Лекции. БШФФ-2009. С. 23–29

УДК 550.3, 519.246.87

ТЕКУЩИЕ СПЕКТРЫ И ИХ СВОЙСТВА

И.И. Орлов

CURRENT SPECTRA AND THEIR PROPERTIES

I.I. Orlov

В лекции приведены некоторые сведения о текущих спектрах, их свойствах и даны примеры текущих спектров из различных областей физики и геофизики.

This lecture gives some information about current spectra, their properties, and examples of these spectra from various areas of physics and geophysics.

Введение

Толчком к детальному анализу известных соотношений теории сигналов и линейных цепей послужило то очевидное требование, что для физически реализуемых действий над сигналами (функциями времени) должно выполняться условие, что все эти операции могут использовать только информацию из прошлого (до текущего момента времени). В этой лекции, на примере интеграла наложения (интеграла Дюамеля), показывается, что для сигналов при обычной схеме перехода к частотному описанию с помощью преобразований Фурье естественным образом появляются «текущие спектры», ранее введенные С.М. Рытовым по определению [1].

В конце работы [1] написано: «…переменный спектр – это разложение Фурье, не доведенное до конца. Его спектральные амплитуды зависят от времени – меняются квазистационарно, в соответствии с теми частотными интервалами, которых данный аппарат не разрешает». Это, по существу, первое, как отмечают некоторые авторы, введение понятия «текущий спектр». В действительности ввиду очевидной элементарности такой операции (использование интеграла с переменным верхним пределом) наверняка имеются и более ранние упоминания о целесообразности использования текущего спектра.

Более подробное, хотя и весьма краткое, обсуждение понятия текущего спектра содержится в небольшой монографии А.А. Харкевича [2]. В частности, в этой работе утверждается, что «…связывание математического определения спектра с условиями реального эксперимента само по себе имеет большое значение…, понятие текущего спектра является вообще весьма плодотворным».

В данной лекции будет показано, что понятие текущего спектра не требует «волевого» определения, так как возникает естественным образом, на основании учета общих физических принципов: линейности, однородности временной оси и причинности. Из линейности следует, что прошедший сигнал может быть представлен в виде линейного интегрального оператора, однородность во времени приводит к тому, что ядро зависит от разности аргументов, а требование причинности ограничивает верхний предел интегрирования. К такому виду приводится, например, функция Грина, описывающая распространение волн от источника в точку наблюдения, при условии фиксации пространственных координат излучателя и приемника. Условие причинности часто связывают с требованием физической реализуемости импульсного отклика для конкретных систем, например, для линейных фильтров.

Кроме введения понятия «текущий спектр», в лекции приводятся некоторые свойства этого объекта и формулы обращения. В приложении, которое имеется только в электронной форме лекции, приведены примеры из некоторых областей физики и техники, демонстрирующие возможности анализа динамики текущих спектров.

Общие свойства текущих спектров

Понятие сигнала (функции времени) встречается во всех тех разделах физики и техники, где изучается временное изменение каких-либо характеристик рассматриваемого явления или процессов. Традиционно и наиболее широко понятие сигнала используется при изучении реакции линейных систем на заданное входное воздействие. Так, временное изменение электромагнитного поля в некоторой фиксированной точке пространства дает пример, сигнала для соответствующего линейного канала. Можно привести еще много других примеров, в которых сигналы играют важную роль. Далее, для определенности мы под сигналом будем понимать любую функцию времени, не связывая ее с конкретной физической ситуацией и не интересуясь ее зависимостью от других возможных параметров.

Обычно при изучении сигналов формально рассматривают всю временную ось как область определения соответствующих функций. Если же исходить из соображений физической реализуемости процесса формирования, регистрации или обработки сигналов, то с учетом особого характера временной оси естественно рассматривать сигналы исключительно на полуоси $(-\infty, t)$, где t обозначает текущий момент времени. Иными словами, при изучении сигналов и операций над ними представляется физически оправданным использовать только информацию о «прошлом» сигнала, не оперируя с его возможным поведением в «будущем». Именно эту особенность сигналов, для простейшего случая, не затрагивая более принципиальные вопросы, мы далее и попытаемся учесть при рассмотрении интеграла наложения и соотношений, связанных с этим понятием.

