УДК 539.12, 537.8

ЭКСКЛЮЗИВНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ФОРМАЛИЗМЕ ГРУППЫ SO(2.1) А.Н. Валл, И.А. Перевалова, О.Н. Солдатенко, А.А. Владимиров EXCLUSIVE PROCESSES IN SO(2.1) GROUP FORMALISM A.N. Vall, I.A. Perevalova, O.N. Soldatenko, A.A. Vladimirov

В работе рассматривается двухчастичный эксклюзивный процесс $A+B \rightarrow C+D$ для двух физических случаев: в первом частица *C* рождается с определенным импульсом \vec{q} , а во втором – в состоянии с определенным параметром вылета $\vec{\mu}$. Получено точное выражение для функции распределения детектируемой частицы *C* по пространственному параметру вылета через амплитуды рассеяния в интервал углов. Показано, что вычисление дифференциального сечения $d\sigma/d\Omega_{\mu}$ содержит процедуру аналитического продолжения амплитуды процесса в нефизическую область по поперечному импульсу частицы *C* и приводит к распределению, зависящему от выбора конкретной модели соответствующей амплитуды. Вычисление поправок, связанных с разложением амплитуды в окрестности энергетической поверхности, не меняет полного сечения рождения частицы *C* с параметром вылета $\vec{\mu}$, но изменяет структуру функции распределения этой частицы. Полученная функция распределения несет важную физическую информацию о пространственной структуре области рождения вылетающей частицы.

We considered a two-particle exclusive process $A+B\rightarrow C+D$ for two physical events: during the first event, particle *C* was born with defined momentum \vec{q} , during the second one – in the state with defined emission parameter μ . We obtained exact expression for the distribution function of the particle *C* observed over the emission parameter. We show that calculation of the differential cross section $d\sigma/d\Omega_{\mu}$ kept the procedure of analytic continuation of the process amplitude in the unphysical area over the transverse momentum and led to the distribution depending on alternative of the concrete model of the corresponding amplitude. Calculation of amendments related to the analysis of amplitude in environs of the energy surface did not change value of the total cross section, but it changed structure of the distribution function of particle *C*. The obtained distribution function provides important physical information about spatial structure of the area of the born departing particle.

Введение

Важной проблемой физики высоких энергий является изучение пространственной структуры области столкновения двух частиц. Экспериментально в таких процессах можно наблюдать лишь характеристики вылетающих из области столкновения, уже асимптотически свободных частиц. При этом измеряемыми в экспериментах являются только энергетические и угловые распределения. Однако механизм рождения частиц остается неизвестным. Предположительно эволюция этих частиц от рождения до асимптотически свободного состояния проходит от стадии кварк-глюонной плазмы (если реализуется механизм деконфайнмента) до стадии адронизации. Таким образом, необходим определенный метод извлечения информации о пространственной структуре области взаимодействия частиц из данных эксперимента.

Целью данной работы является исследование возможных путей извлечения этой информации. В результате столкновения двух пучков рождается большое количество вторичных частиц. Мы предлагаем исследовать структуру области их рождения посредством анализа функции распределения вылетающих частиц по пространственному параметру их вылета. Если эта функция распределения гладкая, значит, рождение частиц происходит в области равномерного распределения партонов. Если же функция распределения имеет четко выраженные экстремумы, значит, в области взаимодействия существуют адронные сгустки.

Параметр вылета детектируемой частицы

На первом этапе нашей работы мы вводим пространственный параметр вылета частицы *C*, который характеризует радиус области ее рождения в двухчастичном эксклюзивном процессе $AB \rightarrow CD$. Возникает этот параметр после квантования координат вектора максимального сближения траектории частицы \vec{d} с точкой O (рис. 1). Эта точка соответствует центру мишени в лабораторной системе координат и месту встречи пучков A и B в системе центра масс. Введение пространственного параметра приводит к выделению подгруппы SO(2.1) из 10-параметрической группы движения пространства Минковского, описывающей одночастичные состояния свободной релятивистской частицы.

