

МОДЕЛЬ $\alpha\Omega$ -ДИНАМО: ЭФФЕКТ ГИСТЕРЕЗИСА

С.В. Олемской, Л.Л. Кичатинов

MODEL OF $\alpha\Omega$ -DYNAMO: HYSTERESIS EFFECT

S.V. Olemskoy, L.L. Kitchatinov

В работе представлена нелинейная модель динамо, в которой учитывается зависимость турбулентной диффузии от магнитного поля. Модель показывает явление гистерезиса. В определенном интервале значений динамо-числа возможны два решения – затухающие колебания слабых полей и магнитные циклы с постоянной и большой амплитудой, устанавливающиеся в зависимости от начальных условий. Флуктуации параметра α приводят к переходам между этими режимами, и расчеты показывают перемежаемость магнитных циклов относительно большой амплитуды с эпохами слабых магнитных полей.

Nonlinear dynamo model with allowance for magnetic quenching of the turbulent diffusivity shows hysteresis phenomenon. In a certain range of dynamo numbers, two solutions are possible: decaying oscillations of weak fields and magnetic cycles of strong fields with the constant and large amplitude; both are settled subject to initial conditions. Fluctuations of the α -parameter provoke transitions between these two regimes, and computations show intermittency of magnetic cycles having relatively large amplitudes and epochs of weak magnetic fields.

Введение

Процессы, генерирующие магнитные поля течениями проводящего вещества, называют гидромагнитным динамо. Основным параметром моделей динамо является динамо-число

$$D = \frac{\alpha\Omega R^3}{\eta^2},$$

где Ω – угловая скорость звезды, R – ее радиус, η – эффективная магнитная диффузия, α – параметр, определяющий интенсивность генерации поля циклонической конвекцией. Имеется некоторая критическая величина динамо-числа для генерации поля. При величине D меньше критической магнитное поле затухает, а при $D > D_{cr}$ – возрастает со временем. Рост останавливается при достаточно больших напряженностях поля из-за обратного влияния поля на генерирующие его течения, т. е. из-за нелинейных эффектов.

В подавляющем большинстве нелинейных моделей динамо учитывалась зависимость параметра α и/или неоднородности вращения от магнитного поля. Уменьшение α с увеличением напряженности поля приводит к уменьшению эффективного динамо-числа, и рост поля останавливается. Есть, однако, основания полагать, что магнитная диффузия η также зависит от магнитного поля и также уменьшается, когда поле усиливается.

В модели динамо, рассмотренной в данной работе, учтена зависимость диффузии от магнитного поля. Установлено, что такая зависимость приводит к явлению гистерезиса. При числах динамо меньше критического слабые затравочные поля затухают со временем. Однако даже при слабом превышении критической величины устанавливаются колебания с амплитудой поля на уровне равномерного распределения магнитной энергии и кинетической энергии турбулентности. Если после этого уменьшать динамо-число, то магнитные циклы с установившейся конечной амплитудой сохраняются и при докритических величинах D . Таким образом, в некотором интервале значений D вблизи D_{cr} имеется два возможных режима – магнитные циклы постоянной и

относительно большой амплитуды и затухающие колебания малой амплитуды.

Наблюдения солнечной активности обнаруживают чередование «обычных» 11-летних циклов с эпохами глобальных минимумов активности, среди которых наиболее известен минимум Маундера [1]. Обнаруженный гистерезис в динамо, когда при прочих равных условиях возможны магнитные циклы с разными амплитудами, может иметь отношение к таким глобальным минимумам.

Модель

Мы использовали модель $\alpha\Omega$ -динамо для конвективной оболочки звезды. Магнитное поле симметрично относительно оси вращения:

$$\vec{B} = \vec{e}_\varphi B + \text{rot} \left(\vec{e}_\varphi \frac{A}{r \sin \theta} \right),$$

где r , θ и φ – обычные сферические координаты, \vec{e}_φ – единичный вектор в азимутальном направлении, B – тороидальная составляющая магнитного поля, A – потенциал полоидального поля. Ниже представлены уравнения динамо в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} &= \frac{D}{x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \times \\ &\times \left(\frac{\phi_\eta(B)}{\sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta B)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi_\eta(B) \frac{\partial(xB)}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial A}{\partial t} &= \phi_\alpha(B) x \cos \theta \sin^3 \theta B + \phi_\eta(B) \times \\ &\times \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\phi_\eta(B)}{x^2} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right). \end{aligned}$$

Величина f определяет неоднородное вращение, использовалась аппроксимация данных гелиосейсмологии о внутреннем вращении Солнца [4].