Как известно, при изучении прохождения сигналов через линейные стационарные цепи, выходной сигнал может быть представлен в виде интеграла наложения (интеграла Дюамеля), сводящегося к свертке входного сигнала $u(\tau)$ с импульсным откликом $h(\tau)$ [3]:

$$u_p(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)u(\tau)\,d\tau. \qquad (1)$$

В действительности, как это обычно и считается, формула (1) применима в самом общем случае, а не только при анализе линейных радиотехнических систем. Причина этого в том, что формула (1) основана на трех общих физических принципах: линейности, однородности во времени и причинности. Это при обычном использовании всей временной оси, что требуется при формулировании свойства однородности во времени.

В рассматриваемом же ниже подходе, при последовательном учете информации только из «прошлого», получение формулы типа (1) не может быть основано на однородности временной оси относительно сдвигов во времени, по крайней мере, без каких-либо изменений в способе вывода этой формулы. Далее схема получения формулы типа (1) не рассматривается, а сама формула пока принимается без доказательства.

К соотношению типа (1) может быть в обычном подходе приведена, например, функция Грина, описывающая распространение волн от точечного источника в точку наблюдения, при условии фиксации пространственных координат. В таких ситуациях можно говорить о наличии семейства линейных (пространственных) каналов, а фиксация точек наблюдения и излучения приводит к рассмотрению одного из таких каналов связи.

Для определенности далее, с тем чтобы не использовать терминологию из различных областей физики, будем применять терминологию теории линейных радиотехнических систем, хотя получаемые ниже соотношения имеют существенно более широкую область применения, точнее общефизическое значение.

Из теории линейных цепей известно, что импульсный отклик $h(\tau)$ полностью определяет свойства рассматриваемой системы, и для него обычно требуют выполнения условия $h(\tau)=0$ при $\tau<0$. Обычно такое условие отождествляется с принципом причинности и с ним также связывают условия физической реализуемости импульсного отклика для конкретных систем, например для линейных фильтров [4]. На самом же деле положение с условием физической реализуемости и причинностью не так очевидно, как это может показаться на первый взгляд, и потому требует более детального и внимательного рассмотрения.

В обычном подходе, при анализе линейных цепей, наряду с временной формой описания используется и частотный подход, получающийся из временного с использованием преобразования Фурье. Однако при переходе к частотному языку в формуле (1) возникают различные соотношения, в зависимости от выбора порядка выполнения стандартных преобразований Фурье. Далее рассматриваются и кратко обсуждаются некоторые соотношения, которые возникают при переходе в интеграле Дюамеля к частотному описанию различными путями.

Представим импульсный отклик в виде интеграла Фурье:

$$h(\tau) = \theta(\tau)h(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_-(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega, \qquad (2)$$

где функции, стоящие под интегралом, определены соответственно формулами

$$H_-(\omega) = H(\omega) = \int_0^{\infty} h(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau. \qquad (3)$$

Нижний индекс (–), который далее будет опущен, в формуле (2) указывает на аналитичность функции $H(\omega)$ в нижней полуплоскости ω. Заметим, что в случае достаточно быстрого стремления к нулю импульсного отклика $h(\tau)$, например экспоненциальным образом, функция $H(\omega)$ будет аналитичной и в некоторой «полосе», расположенной в верхней полуплоскости. Подобное свойство будет использовано далее.

Если в формулу (1) подставить выражение (2) для импульсного отклика, то после простых преобразований получается следующая форма записи интеграла наложения:

$$u_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)U_+(t,\omega)d\omega. \qquad (4)$$

Функция $U_+(t,\omega)$ в этой формуле аналитическая в верхней полуплоскости переменной ω и определена соотношением

$$U_+(t,\omega) = U(t,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{t} e^{i\omega(t-\tau)}u(\tau)d\tau. \qquad (5)$$

Подчеркнем, что формула (5) для так определенного текущего спектра отличается от определения, данного, например, С.М. Рытовым [2], наличием дополнительного множителя $\exp(i\omega t)$. Так определенный текущий спектр был введен в работе [5].

Очевидно, что именно при введении такого множителя функция $U(t,\omega)$ оказывается аналитической в верхней полуплоскости ω. Подчеркнем, что в рассмотренной схеме действий текущий спектр появляется в результате обычных преобразований и не требует его введения по определению, как это отмечено, например, А.А. Харкевичем [2]. С физической точки зрения появление текущего спектра обусловлено тем, что значение выходного сигнала в некоторый момент времени не может зависеть от поведения входного сигнала в будущем, какие бы соотношения для этого не использовались.