Нетривиальную алгебру группы SO(2.1) образуют операторы \hat{d}_1 , \hat{d}_2 и \hat{L}_3 , где L – орбитальный момент частицы, а операторы \hat{d}_i получаются в результате квантования координат вектора \vec{d} [1]:



Рис. 1. Классическая траектория $\vec{X}(t)$ асимптотически свободной частицы с импульсом \vec{q} , продолженная в область реакции.

$$\begin{bmatrix} \hat{d}_{1}, \hat{d}_{2} \end{bmatrix} = -\frac{i}{q^{2}} \hat{L}_{3}, \quad \begin{bmatrix} \hat{d}_{1}, \hat{L}_{3} \end{bmatrix} = -i\hat{d}_{2},$$
$$\begin{bmatrix} \hat{d}_{2}, \hat{L}_{3} \end{bmatrix} = i\hat{d}_{1}, \quad \hat{d}_{i} = \frac{1}{q^{2}} \left(\varepsilon_{ijk} \hat{q}_{j} \hat{L}_{k} - i\hat{q}_{i} \right)$$

На группе SO(2.1) были построены одночастичные состояния с определенным импульсом и с определенным параметром вылета, при этом роль ядра унитарного преобразования от x- к q-пространству играют функции Шапиро [2]:

$$\begin{split} \left\langle \vec{q}_{\perp}, \varepsilon \sqrt{q^2 - q_{\perp}^2} \right| &= \int \xi(\vec{q}_{\perp}, \vec{\mu}) \left\langle \vec{\mu}, E_q, \varepsilon \right| d\Omega_{\vec{\mu}}, \\ \left\langle \vec{\mu}, E_q, \varepsilon \right| &= \frac{1}{\left(2\pi\right)^2} \int \overline{\xi}(\vec{q}_{\perp}, \vec{\mu}) \left\langle \vec{q}_{\perp}, \varepsilon \sqrt{q^2 - q_{\perp}^2} \right| d\Omega_{\vec{q}}, \\ d\Omega_{\vec{q}} &= \frac{d\vec{q}_{\perp}}{q\sqrt{q^2 - q_{\perp}^2}}, \quad d\Omega_{\vec{\mu}} = th(\pi\mu) d\vec{\mu}. \end{split}$$

Таким образом, двухчастичный эксклюзивный процесс $AB \rightarrow CD$ мы рассматриваем для двух физических случаев. В первом случае частица C рождается с определенным импульсом \vec{q} (ϵ – знак проекции импульса на ось z), а во втором – в состоянии с определенным параметром вылета $\vec{\mu}$.

Связь дифференциальных сечений по импульсу и параметру вылета

Ранее в работах [3, 4] была получена связь дифференциального сечения по импульсу частицы C с матричным элементом S-матрицы:

$$\frac{d\sigma^{(\varepsilon)}}{d\Omega_{\vec{q}}} = \frac{\tilde{q}^2 \lambda(\vec{q})}{(2\pi)^4 n_1 n_2 |\vec{u}|} \left| A^{(\varepsilon)}(\vec{q}_\perp; -\vec{q}_\perp) \right|^2.$$
(1)

Здесь \vec{u} – относительная скорость пучков, n_1 , n_2 – плотности частиц в пучках A и B соответственно,

$$\lambda(\vec{q}) = \frac{qE_qE_D}{q^2P^0 - (\vec{q}\ \vec{P})E_q}\Big|_{q=\tilde{q}}, \quad P = P_A + P_B - \text{сумма им-}$$

пульсов начальных частиц, а значение $q = \tilde{q}$ является решением уравнения энергетической поверхности реакции $E_q + \sqrt{(\vec{q} - \vec{P})^2 + m_D^2} - P^0\Big|_{q=\tilde{q}} = 0$ и определяет импульс детектируемой частицы *C* в процессе двухчастичного рассеяния. Матричный элемент $A^{(c)}(\vec{q}_{\perp}; -\vec{q}_{\perp}) = \langle \vec{q}_C; -\vec{q}_D | \hat{A} | in \rangle$ связан с *S*матрицей:

$$\langle f | \hat{F} | in \rangle = \delta^{(4)} (q_{in} - q_f) \langle f | \hat{A} | in \rangle, \quad \hat{S} = \hat{I} + i\hat{F}.$$

