УДК 539.123

ПРОПАГАТОР НЕЙТРИНО В СРЕДЕ: АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ

А.Е. Калошин, И.В. Потапова

NEUTRINO PROPAGATOR IN MEDIUM: ALGEBRAIC ASPECTS

A.E. Kaloshin, I.V. Potapova

В работе была рассмотрена задача распространения нейтрино в движущейся неполяризованной среде и построен удобный базис. Он состоит из восьми элементов, основан на использовании внемассовых проекционных операторов и имеет простые мультипликативные свойства.

We consider the matter of neutrino propagating in the moving unpolarized medium. We also construct a suitable basis. The basis consisting of eight elements is based on usage of off-shell projective operators. Its main advantage is simple multiplicative properties.

Введение

Рассмотрим взаимодействие нейтрино и антинейтрино с электронами [1]:

$$\nu_\alpha + e^- \to \nu_\alpha + e^-,$$

где α = e, μ, τ.

Для движущейся неполяризованной материи, состоящей из электронов, получаем уравнение Дирака для волновой функции нейтрино [2, 3]:

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - \frac{1}{2}\gamma_\mu(1-\gamma^5)f^\mu - m)\psi(x) = 0,$$

$$f^\mu = \frac{G_f}{\sqrt{2}}(1+4\sin^2\vartheta_\omega)j^\mu,\ j^\mu = (n, n\vec{u}).$$

где n – плотность электронов среды, $\vec{u}$ – скорость среды.

Имеем уравнение для функции Грина в импульсном представлении:

$$(\hat{p} - m - \frac{1}{2}\hat{f}(a+\gamma^5))G(p) = -1.$$

Пропагатор нейтрино в среде зависит от двух четырехмерных векторов p и u, что приводит к более сложной гамма-матричной структуре и соответственно к усложнению алгебраических свойств таких объектов.

Проекционный и γ-матричный базис

Наиболее естественным базисом для разложения является γ-матричный базис [4]:

$$S(p,u) = s_1 I + s_2\hat{p} + s_3\hat{u} + s_4\sigma^{\mu\nu}p_\mu u_\nu +$$
$$+ s_5 i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\sigma_{\mu\nu}u_\lambda p_\rho + + s_6\gamma^5 + s_7\hat{p}\gamma^5 + s_8\hat{u}\gamma^5,$$

где s_i – лоренц-инвариантные коэффициенты, u^μ – четырехмерная скорость. Всего в разложении $S(p, u)$ имеется восемь независимых компонент с учетом нарушения четности. Известно, что γ-матричный базис является полным, коэффициенты разложения свободны от сингулярностей и связей. Однако этот базис неудобен при умножении и обращении, так как базисные элементы не ортогональны друг другу.

Построим Λ-базис, который наиболее удобен при умножении и обращении выражений типа $S(p, u)$:

$$Q_1 = \Lambda + \frac{1+\hat{x}\gamma^5}{2},\ Q_2 = \Lambda - \frac{1+\hat{x}\gamma^5}{2},$$

$$Q_3 = \Lambda + \frac{1-\hat{x}\gamma^5}{2},\ Q_4 = \Lambda - \frac{1-\hat{x}\gamma^5}{2},$$

$$Q_5 = \Lambda + \frac{\gamma^5+\hat{x}}{2},\ Q_6 = \Lambda - \frac{\gamma^5+\hat{x}}{2},$$

$$Q_7 = \Lambda + \frac{\gamma^5-\hat{x}}{2},\ Q_8 = \Lambda - \frac{\gamma^5-\hat{x}}{2}.$$

Строится он с использованием внемассовых проекционных $(\frac{1\pm\hat{x}\gamma^5}{2})$ и нильпотентных $(\frac{\gamma^5\pm\hat{x}}{2})$ операторов [5], которые обладают следующими свойствами:

$$\frac{1\pm\hat{x}\gamma^5}{2}\frac{1\pm\hat{x}\gamma^5}{2} = \frac{1\pm\hat{x}\gamma^5}{2},$$

$$\frac{\gamma^5\pm\hat{x}}{2}\frac{\gamma^5\mp\hat{x}}{2} = \frac{1\pm\hat{x}\gamma^5}{2}.$$