Обычно, при традиционном подходе, выражая входной сигнал через его спектральную функцию, вместо формулы (5) получаем иное выражение:

$$u_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}H(\omega)U(\omega)d\omega, \qquad (6)$$

в котором функция $U(\omega)$ определена равенством

$$U(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\tau}u(\tau)d\tau. \qquad (7)$$

Заметим, что в формуле (7) используется операция интегрирования по всей временной оси, что указывает на ее физическую нереализуемость.

Формальное различие между формулами (4) и (6) может быть объяснено следующим образом. Для этого сначала преобразуем (6) к другому виду, введя функцию

$$U_-(t,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{t}^{\infty}e^{i\omega(t-\tau)}u(\tau)d\tau, \qquad (8)$$

которая является аналитической функцией в нижней полуплоскости ω, построенной на основе информации из "будущего". Из (5) и (8) нетрудно получить очевидное соотношение между введенными ранее функциями:

$$U_-(t,\omega)+U_+(t,\omega)=e^{i\omega t}U(\omega). \qquad (9)$$

Если теперь подставить (9) в формулу (6), то можно заметить, что все отличие полученного при этом выражения от формулы (4) заключается в дополнительном интегральном (при условии существования такого рода интегралов) члене вида

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_-(\omega)U_-(t,\omega)d\omega. \qquad (10)$$

С учетом того, что под интегралом в (10) стоит функция аналитическая в нижней полуплоскости, то этот интеграл, при его замыкании в нижней полуплоскости, равен нулю. Отсюда следует, что пока используются формулы (4) или (6), эти выражения формально не различимы, если не обращать внимания на использование информации из будущего при нахождении спектральной функции $U(\omega)$ сигнала.

Если попытаться выразить на частотном языке выходной сигнал через частотные характеристики входного сигнала и передаточную функцию, то эта операция не тривиальна и требует более внимательного анализа. Действительно, если записать выходной сигнал через его спектральную плотность по обычно используемой формуле, обратной к формуле типа (7),

$$u_p(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}U_p(\omega)d\omega, \qquad (11)$$

то выражение под знаком интеграла в (11) не может быть непосредственно приравнено к выражению под интегралом в (6). Это свойство обусловлено тем, что под интегралом в (11) стоит, вообще говоря, не аналитическая функция, а под интегралом в (6) имеется слагаемое (10), являющееся аналитической функцией в нижней полуплоскости ω, интеграл от которой равен нулю. В связи с этим переход к частотному описанию выходного сигнала целесообразно осуществлять иным образом, не используя формально операций, которые могут оказаться физически не реализуемыми.

В действительности, при анализе операций с сигналами с физической точки зрения более оправданно на каждом этапе преобразований, следить за физической реализуемостью рассматриваемых операций, в особенности при переходах к частотному описанию рассматриваемых действий.

По поводу использования прямого и обратного преобразований Фурье еще раз подчеркнем, что для физически реализуемых сигналов, то есть для сигналов, поведение которых известно лишь до текущего момента времени, использование формул типа (7) с физической точки зрения нежелательно, так как требует знания поведения сигнала в будущем. В связи с этим далее, при анализе свойств интеграла наложения, будем действовать несколько иным способом, свободным от указанного недостатка.

Если для выходного сигнала сформировать текущий спектр $U_p(t,\omega)$, то, воспользовавшись формулой (1), после стандартных преобразований получаем соотношение, связывающее текущие спектры входного и выходного сигналов:

$$U_p(t,\omega)=\int_{-\infty}^{t}h(t-\tau)U(\tau,\omega)d\tau. \qquad (12)$$

Полученная формула полностью аналогична (1) и, на наш взгляд, более «физична», по сравнению с обычно используемыми равенствами, содержащими спектральные плотности (функции) сигналов и передаточную функцию линейной системы. Действительно, из (12) следует, что текущие спектры «преобразуются» соответствующим «четырехполюсником» по тем же законам, что и сигналы во временном представлении. Это и не удивительно, если заметить, что процедура получения текущего спектра сама формально имеет форму интеграла наложения. В итоге выражение (12) представляет собой суперпозицию интегралов наложения. Отметим также, что из формулы (12) следуют аналогичные соотношения для вещественных и мнимых частей текущих спектров.

Обсудим теперь физический смысл полученных выше соотношений. Так как при получении текущих спектров используется только «физически доступная» информация, т. е. прошлое сигнала, то при анализе линейных цепей более корректным следует считать использование формул, содержащих лишь текущие спектральные функции. В связи с этим имеет смысл говорить о физической реализуемости не только передаточных функций, но и спектральных функций сигнала.