Выражение (1) основывается на связи полного числа событий рождения частиц C и D за бесконечное время (T) во всем пространстве (объема V):

$$N = \frac{TV}{(2\pi)^4} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \int d\Omega_{\bar{q}} q^2 \lambda(\vec{q}_\perp) |\langle f | A | in \rangle|^2, \qquad (2)$$
$$q = \tilde{q}.$$

В данной работе на основе соответствия одночастичных состояний с определенным импульсом и определенным параметром вылета была получена связь дифференциального сечения по параметру $\vec{\mu}$ с матричным элементом *S*-матрицы:

$$\frac{d\sigma^{(\varepsilon)}}{d\Omega_{\bar{\mu}}} = \frac{\tilde{q}^{2}\lambda(s)}{(2\pi)^{4}n_{1}n_{2}|\vec{u}|} \int d\Omega_{\bar{q}}d\Omega_{\bar{k}} \,\,\xi(\vec{q}_{\perp},\vec{\mu}) \,\,\overline{\xi}(\vec{k}_{\perp},\vec{\mu}) \times \\
\times A^{(\varepsilon)}(\vec{q}_{\perp}+\vec{\Delta};-\vec{q}_{\perp})\overline{A}^{(\varepsilon)}(\vec{q}_{\perp};-\vec{q}_{\perp}).$$

Матричный элемент $A^{(\varepsilon)}(\vec{q}_{\perp} + \vec{\Delta}; -\vec{q}_{\perp})$ описывает процесс $AB \rightarrow CD$ вне энергетической поверхности. Параметр $\vec{\Delta}$ характеризует величину отклонения поперечного импульса частицы C от его значения на энергетической поверхности: $\vec{q}_{\perp} + \vec{\Delta} = \vec{k}_{\perp}$. Это приводит к тому, что вычисление сечения $d\sigma^{(\varepsilon)}/d\Omega_{\mu}$ содержит процедуру аналитического продолжения амплитуды $A^{(\varepsilon)}(\vec{q}_{\perp}; -\vec{q}_{\perp})$ в нефизическую область по поперечному импульсу частицы C и приводит к распределению, зависящему от выбора конкретной модели соответствующей амплитуды.

Разложим амплитуду $A^{(\varepsilon)}(\vec{q}_{\perp} + \vec{\Delta}; -\vec{q}_{\perp})$ в ряд Тейлора по степеням виртуальности Δ_i :

$$A^{(\varepsilon)}(\vec{q}_{\perp} + \vec{\Delta}; -\vec{q}_{\perp}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(A^{(n)}(\vec{q}_{\perp}) \cdot \Delta^n \Big), \tag{3}$$

где $A^{(0)}(\vec{q}_{\perp}) = A^{(\varepsilon)}(\vec{q}_{\perp}; -\vec{q}_{\perp})$ – амплитуда на энергетической поверхности,

$$\begin{split} A^{(1)}(\vec{q}_{\perp})\Delta &= \frac{\partial A^{(\varepsilon)}(\vec{k}_{\perp}; -\vec{q}_{\perp})}{\partial k_{\perp i}} \bigg|_{\vec{k}_{\perp} = \vec{q}_{\perp}} \Delta_{i}, \\ A^{(2)}(\vec{q}_{\perp})\Delta^{2} &= \\ &= \frac{\partial^{2}}{\partial k_{\perp i} \partial k_{\perp j}} A^{(\varepsilon)}(\vec{k}_{\perp}; -\vec{q}_{\perp}) \bigg|_{\vec{k}_{\perp} = \vec{q}_{\perp}} \Delta_{i}\Delta_{j} \quad \text{M T. } \mathcal{A} \end{split}$$

Пусть $\rho^{(\varepsilon)}(\vec{\mu}, s) - \phi$ ункция распределения по параметру вылета $\vec{\mu}$ детектируемой частицы *C* в квазиупругом процессе *AB* \rightarrow *CD*:

$$\rho^{(\varepsilon)}(\vec{\mu}, s) = \frac{1}{\sigma^{(\varepsilon)}} \frac{d\sigma^{(\varepsilon)}}{d\Omega_{\vec{\mu}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{(\varepsilon, n)}(\vec{\mu}, s),$$

