

ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Н.Г. Макаренко

GEOMETRY AND TOPOLOGY OF DIGITAL IMAGES

N.G. Makarenko

Статья представляет собой первую часть лекции и посвящена связям современной техники обработки цифровых изображений с фрактальной геометрией и теорией функций с ограниченной вариацией. Вводятся основные элементы микроканонического формализма, которые позволяют разложить изображение на сингулярные многообразия.

The article is the first part of the lecture and considers the relation between up-to-date technique processing digital images and fractal geometry and the theory of limited variation functions. The base elements of microcanonical formalism are introduced, that gives possibility to decompose image on singular manifolds.

Введение

Простейшей линейной динамической системой является итерирующий конечный набор сжимающих функций IFS (Iterated function system), дополненных, возможно, вращениями и трансляциями. По теореме Банаха о неподвижной точке в пространстве компактов IFS имеет единственную неподвижную «точку», или аттрактор IFS [1–4]. Если образы IFS не пересекаются, то аттрактор может быть несвязным компактным коллажем, состоящим из своих собственных уменьшенных копий, т. е. фракталом с дробной размерностью. Представим себе, что каждая итерация IFS эквивалентна нанесению черной краски (меры) на носитель. Тогда предельным образом будет черно-белая геометрическая фигура. Предположим теперь, что каждый из IFS выбирается с фиксированной вероятностью. В этом случае раскраска аттрактора будет репродуцировать себя в шкале уровней серого на различных, все более уменьшающихся масштабах, следуя заданному распределению вероятностей. В результате получится единственная самоподобная инвариантная мера IFS на аттракторе в силу той же самой теоремы Банаха, но уже в пространстве борелевых мер [1, 2, 4]. Такую меру называют мультифрактальной, потому что она состоит из фрактальных компонент разной размерности.

Для того чтобы описать локальную изменчивость мультифрактального узора, используют понятие регулярности функции, адаптированное к мере.

Основной задачей этой статьи является изложение математических основ мультифрактального формализма на уровне технической строгости. Оказывается, что цифровые изображения являются объектами, для которых этот формализм выглядит настолько естественным, насколько это вообще возможно.

Абстрактный мультифрактальный формализм

Напомним некоторые основные сведения из теории меры [5, 6]. В общем случае мера на множестве X – это функция, которая приписывает каждому подмножеству $A \subset X$ неотрицательное число $0 \leq \mu(A) \leq \infty$, $\mu(\emptyset) = 0$, так что выполняется условие счетной аддитивности:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad (1)$$

Измерить множество – значит, разбить его на части с помощью некоторого эталонного множества.

Если мера μ уже определена, то множество $A \in X$ называют μ -измеримым, если оно аддитивно «расщепляет» любое другое множество $B \in X$, т. е. $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c)$, где A^c – дополнение A в X . Класс μ -измеримых множеств образует алгебру: дополнение к любому измеримому множеству измеримо; счетное объединение и пересечение измеримых множеств также измеримы. Минимальную алгебру составляют так называемые Борелевы множества: на R такими множествами являются обычные интервалы $I_n = [a_n, b_n] \in R$, длина которых является их мерой Лебега $\mu_L(I_n) = b_n - a_n$. Меру μ называют Борелевской регулярной мерой, если для каждого множества A существует такое Борелево множество $B \supset A$, которое «аппроксимирует» меру A : $\mu(B) = \mu(A)$. Если такая регулярная мера конечна для любого компактного множества, ее называют мерой Радона.

Счетное семейство подмножеств $A = \{A_i\}$ называют счетным ε -покрытием множества F , если $F \subseteq \bigcup_i A_i$ и для всех A_i справедливо неравенство $\text{diam } A_i \leq \varepsilon$, $\text{diam } A = \sup_{x,y \in A} \|x - y\|$. Определим крупнозернистую α -мерную меру Хаусдорфа, как [1, 2, 5, 6]

$$\mu_H^\alpha(\varepsilon, F) = \inf \sum_{A_i \in \mathcal{A}} (\text{diam } A_i)^\alpha, \quad (2)$$

где нижняя грань берется по всем счетным ε -покрытиям. Предел:

$$\mu_H^\alpha(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_H^\alpha(\varepsilon, F) \quad (3)$$