Заметим, что анализ работы конкретных устройств, основанный на использовании текущих спектров, заметно отличается от обычного подхода, что, кстати, отмечалось и ранее, например, в работе [2]. На наш взгляд, наиболее существенное отличие при использовании текущих спектров в анализе линейных цепей заключается в том, что при этом естественным образом устанавливаются причинные связи и не возникает необходимости особым образом рассматривать переходные процессы. Другими словами, использование текущих спектров как раз и приспособлено для анализа динамики преобразования сигналов. В то время как обычные спектры описывают спектр завершенного процесса прохождения сигнала, текущие спектры описывают динамику преобразования частотных свойств сигнала. Если же сигнал неограниченно простирается во времени и априори не известен, то с физической точки зрения мы не имеем права пользоваться обычным понятием спектра из-за необходимости использования поведения сигнала в будущем, что нам в принципе недоступно.

С этими замечаниями связаны весьма серьезные изменения, которые должны проявиться, например, в анализе так называемых «случайных» сигналов, которые не могут прерываться со временем, как это обычно предполагается. Если более внимательно посмотреть на последствия принятия тезиса о необходимости использования информации о сигналах только из прошлого, то существенным и во многом разрушительным изменениям подвергнутся все те области (разделы) физики, в которых в той или иной форме появляются временные зависимости и используется причинность. При этом каким-либо образом избавиться от текущего времени невозможно.

Еще один вопрос, тесно связанный с понятием текущего спектра, заключается в требовании физической реализуемости, например того или иного линейного фильтра. Математически это требование аналитичности (в той или иной полуплоскости) передаточной функции линейной системы. На самом деле и в этом вопросе имеются дополнительные возможности. Действительно, если заметить, что интеграл типа

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_{+}(\omega)U_{+}(t,\omega)d\omega \tag{13}$$

равен нулю, как интеграл от функции, аналитической в верхней полуплоскости, то формула (4) может быть преобразована:

$$u_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)U_{+}(t,\omega)d\omega. \tag{14}$$

Здесь в соответствии с (3) функция $H(\omega)$ является суммой двух функций $H_{\pm}(\omega)$, аналитических в разных полуплоскостях, то есть в целом не аналитическая. Несмотря на это, формула (14) вполне законна и может быть использована при анализе линейных цепей. Кроме того, так как передаточная функция $H(\omega)$ может быть представлена в виде

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} h(|\tau|)d\tau, \tag{15}$$

то она вещественна, и, в силу этого, соотношение (14) эквивалентно формуле

$$u_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\,\mathrm{Re}\,U(t,\omega)d\omega. \tag{16}$$

То, что для определения выходного сигнала достаточно вещественной части текущего спектра, связано с его аналитичностью в верхней полуплоскости ω, когда вещественная и мнимая части связаны преобразованием Гильберта [6, 7].

Таким образом, мы установили, что понятие текущего спектра появляется естественным образом при переходе в интеграле наложения к частотному представлению для импульсного отклика и не требует его специального определения. Отмечено также, что текущий спектр может быть использован при изучении переходных процессов в реальных системах, в особенности при изучении их динамики. Кроме того, текущий спектр позволяет по-новому проанализировать понятие физической реализуемости некоторых линейных систем, включая их цифровые аналоги.

В целом же можно заметить, что при работе с текущими спектрами использование обычных спектров нецелесообразно, так как это может привести к осложнениям, связанным с несовместимостью этих понятий в «теле сигнала». Если же мы рассматриваем лишь те моменты времени, когда входной сигнал стал равен нулю, то его текущий спектр будет сводиться к обычному спектру. Но это не означает, что текущий спектр выходного сигнала может быть сведен к обычному спектру, так как реальные линейные системы обладают формально бесконечно протяженным (во времени) откликом. В силу этого, так как систематическое использование текущих спектров не распространено достаточно широко, их последовательное использование требует пересмотра многих вопросов, типичных для теории линейных цепей, в особенности, как нам кажется, в вопросах описания свойств сигналов во время их прохождения через линейные системы.