где

$$\rho^{(\varepsilon,n)}(\vec{\mu},s) = \frac{1}{\sigma^{(\varepsilon)}} \frac{\vec{q}^2 \lambda(s)}{(2\pi)^4 n_1 n_2 |\vec{u}|} \times \int d\Omega_{\vec{q}} \ d\Omega_{\vec{k}} \ \xi(\vec{q}_\perp,\vec{\mu}) \ \overline{\xi}(\vec{k}_\perp,\vec{\mu}) \times \frac{1}{n!} (A^{(\varepsilon,n)}(\vec{q}_\perp) \ \Delta^n) \ \overline{A}^{(\varepsilon)}(\vec{q}_\perp;-\vec{q}_\perp).$$

Условие нормировки для полной функции распределения

$$\int \rho^{(\varepsilon)}(\vec{\mu}, s) d\Omega_{\vec{\mu}} = 1.$$

Однако нетрудно получить, что при $n \ge 1$ $\int \rho^{(\varepsilon,n)}(\vec{\mu}, s) d\Omega_{\vec{\mu}} = 0.$

Таким образом, в полное сечение дает вклад только нулевое слагаемое функции распределения.

После взятия интеграла по *k* оно выглядит следующим образом:

$$\rho^{(\varepsilon,0)}(\vec{\mu},s) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sigma^{(\varepsilon)}} \mu th(\pi\mu) \chi(\mu) \times \\ \times \int d\Omega_{\vec{q}} \frac{q}{\sqrt{q^2 - q_{\perp}^2}} P_{\frac{1}{2} + i\mu} \left(\frac{q}{\sqrt{q^2 - q_{\perp}^2}}\right) \frac{d\sigma^{(\varepsilon)}}{d\Omega_{\vec{q}}}$$

Здесь

$$\chi(\mu) = \int \overline{\xi}(\vec{k}_{\perp}, \vec{\mu}) d\Omega_{\vec{k}} =$$
$$= \frac{2\pi^2}{ch(\pi\mu)} \frac{\sqrt{\pi}}{\left|\Gamma(i\mu/2 + 3/4)\right|^2}.$$

Отсюда видно, что в этом приближении распределение по $\vec{\mu}$ определяется дифференциальным сечением $d\sigma^{(\epsilon)}/d\Omega_{\bar{q}}$, следовательно, является экспериментально наблюдаемой величиной. Все поправки, связанные с разложением амплитуды в окрестности энергетической поверхности, не меняют значения полного сечения процесса, но изменяют структуру распределения $\rho^{(\epsilon)}(\vec{\mu}, s)$.

Вычислим первую поправку $\rho^{(\epsilon,1)}(\vec{\mu}, s)$:

$$\rho^{(\varepsilon,1)}(\vec{\mu},s) = \frac{1}{\sigma^{(\varepsilon)}} \frac{\vec{q}^2 \lambda(s)}{(2\pi)^4 n_1 n_2 |\vec{u}|} \times \int d\Omega_{\vec{q}} \xi(\vec{q}_{\perp},\vec{\mu}) \ \vec{A}^{(\varepsilon)}(\vec{q}_{\perp};-\vec{q}_{\perp}) \times \times \Big[\chi^{(1)}(\mu)\vec{n} - \chi(\mu)\vec{q}_{\perp}\Big] \frac{\partial}{\partial \vec{q}_{\perp}} A^{(\varepsilon)}(\vec{q}_{\perp};-\vec{q}_{\perp}).$$

Здесь

$$\chi^{(1)}(\mu) = \int (\vec{n} \ \vec{k}_{\perp}) \overline{\xi}(\vec{k}_{\perp},\vec{\mu}) d\Omega_{\vec{k}} =$$
$$= -4\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(i\mu + 1/2)}{\Gamma(i\mu + 3/2)} \left| \Gamma\left(\frac{i\mu + 5/2}{2}\right) \right|^2.$$

Хотя $\rho^{(\varepsilon, 1)}(\vec{\mu}, s)$ явно комплексное, полное распределение $\rho^{(\varepsilon)}(\vec{\mu}, s)$ действительное по построению. Поэтому в практических целях имеет смысл только действительная часть от поправок $\rho^{(\varepsilon, n)}(\vec{\mu}, s)$.