называют α -мерной мерой Хаусдорфа. В метрическом пространстве R для конечного множества A одномерная мера Хаусдорфа совпадает с Лебеговой мерой: $\mu_H^1(A) = m(A)$. Если A состоит из n точек, то мера $\mu_H^0(A) = n$. Вычислить меру (3) на практике невозможно, однако ее можно оценить, используя один результат из геометрической теории меры [6, 7]. Пусть мера Радона $\mu[B_r(x)]$ для шара $B_r(x)$, окружающего каждую точку $x \in A$ борелева множества $A \subset R^n$, удовлетворяет скейлингу:

$$\mu[B_r(x)] \sim r^\alpha \quad (4)$$

Тогда α -мерную меру Хаусдорфа можно аппрок-

симировать сверху более доступной для измерения мерой Радона

$$\mu(A) \geq C \lambda \mu_H^\alpha(A), \quad (5)$$

где $C=C(\alpha, n)$ и $0 < \lambda < \infty$ – некоторые константы. Рассмотрим теперь поведение $\mu_H^\alpha(F)$ как функции α . Когда α увеличивается, мера уменьшается. Пусть F – борелево множество и $0 < \alpha < s$. Тогда, если $\mu_H^\alpha(F) < \infty$, то $\mu_H^s(F) = 0$. Напротив, если $\mu_H^s(F) > 0$, то $\mu_H^\alpha(F) = \infty$. Можно доказать, что для F существует единственное критическое значение $\alpha_0 \in [0, \infty]$ – такое, что $\mu_H^\alpha(F) = \infty$ для всех $\alpha < \alpha_0$ и $\mu_H^\alpha(F) = 0$ для всех $\alpha > \alpha_0$. Эту величину

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \dim_H F = \\ &= \sup \{ \alpha \mid \mu_H^\alpha(F) = 0 \} = \inf \{ \alpha \mid \mu_H^\alpha(F) = \infty \}. \end{aligned} \quad (6)$$

и называют размерностью Хаусдорфа [2, 3, 8]. Можно показать, что, если A, B – борелевы множества, то

$$A \subseteq B \Rightarrow \dim_H A \leq \dim_H B;$$

$$\dim_H (A \cup B) = \max \{ \dim_H A, \dim_H B \}. \quad (7)$$

Пусть $X \subset \mathbb{R}$ и $g: X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ – непрерывная функция. Проведем на графике $(x, g(x))$ горизонтальную прямую $g(x) = \alpha$ и рассмотрим для разных α множества уровней $K_\alpha^g = g^{-1}(\alpha) \cap X$, т. е. множества точек носителя, в которых $g(x)$ пересекается с прямой [9] (см. рис. 1):

$$K_\alpha^g = \{ x \in X \mid g(x) = \alpha \}. \quad (8)$$

Их называют компонентами мультифрактального разложения X , так как:

$$X = \bigcup_{-\infty \leq \alpha \leq +\infty} K_\alpha^g. \quad (9)$$

Термин «мультифрактальный» означает, что каждое из K_α^g образовано конечным числом точек, так что $\dim_H(K_\alpha^g) \leq 1$, как для фрактала. Таким образом, X расслаивается на различные «фрактальные» множества относительно функции g . Целочисленную много-

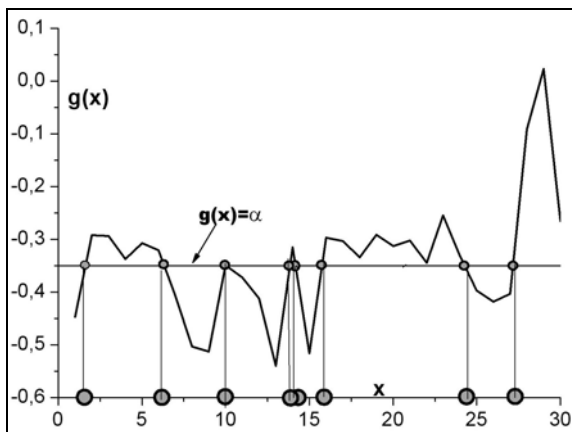


Рис. 1. Компонент мультифрактального разложения для $\alpha = -0.35$ относительно графика $g(x)$ (показан кружками на оси абсцисс).