Рассмотрим некоторые дополнительные соотношения. Прежде всего, важно то свойство текущего спектра, которое связано с возможностью его определения на оси в верхней полуплоскости ω. В интеграле наложения это возможно в случае достаточно быстрого стремления к нулю импульсного отклика при стремлении его аргумента к $-\infty$. В этом случае можно показать, что имеет место формула обращения, которая записывается в виде ($\omega \to \omega + i\alpha$, $\alpha > 0$):

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} U_{+}(t,\omega)d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+i\alpha)x} d\omega \int_{-\infty}^{t} e^{i(\omega+i\alpha)(t-\tau)} u(\tau)d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{\alpha(x-\xi)} u(t-\xi)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\xi-\tau)}d\xi = \theta(x)u(t-x).\end{aligned} \tag{17}$$

Для выходного сигнала можно получить также равенство, следующее из формулы (16):

$$u_p(t) = 2\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\,H_{\pm}(\omega)\,\mathrm{Re}\,U_{+}(t,\omega)d\omega, \tag{18}$$

которое указывает на то, что каких-либо особых требований к передаточной функции линейной системы (канала связи) нет необходимости предъявлять. Очевидны также следующие соотношения:

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\,H_{\pm}(\omega)\,\mathrm{Re}\,U_{+}(t,\omega)d\omega = \\ &= \pm\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\,H_{\pm}(\omega)\,\mathrm{Im}\,U_{+}(t,\omega)d\omega.\end{aligned} \tag{19}$$

Если воспользоваться формулой

$$H(\omega + i\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+i\alpha)x} h(x)dx, \tag{20}$$

справедливой при стремлении $h(x) \to 0$ с ростом x экспоненциально, можно получить соотношение

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega+i\alpha)\tau} H(\omega+i\alpha)d\omega = h(\tau), \qquad (21)$$

что соответствует интегрированию по оси, параллельной вещественной оси в комплексной плоскости ω. Для текущего спектра выходного сигнала легко можно получить соотношение

$$U_{p,+}(t,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H_-(\omega')U_+(t,\omega',\omega)d\omega', \qquad (20)$$

в котором использовано обозначение

$$U_+(t,\omega',\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{t} e^{i\omega'(t-\tau)}U_+(\tau,\omega)d\tau. \qquad (21)$$

Очевидно, что такие преобразования можно продолжать и далее. Тем самым можно вводить текущие спектры, зависящие от многих частот – многочастотные текущие спектры. Сам же способ получения текущего спектра по форме аналогичен многократному использованию интегралов наложения, когда в качестве импульсного отклика выступает комплексная экспонента.

Если в формуле (12) перейти от импульсного отклика к его спектральной функции (передаточной функции), то с использованием стандартных преобразований получается следующая формула ($\overline{\omega}=\omega+i\alpha$), связывающая текущие спектры входного и выходного сигналов с использованием стандартной передаточной функции:

$$\begin{aligned} U_{p,+}(t,\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{t} U(\tau,\overline{\omega})d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\overline{\omega}(t-\tau)}H(\overline{\omega}')d\omega' = \\ &= \left(\frac{1}{2\kappa}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} H(\overline{\omega}')d\omega' \int_{-\infty}^{t} e^{i\overline{\omega}'(t-\tau)}d\tau \int_{-\infty}^{\tau} e^{i\overline{\omega}(\tau-x)}u(x)dx = \\ &= \left(\frac{1}{2\kappa}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} H(\overline{\omega}')d\omega' \int_{-\infty}^{t} e^{-i\overline{\omega}\tau+i\overline{\omega}'t}u(x)dx \int_{x}^{t} e^{i\tau(\overline{\omega}-\overline{\omega}')}d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_-(\overline{\omega}')\left[U_+(t,\overline{\omega})-U_+(t,\overline{\omega}')\right]}{2\pi i(\omega-\omega')}d\omega'. \end{aligned} \qquad (22)$$

Из этого соотношения следует, что текущие спектры связаны с передаточной функцией более сложной зависимостью, чем это имеет место в стандартном подходе

$$U_p(\omega) = H(\omega)U(\omega), \qquad (23)$$

связывающм обычные спектры входного и выходного сигналов посредством использования передаточной функции. Очевидно, что различие между формулами (22), (23) существенно.

Помимо интегральной формулы обращения, очевидна и дифференциальная форма

$$e^{i\overline{\omega}t}\frac{d}{dt}e^{-i\overline{\omega}t}U_+(t,\overline{\omega}) = \frac{1}{2\pi}u(t), \qquad (24)$$

которая практически более удобна. Замечательно то, что из (24) получается входной сигнал вне зависимости от того, какая частота была выбрана.

