,(+)}(x;\varsigma)\right). \tag{43}$$

Очевидное выражение для производной любой функции $F(x^1)$ через оператор импульса P^1 $-i\partial_1F(x^1)=\left[P^1,F(x^1)\right]$ и его конечный эквивалент $e^{iaP^1}F(x^1)e^{-iaP^1}=F(x^1+a)$ позволяют привести уравнение (43) к виду

$$\frac{d}{dt}Y(t)=A(t)Y(t)-Y(t)B(t), \tag{44}$$

имеющему следующее формальное решение через упорядоченные по времени экспоненты:

$$Y(t)=T_A\left\{\exp\left(\int_0^t d\eta A(\eta)\right)\right\}Y(0)\times$$

$$\times\left[T_B\left\{\exp\left(\int_0^t d\eta B(\eta)\right)\right\}\right]^{-1}, \tag{45}$$

которые в данном случае можно затем немедленно свести к обычным $Y(t)\to\Psi_{\xi}(x;\varsigma)$,

$$\Psi_{\xi}(x;\varsigma)=e^{C^{(-)}(x;\varsigma)}\Psi_{\xi}\left(x^1-\xi x^0,0;\varsigma\right)e^{C^{(+)}(x;\varsigma)}. \tag{46}$$

Используя операторную бозонизацию (24) для векторного тока пробного поля (41), находим

$$C^{(\pm)}(x;\varsigma)=$$

$$=-i\frac{\beta g}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{x^0}dy^0J_{(\chi)}^{-\xi,(\pm)}\left(x^1+\xi y^0-\xi x^0,y^0;\varsigma\right)=$$

$$=-i\frac{\beta g}{2\pi}\varphi^{\xi(\pm)}\left(x^{\xi};\varsigma\right)+i\frac{\beta g}{2\pi}\varphi^{\xi(\pm)}\left(-x^{-\xi};\varsigma\right). \tag{47}$$

Начальное поле $\Psi_{\xi}(x^1-\xi x^0,0;\varsigma)\Rightarrow\lambda_{\xi}(x^{-\xi};\varsigma)$ также оказывается одним из решений свободного уравнения $\partial_{\xi}\lambda_{\xi}(x^{-\xi};\varsigma)=0$, вообще говоря, унитарно-неэквивалентным свободному полю (41). Поэтому выберем его с параметрами $\bar{\alpha},\bar{\beta}$ соответствующего канонического преобразования $\bar{\alpha}^2-\bar{\beta}^2=4\pi$ в виде

$$\lambda_{\xi}\left(x^{-\xi};\varsigma\right)=U_{\eta}^{-1}\chi_{\xi}\left(x^{-\xi};\varsigma\right)U_{\eta}=N_{\varphi}\left\{e^{X(x;\varsigma)}\right\}v_{\xi}, \tag{48}$$

$$\bar{\alpha}=2\sqrt{\pi}\cosh\eta,\ \bar{\beta}=2\sqrt{\pi}\sinh\eta, \tag{49}$$

$$X(x;\varsigma)=-i\sqrt{\pi}\left[2\omega^{-\xi}\left(x^{-\xi};\varsigma\right)+\frac{\xi}{2}W^{\xi}(\varsigma)-\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\bar{\alpha}-\bar{\beta}\right)}{4\sqrt{\pi}}\left(\tilde{Q}^{\xi}(\varsigma)+\tilde{Q}^{-\xi}(\varsigma)\right)\right]. \tag{50}$$

$$\omega^{\xi}\left(x^{\xi};\varsigma\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\bar{\alpha}\varphi^{\xi}\left(x^{\xi};\varsigma\right)+\bar{\beta}\varphi^{-\xi}\left(-x^{\xi};\varsigma\right)\right], \tag{51}$$

$$W^{\xi}(\varsigma)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\bar{\alpha}Q^{\xi}(\varsigma)-\bar{\beta}Q^{-\xi}(\varsigma)\right], \tag{52}$$

$$\text{где }v_{\xi}=\sqrt{\frac{\mu}{2\pi}}e^{h_{\xi}(\bar{\alpha},\bar{\beta})}e^{-\frac{i\pi\xi}{4}}, \tag{53}$$

$$h_{\xi}(\bar{\alpha},\bar{\beta})=-\frac{1}{32}\left(\bar{\alpha}^2+\bar{\beta}^2\right)a_1-\frac{1}{16}\left(\bar{\alpha}-\bar{\beta}\right)^2\left(a_1-\xi a_2\right)-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\bar{\alpha}^2+\bar{\beta}^2\right)\ g\left(\varsigma,\mu_2\right). \tag{54}$$