Основу составляют операторы $\Lambda^\pm = \frac{1}{2}(1\pm\frac{\hat{p}}{W})$ [6], причем

$$\Lambda^\pm\Lambda^\pm = \Lambda^\pm,\ \Lambda^\pm\Lambda^\mp = 0,\ W = \sqrt{p^2}.$$

Введенный здесь вектор $x^\mu = b(p^\mu(up) - u^\mu p^2)$ обладает следующими свойствами:

$$x^\mu x_\mu = -1,\ x^\mu p_\mu = 0,$$

где b – нормировочный множитель. Таким образом, x^μ ортогонален импульсу, а его квадрат зависит от знака квадрата импульса. Если $p^2>0$ и среда покоится или движется медленно, то x^μ – пространственно подобный вектор. Тогда, выбирая нормировочный множитель $b^2=1/(p^2(up)^2-p^2)$, можно положить $x^2=-1$.

Полученный базис является полным, его элементы независимы и имеют простые свойства относительно умножения (см. таблицу).

Процедура обращения пропагатора

Уравнение для нахождения значения, обратного данному:

$$(\sum_M Q_M\bar{S}_M)(\sum_M Q_L\bar{G}_L) = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = I.$$

Оно сводится к системе уравнений с коэффициентами $\bar{G}_L$ ($\bar{S}_M$ считаем известными), которая разбивается на четыре пары уравнений:

$$\bar{S}_5\bar{G}_8 + \bar{S}_1\bar{G}_1 = 1,$$

$$\bar{S}_8\bar{G}_1 + \bar{S}_4\bar{G}_8 = 0,$$

$$\bar{S}_6\bar{G}_7 + \bar{S}_2\bar{G}_2 = 1,$$

$$\bar{S}_7\bar{G}_2 + \bar{S}_3\bar{G}_7 = 0,$$
$$\bar{S}_7\bar{G}_6 + \bar{S}_3\bar{G}_3 = 1,$$
$$\bar{S}_6\bar{G}_3 + \bar{S}_2\bar{G}_6 = 0,$$
$$\bar{S}_8\bar{G}_5 + \bar{S}_4\bar{G}_4 = 1,$$
$$\bar{S}_5\bar{G}_4 + \bar{S}_1\bar{G}_5 = 0.$$

Отсюда выражения для $\bar{G}_i$:

$$\bar{G}_1 = -\bar{S}_4/\Delta_1,\ \bar{G}_2 = -\bar{S}_3/\Delta_2,$$
$$\bar{G}_3 = -\bar{S}_2/\Delta_2,\ \bar{G}_4 = -\bar{S}_1/\Delta_1,$$
$$\bar{G}_5 = \bar{S}_5/\Delta_1,\ \bar{G}_6 = \bar{S}_6/\Delta_2,\ \bar{G}_7 = \bar{S}_7/\Delta_2,$$
$$\bar{G}_8 = \bar{S}_8/\Delta_1.$$
$$\Delta_1 = \bar{S}_8\bar{S}_5 - \bar{S}_4\bar{S}_1,\ \Delta_1 = \bar{S}_7\bar{S}_6 - \bar{S}_3\bar{S}_2.$$

Мультипликативные свойства операторов базиса

	Q 1	**Q 2**	**Q 3**	**Q 2**	**Q 5**	**Q 6**	**Q 7**	**Q 8**
Q1	Q1	0	0	0	Q5	0	0	0
Q2	0	Q2	0	0	0	Q6	0	0
Q 3	0	0	Q3	0	0	0	Q7	0
Q4	0	0	0	Q4	0	0	0	Q8
Q5	0	0	0	Q5	0	0	0	Q1
Q6	0	0	Q6	0	0	0	Q2	0
Q7	0	Q7	0	0	0	Q3	0	0
Q8	Q 8	0	0	0	Q4	0	0	0