Подчеркнем, что введение комплексных частот вида $\omega\to\omega+i\alpha$ ($\alpha>0$) важно с той точки зрения, что при этом получается эффект «потери памяти», когда вклад в текущий спектр сосредотачивается вблизи текущего времени. Кроме этого имеется и такое свойство: при $\alpha>0$ частотное разрешение становится ограниченным. Точнее, чем больше α, тем более грубо можно определить спектр периодической функции. При $\alpha=0$ для периодической функции можно определить частоту сколь угодно точно, при условии увеличения времени регистрации.

Формулы, приведенные в этом разделе, в наиболее полном виде представлены в работе [8], в которой, однако, не приведены важные соотношения (17), (22). Кроме того, в предыдущих работах [5, 8] не рассмотрены случаи использования комплексных частот. Как будет показано в следующем разделе, возможность использования комплексных часто позволяет «управлять» теми свойствами текущего спектра, которые связаны с возможным частотным разрешением. Получающиеся при этом текущие спектры во многом аналогичны, например, вейвлет-спектрам, но, в отличие от них, получаются без привлечения априорных гипотез о способах анализа частотно-временных зависимостей.

Некоторые аналитические примеры

Полученная ранее формула для введенного текущего спектра (отличающаяся от определения С. Рытова множителем) может быть представлена в виде (множитель в знаменателе 2π опущен)

$$U(t,\overline{\omega}) = \int_{-\infty}^{t} e^{i\overline{\omega}(t-\tau)}u(\tau)d\tau = U_R(t,\overline{\omega}) + iU_I(t,\overline{\omega}). \qquad (1)$$

Вещественная и мнимая части этого спектра связаны преобразованием Гильберта, т. к. текущий спектр является аналитической функцией в верхней полуплоскости ($\overline{\omega}=\omega+i\alpha$).

Для любого сигнала $u(t)$ текущий спектр не ограничен, и текущий спектр на выходе четырехполюсника также не ограничен, вне зависимости от свойств передаточной функции. Роль передаточной функции сводится к фильтрации частот входного сигнала и, следовательно, к его искажениям. Так как при последовательном прохождении канала связи подобное явление происходит всегда, то соответствующие формулы усложняются, так как они осуществляют учет искажений сигнала при прохождении каждого «устройства», рассматриваемого как отдельный элемент.

Введение комплексной частоты соответствует уменьшению вклада от «предыстории». В монографии А. Харкевича [2] при обсуждении скользящего спектра, основанного на использовании весового окна $r(t-\tau)$, положение которого зависит от времени,

$$S_r(t,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} r(t-\tau)f(\tau)d\tau, \qquad (2)$$

а также рассматривается возможность ведения экспоненциального множителя, предложенного Фаном, что вместо (2) приводит к формуле

$$S_r(t,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t-\alpha(t-\tau)} r(t-\tau)f(\tau)d\tau. \qquad (3)$$

В случае весовой функции $r(x) = \vartheta(x)$ формула

(3) дает функцию, отличающуюся от (1) только экспоненциальным множителем exp($i\omega t$). Но в отличие от формулы (3), предложенное выше определение текущего спектра естественным образом вводит комплексную частоту и не требует обязательного, немотивированного введения ослабления влияния прошлого.

При практическом вычислении текущего спектра можно поступить следующим образом. Практический интерес представляют такие объекты, которые допускают графическое изображение, и вместо графика комплекснозначной функции, что невозможно изобразить на плоскости, целесообразно строить график функции двух переменных $\left|F(t,\bar{\omega})\right|$. Эту функцию можно изобразить в виде трехмерного графика. Подобные графики полезны при анализе различных систем четырехполюсников, а также и в иных вопросах анализа информационных сигналов, включая анализ экспериментальных данных.

Для получения критерия выбора значений параметра α рассмотрим текущий спектр для «оборванной» синусоиды. Будем иметь

$$\begin{aligned} F(t,\bar{\omega}) &= \int_0^t e^{(i\omega-\alpha)(t-\tau)}\sin(\omega_0 x)dx = \\ &= \frac{1}{2i}e^{(i\omega-\alpha)t}\int_0^t e^{-(i\omega-\alpha)\tau}\left[e^{i\omega_0 x}-e^{-i\omega_0 x}\right]dx = \\ &= \frac{1}{2i}\left\{e^{-i\beta_- t}\frac{\sin\beta_+ t}{\beta_+}-e^{-i\beta_+ t}\frac{\sin\beta_- t}{\beta_-}\right\}, \end{aligned} \tag{4}$$

где использованы обозначения $2\beta_\pm=\pm\omega_0-\omega-i\alpha$. Заметив, что эта функция $F(t,\bar{\omega})$ аналитическая в верхней полуплоскости ω и имеет полюса в нижней, мы можем оценить характер ее поведения вблизи полюсов. В случае достаточно малых α, когда полюса расположены вблизи вещественной оси, характер поведения текущего спектра определяется поведением функций $1/\beta_\pm$. Максимальное значение по модулю, равное 1/α, эти множители принимают при $\omega=\pm\omega_0$. При отклонении от этих значений на величину α модуль указанного множителя принимает значение в $\sqrt{2}$ раз меньшее, а квадрат модуля будет меньше в 2 раза.