значную функцию, равную числу пересечений графика $g(x)$ с нашей прямой

$$N(\alpha, g, K_\alpha^g) = \# \{ x \mid g(x) = \alpha \}, \quad (10)$$

называют индикатрисой Банаха. Для $X = [a, b]$ она равна нульмерной мере Хаусдорфа $\mu_H^0(g^{-1}(\alpha) \cap [a, b])$ множества точек пересечения.

Для «измерения» каждой компоненты K_α^g удобно использовать размерность Хаусдорфа $f_H(\alpha) = \dim_H(K_\alpha^g)$, которая является монотонной функцией множества (см. (7)). Пару $(\alpha, f_H(\alpha))$ называют мультифрактальным спектром относительно $g(x)$.

Наша ближайшая цель – выбор подходящей функции $g(x)$. Мы используем для этого гельдеровский показатель регулярности функции. Эвристическая идея регулярности основана на исследовании локального изменения функции в зависимости от изменения ее аргумента. Для «хороших» функций приращение функции и аргумента согласованы так в некоторой малой окрестности $|\Delta x| = |x - x_0| \leq \varepsilon$ точки x_0 , их отношение равномерно ограничено $|\Delta y|/|\Delta x| \leq C$ положительной константой. С другой стороны, можно представить себе функцию, для которой небольшое изменение $|\Delta x|$ приводит к огромному значению $|\Delta y|$, так что $|\Delta y|/|\Delta x| \sim \infty$. Альтернативой может быть непостоянная функция, которая очень слабо реагирует на изменение аргумента, т. е. $|\Delta y|/|\Delta x| \sim 0$. Можно обобщить все эти ситуации с помощью некоторой постоянной $\alpha(x_0)$, такой что в окрестности x_0 ограниченным является отношение $|\Delta y|/|\Delta x|^\alpha \leq C_H$. Правильное значение $\alpha(x_0)$ является «точкой равновесия»: отклонение от нее в любую сторону дает либо нулевое, либо бесконечное значение для C_H . Величину $\alpha(x_0)$ называют гельдеровским показателем регулярности функции в точке x_0 , а постоянную C_H иногда называют гельдеровской производной. Ее геометрическим образом в x_0 является криволинейный «касательный» конус $\Delta y \sim |\Delta x|^\alpha$. Формально рассмотрим функцию $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$, и пусть $n \leq \alpha < n+1$, $n \in \mathbb{Z}$. Говорят, что функция принадлежит в точке x_0 гельдеровскому классу $C^\alpha(x_0)$, если существует число $\delta > 0$, полином P_n степени n и постоянная C , такие что для любой точки $x \in |x - x_0| \leq \delta$ справедливо неравенство [10–12]

$$|f(x) - P_n(x - x_0)| \leq C |x - x_0|^\alpha. \quad (11)$$

Случай $n=0$ приводит к стандартному определению липшиц-непрерывности для функции. Поточечным гельдеровским показателем (экспонентой) f в точке x_0 называют величину

$$\alpha_p(x_0) = \sup \{ \alpha \mid f \in C^\alpha(x_0) \}. \quad (12)$$

Можно доказать [10], что полином P_n в (11) состоит из первых $(n+1)$ членов разложения функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 в ряд Тейлора:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0)^n + C|x - x_0|^{\alpha(x_0)}. \quad (13)$$

В общем случае, когда $n \leq \alpha \leq n + 1$, функция $f(x)$ в точке x_0 имеет n производных, но ее $n+1$ производная не ограничена. Если она ограничена, но разрывна, n -я производная не является сингулярной.