Подставляя эти выражения для начального поля в решение (46), получим нормальную экспоненту для поля Тирринга в виде

$$\Psi_{\xi}(x;\varsigma)=N_{\varphi}\left\{e^{R(x;\varsigma)}\right\}v_{\xi}, \tag{55}$$

$$R(x;\varsigma)=-i\bar{\alpha}\varphi^{-\xi}\left(x^{-\xi};\varsigma\right)-i\bar{\beta}\varphi^{\xi}\left(x^{\xi};\varsigma\right)-$$

$$-\frac{i\xi}{4}\bar{\alpha}Q^{\xi}(\varsigma)+\frac{i\xi}{4}\bar{\beta}Q^{-\xi}(\varsigma)+$$

$$+i\frac{1}{4}\left(\bar{\alpha}-\bar{\beta}\right)\ \left(\tilde{Q}^{\xi}(\varsigma)+\tilde{Q}^{-\xi}(\varsigma)\right) \tag{56}$$

при соответствующих условиях на параметры, необходимых для выполнения канонических антикоммутационных соотношений (7), (8):

$$\bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2 = 4\pi\,,\ \bar{\beta} - \frac{\beta g}{2\pi} = 0. \qquad (57)$$

Повторяя те же вычисления для второго поля $\tilde{\Psi}$, получим для него выражение, легко воспроизводимое известными «правилами подстановки тильда» [2]. Таким образом, мы получили систему тильда-сопряженных полей $(\Psi, \tilde{\Psi})$, удовлетворяющих динамическим уравнениям теории и подчиняющихся каноническим антикоммутационным соотношениям.

Непосредственное вычисление с этими полями оператора векторного тока (17)–(20) воспроизводит, с учетом (57), соотношение (21), демонстрируя самосогласованность приведенных вычислений. Константа перенормировки находится при этом явно в виде

$$Z(a) = \exp\left\{-\frac{\bar{\beta}^2}{4\pi}\ln\left(\left(\frac{i\mu\varsigma}{\pi}\right)^2 \times \right.\right.$$
$$\left.\left.\times\sinh\left(\frac{\pi\left(a^{-\xi} - i0\right)}{\varsigma}\right)\sinh\left(\frac{\pi\left(a^{\xi} - i0\right)}{\varsigma}\right)\right)\right\}, \qquad (58)$$

т. е. $Z(a) \Rightarrow (-\mu^2 a^2)^{-\bar{\beta}^2/4\pi}$ при $a \to 0$ и не зависит от температуры.

Заключение

В данной работе в рамках термополевой динамики показано, что модель Тирринга [4], точно решаемая и при конечной температуре [7], остается при этом также и точно линеаризуемой, а соотношения бозонизации как равенства между операторами свободных полей сохраняют свою силу и при конечной температуре. Таким образом, метод интегрирования ГУ, основанный на процедуре линеаризации и динамическом отображении на шредингеровские поля, может быть с успехом применен и при конечной температуре.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-02-00749) и аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 гг.)» (проект РНП. 2.2.1.1/1483, 2.1.1/1539).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alvarez-Estrada R.F., Gomez A.N. Schwinger and Thirring models at finite chemical potential and temperature // Phys. Rev. D. 1998. V. 57. P. 3618–3633.

2. Умэдзава Х., Мацумото Х., Татики М., Термополевая динамика и конденсированные состояния. М.: Мир, 1985. 504 с.

3. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987. 616 с.

4. Thirring W.E. A soluble relativistic field theory // Ann. of Phys. 1958. V. 3, Iss. 1. P. 91–112.

5. Коренблит С.Э., Танаев А.Б., Линеаризация гейзенберговских уравнений в моделях четырехфермионного взаимодействия и проблема связанных состояний. Препринт ИЯФ 2001-11, Новосибирск, 2001.

6. Korenblit S.E., Semenov V.V. Massless pseudo-scalar fields and solution of the Federbush model // J. Nonlin. Math. Phys. 2006. V. 13, N 2. P. 271–284.

7. Amaral R.L.P.G., Belvedere L.V., Rothe K.D. Two-dimensional thermofield bosonization // Ann. Phys. 2005. V. 320, N. 2. P. 39.

Иркутский государственный университет, Иркутск