Приведенные оценки указывают на то, что при увеличении t «полуширина» пика не может превышать величины $\Delta\omega\approx\alpha$ на уровне 0.5 по энергии. Для оценки временного интервала, ответственного за формирование текущего спектра, можно воспользоваться тем, что при выполнении соотношения $\alpha T\approx 1$ вклад предыдущих значений функции в спектр будет ослаблен в e раз. Очевидно, что в случае α=0 с ростом T точность частотного разрешения Δω увеличивается неограниченно. Для текущих же спектров с α≠0 это не так. Для них с ростом T (интервала эффективного вклада) сначала частотное разрешение увеличивается, а начиная с временного интервала порядка $T\approx 1/\alpha$ оно стабилизируется на уровне Δω=α. Таким образом, выбором параметра α можно управлять предельной величиной частотного разрешения. Формально при построении текущих спектров этот параметр можно выбирать в зависимости от анализируемой частоты, например, выбирая α≈0.1ω, или иным множителем перед частотой, задающим возможную точность ее определения при анализе данных. Подобный выбор параметра α может быть полезен в некоторых случаях, что следует оговаривать особо.

Из формулы (4) можно установить, что формирование спектрального пика, начиная с некоторого момента времени, заканчивается, и при дальнейшем увеличении времени наступает стабилизация. Очевидно, что уменьшение параметра α приводит к обострению пика, который будет формироваться на заметно большем временном интервале. В пределе, при α=0, величина пика будет все время линейно нарастать и обостряться. Именно этот случай и приведен в монографии А.А. Харкевича [2].

Так как текущий спектр определяется по формуле

$$F(t,\omega)=\int_{-\infty}^{t} e^{i\omega(t-\tau)-\alpha(t-\tau)}f(\tau)d, \tag{5}$$

то, воспользовавшись этим, можно рассмотреть следующую последовательность преобразований:

$$\begin{aligned} F_{k+1}(\omega) &= \int_{-\infty}^{(k+1)\Delta} e^{\bar{\omega}(k\Delta+\Delta-\tau)}f(\tau)d\tau = \\ &= e^{\bar{\omega}\Delta}\left\{F_k(\omega)+\int_0^\Delta e^{-\bar{\omega}x}f(k\Delta+x)dx\right\} = \\ &= e^{\bar{\omega}\Delta}\left\{F_k(\omega)+f_{k+1}\int_0^\Delta e^{-\bar{\omega}x}dx\right\}. \end{aligned} \tag{6}$$

В окончательном виде эта формула может быть записана так:

$$\begin{aligned} F_{k+1}(\omega) &= e^{\bar{\omega}\Delta}\left\{F_k(\omega)-\frac{f_{k+1}}{\bar{\omega}}e^{-\bar{\omega}x}\Big|_0^\Delta\right\} = \\ &= e^{\bar{\omega}\Delta}\left\{F_k(\omega)+\frac{f_{k+1}}{\bar{\omega}}\left[1-e^{-\bar{\omega}\Delta}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь f_k – значение анализируемой функции на k – временном интервале величины Δ (при нумерации по левому концу интервала), $\bar{\omega}=i\omega-\alpha$, где α – выбираемая константа, от величины которой зависит предельное частотное разрешение, а также тот временной интервал, значения функции на котором вносят основной вклад в текущий спектр. Формула (7) получена при ступенчатой аппроксимации анализируемой функции. Возможно также получение аналогичных формул для приближения данных ломаными или еще более гладкими функциями, например сплайнами.