Рассматривается простейший случай, когда фоновые турбулентная диффузия η и альфа-эффект α однородны в пространстве. Зависимость от координат появляется лишь из-за нелинейности, т. е. влияния магнитного поля:

$$\eta_T = \eta \phi_\eta(B),$$

$$\alpha_T = \alpha \cos \theta \sin^2 \theta \phi_\alpha(B).$$

Здесь обезразмеренное поле B измеряется в единицах поля равнораспределения

$$B_{\text{eq}} = \sqrt{4\pi p u'},$$

где u' – среднеквадратичная скорость турбулентных движений. Зависимость от магнитного поля определяем согласно расчетам коэффициентов переноса в квазилинейном приближении [2, 3]:

$$\phi_\alpha(B) = \frac{15}{32B^4} \left(1 - \frac{4B^2}{3(1+B^2)^2} - \frac{1-B^2}{B} \arctg(B) \right),$$

$$\phi_\eta(B) = \frac{3}{8B^2} \left(1 + \frac{4+8B^2}{(1+B^2)^2} + \frac{B^2-5}{B} \arctg(B) \right).$$

Для сильных полей, $B \gg 1$, магнитная диффузия уменьшается обратно пропорционально B , $\phi_\eta \approx 3\pi/16B$, в то время как α обратно пропорционально B^3 , $\phi_\alpha \approx 15\pi/64B^3$. Поэтому если рассмотреть эффективное динамо-число

$$D_{\text{eff}} = \Omega R^3 \frac{\alpha \phi_\alpha(B)}{(\eta \phi_\eta(B))^2}$$

с учетом зависимости магнитной диффузии и альфа-эффекта от магнитного поля, то для сильных полей такое число убывает с увеличением B , $D_{\text{eff}} \sim B^{-1}$, что и требуется для насыщения роста поля. Однако для слабых полей, $B \ll 1$, магнитную диффузию и α рассчитываем по следующим формулам:

$$\phi_\eta \approx 1 - 2B^2,$$

$$\phi_\alpha \approx 1 - \frac{12B^2}{7}.$$

Поэтому эффективное динамо-число $D_{\text{eff}} \approx D \times (1+16B^2/7)$ первоначально возрастает с B . С этим и связаны обсуждаемые особенности нелинейного динамо вблизи критического динамо-числа. Относительная величина D_{eff}/D как функция магнитного поля показана на рис. 1. Представленная зависимость не является монотонной, для слабых полей эффективное динамо-число возрастает с B .

Что касается граничных условий, в модели использовались псевдовакуумные граничные условия на поверхности и условия для поверхности

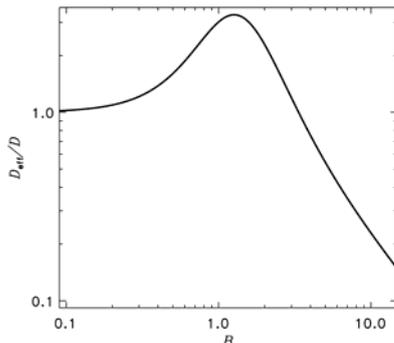


Рис. 1. Зависимость отношения D_{eff}/D от магнитного поля.

раздела со сверхпроводником в основании конвективной оболочки. На полюсах тороидальная и полоидальная составляющие обращаются в ноль. Симметрия полей относительно экватора задана не была, и дополнительные условия на экваторе не использовались.

Эволюция поля во времени от некоторого начального заданного распределения рассчитывалась численно. Учет зависимости эффективной диффузии от магнитного поля обнаруживает два режима колебаний с существенно различающимися амплитудами, соответствующих различным начальным условиям. Относительно малые флуктуации ($\delta\alpha = 0.1\alpha$) способны вызывать переходы между этими режимами. Параметры η и α связаны с турбулентной конвекцией, поэтому в них присутствуют случайные флуктуации. Оценка характерного масштаба времени таких флуктуаций по порядку величины есть l/u' , где l – масштаб конвективных движений. Характерное время флуктуаций $\tau \sim \frac{l}{u'} \sim \frac{l\eta}{u' R^2}$.

Используя обычную оценку коэффициента диффузии $\eta \sim lu'$, окончательно находим $\tau = \frac{l^2}{R^2}$.