Частные случаи. Отсутствие среды

Положим коэффициенты при $\hat{u}$ в γ-матричном базисе равными нулю (отсутствие среды), тогда коэффициенты в проекционном базисе будут иметь следующий вид:

$$\bar{S}_1 = s_1 + s_2W,\ \bar{S}_2 = s_1 - s_2W,$$
$$\bar{S}_3 = s_1 + s_2W,\ \bar{S}_4 = s_1 - s_2W,$$
$$\bar{S}_5 = s_6 + s_7W,\ \bar{S}_6 = s_6 - s_7W,$$
$$\bar{S}_7 = s_6 + s_7W,\ \bar{S}_8 = s_6 - s_7W.$$

Коэффициенты в γ-матричном базисе для обратного пропагатора:

$$\bar{G}_1 = s_1/\Delta,\ \bar{G}_2 = -s_2/\Delta,$$
$$\bar{G}_3 = 0,\ \bar{G}_4 = 0,\ \bar{G}_5 = 0,$$
$$\bar{G}_6 = -s_6/\Delta,\ \bar{G}_7 = -s_7/\Delta,\ \bar{G}_8 = -s_7/\Delta.$$
$$\Delta = s_7^2W^2 - s_6^2 - s_2^2W^2 + s_1^2.$$

Частные случаи. Сохранение четности

В случае сохранения четности коэффициенты при членах, содержащих γ^5, будут равняться нулю. Тогда коэффициенты в γ-базисе обратного пропагатора имеют вид:

$$\bar{G}_1 = \frac{s_3(pu) + s_2W^2 + s_1W}{W},$$
$$\bar{G}_2 = \frac{-s_3(pu) - s_2W^2 + s_1W}{W},$$
$$\bar{G}_3 = \frac{s_3(pu) + s_2W^2 + s_1W}{W},$$
$$\bar{G}_4 = \frac{-s_3(pu) - s_2W^2 + s_1W}{W},$$
$$\bar{G}_5 = \frac{-s_4W - s_3}{bW^2},$$
$$\bar{G}_6 = \frac{s_4W - s_3}{bW^2},$$
$$\bar{G}_7 = \frac{s_4W + s_3}{bW^2},$$
$$\bar{G}_8 = \frac{-s_4W + s_3}{bW^2}.$$

Пропагатор нейтрино: явный вид

Используя проекционный базис и данную процедуру обращения, легко записать выражение для функции Грина в веществе:

$$G_{\text{matt}} = \frac{-(p^2 - m^2)(\hat{p} + m) + \hat{f}(\hat{p} - m)P_L(\hat{p} + m) -}{(p^2 - m^2)^2 - 2(fp)}$$
$$\frac{-f^2\hat{p}P_L + 2(fp)P_R(\hat{p} + m)}{(p^2 - m^2) + f^2p^2},$$
$$P_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5),\ P_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5).$$

Заключение

Получен наиболее удобный базис на основе внемассовых проекционных операторов с максимально простыми мультипликативными свойствами для изотропной неполяризованной среды с учетом ее движения и нарушения четности. Использованные внемассовые проекционные операторы имеют достаточно широкое применение в других здачах (например, пропагатор поля спина 3/2 в вакууме или среде, смешивание фермионов). Найденную процедуру обращения в дальнейшем возможно применить к черенковскому излучению и более сложному случаю нейтринных осцилляций.

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 гг.)» (проект РНП.2.2.1.1/1483, 2.1.1/1539).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Giunti C., Kim C.W. Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics. Oxford University Press, 2007. 728 p.
2. Studenikin A. Quantum treatment of neutrino in background matter // J. Phys. 2006. N A39. P. 6769–6776,
3. Grigoriev A., Studenikin A., Ternov A. Dirac and Majorana neutrinos in matter // Phys. Atom. Nucl. 2006. V. 69. P. 1940–1945.

4. Korpa C.L., Dieperink A.E.L. Covariant propagator of the Rarita-Schwinger field in the nuclear medium // Phys. Rev. 2004. V. 70. P. 015207.

5. Бьеркен Дж.Д., Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая механика. Т. 1. Наука, 1978. 296 с.

6. Kaloshin A.E., Lomov V.P. The Rarita-Schwinger field: Dressing procedure and spin-parity content // Phys. Atom. Nucl. 2006. V. 69. P. 541–551.

Иркутский государственный университет, Иркутск