Рассмотрим подробнее нулевое приближение для функции распределения $\rho^{(\varepsilon)}(\vec{\mu}, s) = \rho^{(\varepsilon, 0)}(\vec{\mu}, s)$. Переходя к интегрированию по углам, получим связь дифференциального сечения по параметру $\vec{\mu}$ с дифференциальным сечением по углу вылета частицы *C*:

$$\frac{d\sigma^{+}}{d\mu} = \frac{1}{2\pi} \mu th (\pi\mu) \chi(\mu) \int_{0}^{1} \frac{dz}{z} P_{-\frac{1}{2}+i\mu} \left(\frac{1}{z}\right) \frac{d\sigma}{dz}$$
$$\frac{d\sigma^{-}}{d\mu} = \frac{1}{2\pi} \mu th (\pi\mu) \chi(\mu) \times$$
$$\times \int_{-1}^{0} \frac{dz}{|z|} P_{-\frac{1}{2}+i\mu} \left(\frac{1}{|z|}\right) \frac{d\sigma}{dz},$$

где $z = \cos \theta$ – косинус угла рассеяния частицы *C* в процессе $AB \rightarrow CD$, $P_{-1/2+i\mu}(x)$ – функции конуса, возникающие из функций Шапиро интегрированием по полярному углу φ . Дифференциальные сече-

ния $d\sigma^{\pm}/d\mu$ представляют большой интерес для исследования, так как определяют структуру области, в которой рождается частица *C*. В отличие от $d\sigma^{\pm}/d\Omega_{\bar{q}}$, дифференциальное сечение $d\sigma^{\pm}/d\Omega_{\bar{\mu}}$ не является положительно определенным на всем интервале μ . Положительно определенное распределение $d\sigma/d\mu$ восстанавливается учетом поправок $\rho^{(\varepsilon, n)}(\bar{\mu}, s)$. Размер этих поправок можно приближенно оценить из вкладов отрицательных областей $\rho^{(\varepsilon, 0)}(\bar{\mu}, s)$. Обработка моделей показывает, что обычно поправка к $\rho^{(\varepsilon, 0)}(\bar{\mu}, s)$ мала и составляет ~0.1 %.

Среднеквадратичный радиус области рождения *K*⁺-мезона на протоне

В качестве примера мы провели анализ процесса упругого рассеяния K^+ -мезона на протоне в эксперименте «CHARLES 77» [5]. За исследуемую величину был взят среднеквадратичный радиус области рождения каона $\langle b_{\pm}^2 \rangle$. Параметр *b* является размерным, имеет размерность длины и связан с введенным параметром вылета µ следующим соотношением:

$$< b_{\pm}^2 >= \frac{\hbar^2}{q^2} \left(< \mu_{\pm}^2 > + \frac{1}{4} \right).$$

Именно параметр b имеет точную физическую интерпретацию эффективного радиуса области взаимодействия частиц. Из условия действительности параметра μ следует ограничение снизу на радиус области рождения частиц:

$$b \ge b_0 = \frac{\hbar}{2q}, \, \boldsymbol{\Phi}\mathbf{M}. \tag{4}$$

Это неравенство имеет квантовую природу и отображает тот факт, что частица не может родиться в фазовом объеме меньшем, чем допускается соотношением неопределенности Гейзенберга. Связь среднеквадратичного радиуса области взаимодействия и измеряемого дифференциального сечения для передней и задней полусферы выглядит следующим образом:

$$< b_{+}^{2} >= \frac{2}{q^{2}} < \cos^{2} \theta_{+} >= \frac{2}{q^{2} \sigma^{+}} \int_{0}^{1} z^{2} \frac{d\sigma}{dz} dz,$$
$$< b_{-}^{2} >= \frac{2}{q^{2}} < \cos^{2} \theta_{-} >= \frac{2}{q^{2} \sigma^{-}} \int_{-1}^{0} z^{2} \frac{d\sigma}{dz} dz.$$

Извлекая корень из данных выражений, можно построить зависимость эффективного радиуса области рождения частицы *C* от начальной энергии сталкивающихся частиц для передней и задней полусферы (см. рис. 2 и 3).