Амплитуду флуктуаций оценить сложнее. Если предположить, что для отдельной конвективной ячейки характерная величина флуктуаций сравнима со средней величиной, то для относительной величины флуктуаций

$$\frac{\delta\alpha}{\alpha} \sim \frac{1}{\sqrt{N}},$$

где N – количество конвективных ячеек. Вероятно, основной вклад в альфа-эффект для Солнца дают гигантские конвективные ячейки, размер которых сравним с толщиной конвективной оболочки, тогда

$$N \sim \frac{l^2}{R^2} \sim \tau^{-1}.$$

Ограничимся простейшей моделью, которая учитывает лишь флуктуации α , причем их относительная величина $\delta\alpha/\alpha$ однородна в пространстве, но зависит от времени. Эта величина остается постоянной в течение времени τ , затем мгновенно изменяется к новому значению и т. д.

Таким образом, уравнение для полоидального поля вместо приведенного выше примет вид

$$\frac{\partial A}{\partial t} = (1 + s\sqrt{\tau})\phi_\alpha(B)x \cos \theta \sin^3 \theta B + \phi_\eta(B) \times \times \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\phi_\eta(B)}{x^2} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right).$$

Здесь s – случайная величина с однородным распределением значений в интервале $-1 < s < 1$. Эта величина остается постоянной в течение времени τ , после чего мгновенно изменяется к новому случайному значению. Расчеты проводились для $l=0.2R$ ($\tau=0.04$).

Результаты

Для изложенной выше модели характерно следующее поведение. Критическое динамо-число линейной задачи $D_{\text{cr}}=131\ 000$. При меньших значениях D

магнитное поле затухает со временем, а при $D > D_{cr}$ – возрастает. Период динамо-цикла в безразмерных единицах времени составляет около 0.04. Нелинейные расчеты обнаруживают более сложное поведение. Во всех проведенных расчетах распределение поля становится антисимметричным (дипольный тип симметрии) относительно экваториальной плоскости по прошествии достаточно длительного времени.

На рис. 2 показана зависимость амплитуды колебаний тороидального поля от динамо-числа (поле приводится в безразмерных единицах; для Солнца $B=1$ соответствует примерно 5000 Гс). Даже при небольшом превышении величиной D критического значения устанавливаются колебания со значительной амплитудой $B \sim 1$. Для D меньших критической величины, но близких к ней результат зависит от величины начального поля. Слабые поля неограниченно затухают, в то время как для достаточно сильных начальных полей устанавливаются колебания конечной амплитуды. Конечные амплитуды колебаний при $D < D_{cr}$ были получены путем последовательных уменьшений динамо-числа на малую величину и использования в качестве начального поля результирующего поля предыдущего расчета. Гистерезисный характер зависимости, показанной на предыдущем рисунке, является следствием подавления турбулентной диффузии магнитным полем. Зависимость эффективного динамо-числа от магнитного поля (рис. 1) не является монотонной. Если начальное магнитное поле мало, то D_{eff} меняется мало и при $D < D_{cr}$ поле затухает. Однако при достаточно большом начальном поле D_{eff} может превысить критическое значение, даже если $D < D_{cr}$, что приводит к усилению поля. Насыщение роста поля происходит в области сильных полей, где кривая, показанная на первом рисунке, имеет отрицательный наклон.

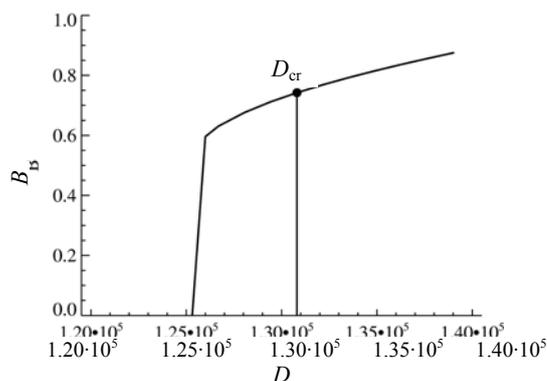


Рис. 2. Амплитуда колебаний тороидального магнитного поля в середине конвективной зоны как функция динамо-числа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Витинский Ю.И., Копецкий М., Куклин Г.В. Статистика пятнообразовательной деятельности Солнца. М.: Наука, 1986. 296 с.
2. Rudiger G., Kitchatinov L.L. Alpha-effect and alpha-quenching // *Astron. and Astrophys.* 1993. V. 269, N 1–2. P. 581–588.
3. Kitchatinov L.L., Pipin V.V., Rudiger G. Turbulent viscosity, magnetic diffusivity, and heat conductivity under the influence of rotation and magnetic field // *Astronomische Nachrichten.* 1994. V. 315, N 2. P. 157–170.
4. Belvedere G., Kuzanyan K.M., Sokoloff D.D. A two-dimensional asymptotic solution for a dynamo wave in the light of the solar internal rotation // *Astron. and Astrophys.* 2000. V. 315, N 4. P. 778–790.

Институт солнечно-земной физики СО РАН, Иркутск