При ступенчатой аппроксимации приближение может быть недостаточно хорошим, поэтому заведомо лучший результат получается для приближения ломаными. В этом случае можно установить следующую цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} F_{k+1}(\omega) &= \int_{-\infty}^{(k+1)\Delta} e^{\bar{\omega}(k\Delta+\Delta-\tau)}f(\tau)d\tau = \\ &= e^{\bar{\omega}\Delta}\left\{F_k(\omega)+\int_0^\Delta e^{-\bar{\omega}x}f(k\Delta+x)dx\right\} = \\ &= e^{\bar{\omega}\Delta}\left\{F_k(\omega)+\int_0^\Delta\left[f_k+(f_{k+1}-f_k)\frac{x}{\Delta}\right]e^{-\bar{\omega}x}dx\right\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Проводя элементарное интегрирование интегралов, входящих в (8), получаем результат в виде рекуррентной формулы

$$F_{k+1}(\omega) = e^{\bar{\omega}\Delta} \times$$
$$\times \left\{ F_k(\omega) + \frac{1}{\bar{\omega}}(1 - e^{-\bar{\omega}\Delta}) \left(f_k + \frac{f_{k+1} - f_k}{\bar{\omega}\Delta} \right) - e^{-\bar{\omega}\Delta} \frac{(f_{k+1} - f_k)}{\bar{\omega}} \right\}. \tag{9}$$

В электронном варианте приложения к данной лекции будут приведены текущие спектры, которые рассчитывались с использованием формулы (9).

Заключение

В заключение отметим, что при работе с текущими спектрами использование обычных спектров нецелесообразно, так как это может привести к осложнениям, связанным несовместимостью этих понятий в "теле сигнала". Если мы рассматриваем те моменты времени, когда входной сигнал стал равен нулю, то его текущий спектр будет сводиться к обычному спектру. Но это не означает, что текущий спектр выходного сигнала может быть сведен к обычному спектру, так как реальные линейные системы обладают формально бесконечно протяженным (во времени) откликом. В силу этого, т. к. систематическое использование текущих спектров не распространено достаточно широко, их последовательное использование требует уточнения многих стандартных вопросов теории линейных цепей, в особенности, как нам кажется, вопросов описания свойств сигналов во время их прохождения через линейные системы.

Переход к частотному языку с использованием текущих спектров не позволяет избавиться от временной переменной, и это свойство требует уточнения многих вопросов анализа физических моделей, связанных с временной изменчивостью свойств этих объектов. В противном случае, при игнорировании факта ограниченности временного интервала текущим временем, можно встретиться с формальным описанием физических моделей, без учета физической реализуемости используемых математических операций. Наиболее последовательно это свойство учитывалось в работе [10] при изучении обратной задачи рассеяния для случая акустических волн.

Важность учета реальных свойств оси времени можно прояснить, например, при анализе случайных сигналов, что встречается во многих разделах физики. Так как многие понятия в теории случайных сигналов связаны с определениями, относящимися ко всей временной (математической) оси, то при изучении свойств таких сигналов в применении к реальным физическим случаям требуется переосмысление и уточнение ряда понятий, например, понятия случайного стационарного процесса и т. п.

Еще один важный пример можно привести в связи с вопросом о свойствах пространства–времени. Если признать, что физическое пространство–время является многообразием с краем, положение которого определяется текущим моментом времени, то становится очевидной необходимость переосмысления тех физических понятий, которые связаны со свойствами пространства–времени. Так, например, преобразования Лоренца обычно вводятся для пространства–времени с полной временной осью, учет же реальных свойств физического пространства приводит к необходимости уточнения этих фундаментальных понятий.

Таким образом, можно заключить, что общефизическое понятие текущего спектра целесообразно использовать во всех разделах физики, где используется анализ физических моделей, связанных с изучением динамических, то есть временных, свойств тех или иных реальных объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рытов С.М. О некоторых «парадоксах», связанных со спектральным разложением // УФН. 1946. Т. 29, Вып. 1–2. С. 147–160.
2. Харкевич А.А. Спектры и анализ. М.: ГИФМЛ, 1962. 236 с.
3. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986. 512 с.
4. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. М.: Мир, 1983. Т. 1. 312 с.
5. Орлов И.И., Ильин Н.В. О передаточных функциях линейной системы // Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. М.: Наука, 1988. Вып. 82. С. 48–51
6. Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. М: Наука, 1963. С. 288.
7. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: ГИФМЛ, 1958. С. 678.
8. Орлов И.И., Ильин Н.В. О текущих спектрах сигналов. Материалы VI Научно-технической конференции «Радиолокация. Навигация. Связь», Воронеж, 25–27 апреля 2000, Воронеж. 2000. Т. 1. С. 361–365.
9. Сороко Л.М. Основы голографии и когерентной оптики. М.: Наука, 1971. С. 616.
10. Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния. М.: Мир, 1971. С. 312.

Институт солнечно-земной физики СО РАН, Иркутск