По данным графикам видно, что ограничение, накладываемое принципом неопределенности Гейзенберга, соблюдается в нашем построении для обеих полусфер. Кроме того, видно, что регистрируемая частица вылетает из области значительно меньшей по размеру, чем эффективный радиус взаимодействия



Рис. 2. Зависимость эффективного радиуса области рождения частицы C от начальной энергии сталкивающихся частиц для передней полусферы в процессе $K^+ + p \rightarrow K^+ + p$.



Рис. 3. Зависимость эффективного радиуса области рождения частицы C от начальной энергии сталкивающихся частиц для задней полусферы в процессе $K^+ + p \rightarrow K^+ + p$.

мишени. Для протона эффективный радиус взаимодействия составляет 1 фм, а K⁺-мезон рождается в области, составляющей сотые доли фм. Таким образом, можно надеяться, что дальнейший анализ структуры функции распределения вылетающей частицы по пространственному параметру позволит исследовать внутреннюю структуру области взаимодействия частиц.

Обобщенная функция распределения

Исходя из выражения (2) для полного числа событий рождения частиц в двухчастичном процессе, переходя в лабораторную систему координат частицы *B*, можно получить обобщенную функцию распределения частицы *C*, более детально отражающую структуру области рождения этой частицы:

$$\frac{d^2\sigma}{db\ dz} = \frac{b}{2\pi} \Theta[b - b_0(q)] q^2 t h(\pi\mu) \chi(\mu) \times \frac{1}{|z|} P_{-1/2 + i\mu} \left(\frac{1}{|z|}\right) \frac{d\sigma}{dz}.$$

Это смешанное распределение является аналогом функции Вигнера в квантовой механике. Оно позволяет найти среднее значение любой классической величины, зависящей от координат и импульса.



Рис. 4. Обобщенная функция распределения в плоскости (b, z) для процесса $\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p$, $E_{\gamma} = 5$ ГэВ, $q_C \approx 665$ МэВ.

Геометрически это распределение дает томографическую картину вклада конечных интервалов по z в пространственное распределение $d\sigma/db$ на всем интервале значений b. Для иллюстрации данного распределения мы рассмотрели процесс фоторождения нейтрального π-мезона на протоне при энергии фотона $E_{\gamma}=5$ ГэВ [6]. Обобщенное распределение, в котором значение импульса π -мезона q_C берется при среднем значении косинуса угла рассеяния $\overline{z} = -0.5$, $q = q_C \approx 665$ МэВ, представлено на рис. 4. Запрещенная область I определяется соотношением неопределенности Гейзенберга (4), граничное значение параметра вылета составляет в данном случае $b^{0}=1.498\cdot10^{-14}$ см. В области II, где функция распределения положительна, происходит рождение частиц С, а в области III – их поглощение.

Заключение

В ходе работы было получено точное выражение для функции распределения по параметру вылета μ детектируемой частицы *C* в квазиупругом процессе $A+B\rightarrow C+D$. Эта функция распределения описывает распределение вещества в мишени и позволяет понять природу ее составных частей на внутриадронных масштабах. На примере упругого рассеяния K^+ -мезона на протоне было показано, что детектируемая частица рождается в области значительно меньшей по размеру, чем эффективный радиус взаимодействия мишени. Было построено обобщенное распределение π^0 -мезона в процессе его фоторождения на протоне.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представления групп. М.: Наука, 1965. 588 с.

 Валл А.Н. Плоские волны на группе прицельного параметра // Ядерная физика. 1978. Т. 28, Вып. 4(10). С. 1091–1097.

3. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантовых полей: 4-е изд. М.: Наука, 2008. 736 с.

4. Валл А.Н., Солдатенко О.Н., Владимиров А.А. Теоретико-групповое описание пространственной области столкновения частиц // Известия вузов. Физика. 2008. Т. 51, № 3. С. 92–96.

5. Charles B.J., Cowan I.M., Edwards T.R.M. Measurement of differential cross sections for elastic K^+p scattering in the momentum range 0.7 to 1.9 GeV/c // Nuclear Phys. 1977. N B131. P. 7–53.

6. Anderson R.L., et al. Neutral pion photoproduction off protons // Phys. Rev. 1976. N D14. P. 679.

Иркутский государственный университет, Иркутск