2. Микроканонический мультифрактальный формализм

Будем рассматривать значения функции в ε -окрестности некоторой точки $x \in R$ как количество массы [2] некоторой меры $\mu(\varepsilon)$. Ее универсальной аппроксимацией на $I \subset R$ является степенной закон (4): $\mu(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\alpha(x)}$, где $\alpha(x)$ называют гельдеровским показателем сингулярности меры. Действительно, если масса M распределена «атомарно», со значениями m_i в отдельных точках x_i носителя, то $\alpha=0$ и $M = \sum_i m_i \delta(x - x_i)$. Равномерному распределению массы соответствует значение $\alpha=1$ и абсолютно непрерывная мера μ с постоянной плотностью ρ , так что $M = \int_I \rho dx$. Для $\alpha < 1$ плотность меры расходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ и такую меру называют сингулярной. Несколько неожиданным покажется то, что случай $\alpha=2$ тоже объявляют сингулярным в $1D$. Для случая $2D$ мера сингулярна при $\alpha \neq 2$ и т. д. Множество точек носителя, имеющих меру с сингулярностью α , в общем случае образуют фрактальное множество с размерностью $f(\alpha)$, а пару $(\alpha, f(\alpha))$ называют мультифрактальным спектром. В случае самоподобной меры график спектра является выпуклой вверх кривой. Способы вычисления такого спектра, основанные обычно на методе статистических моментов, являются одной из задач мультифрактального анализа [13–16] и реферируются теперь как канонический вариант формализма. Менее известен микроканонический вариант мультифрактального формализма [17, 18], который оценивает локальные масштабные свойства мультифрактальных мер геометрически, а не статистически. Наиболее естественным этот формализм выглядит в применении к цифровым изображениям.

Цифровое изображение является дискретным полем яркости $I(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in Z \times Z$, заданным на ограниченной области A квадратной решетки. Заметим, что, вообще говоря, «истинного» изображения $u(\mathbf{x})$ не существует. Мы всегда имеем дело с интегралом $\langle u, \phi \rangle = \int_A u(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})dx_1dx_2$, где $\phi(\mathbf{x})$ – функция с компактным носителем, сенсор-ячейка CCD-приемника или сетчатки глаза. Таким образом, описание изображений попадает в контекст теории обобщенных функций (распределений), и производные можно понимать в слабом смысле [19, 20]. Условие $\langle u, \phi \rangle \geq 0$ эквивалентно непрерывности «обобщенного» изображения или существованию единственной меры Радона на A . Эту меру μ для каждого компактного множества A на изображении можно определить следующим образом:

$$\mu(A) \equiv \int_{\mathbf{x} \in A} d\mu(\mathbf{x}), \quad (14)$$

где плотность меры в предположении локальной гладкости изображения описывается выражением [8, 18, 20, 21]:

$$d\mu(\mathbf{x}) \equiv |\nabla I|(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad |\nabla I|(x_1, x_2) = \left(\left| \frac{\partial I(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial I(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right|^2 \right)^{1/2} \quad (15)$$

и частные производные понимаются в смысле их аппроксимации разделенными разностями. Выбор меры в форме (14) связан с пространствами Соболева и понятием функций с ограниченной вариацией [20]. Напомним, что полной вариацией функции $f(x) \in C^1$ называют величину [7, 8]

$$\|f\|_V = \int_{-\infty}^{+\infty} |f'|dx \quad (16)$$

и $f(x)$ называют функцией с ограниченной вариацией, если $\|f\|_V < \infty$. Известная формула Банаха об индикатрисе утверждает, что вариация функции совпадает с суммой индикатрис по уровню [6, 7, 20]:

$$\|f\|_V = \int_a^b |f'|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} N(y, f)dy. \quad (17)$$

Выражение (15) – это двухмерный аналог (17), и, следовательно, наша мера измеряет полную вариацию контраста в области. Ее можно оценить, используя теорему об индикатрисе (17). Рассмотрим, ради простоты, регулярный случай. Пусть $\Omega \in R^2$ и $f(x, y) \in C^2$ – гладкая поверхность. Тогда множество ее морсовских особых точек $E = \{(x, y) | \nabla f = 0\}$ по теореме Морса–Сарда не образует связного множества, т. е. $\mu_H^1(E) = 0$. С другой стороны, множество ее уровней $S = f^{-1}(t) \cap \Omega$ будет одномерным C^2 -многообразием, почти для каждого t . Индикатрисы – это множество, образованное длинами изолиний $\mu_H^1(f^{-1}(t) \cap \Omega)$, полученных пересечением графика $\{(x, y), z = f(x, y)\}$ с плоскостью $z=t$. Вариация $\|f\|_V$, определяется теперь так называемой формулой ко-площади, которая справедлива для всех липшицевских функций [7, 20]:

$$\|f\|_V = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_H^1[f^{-1}(t) \cap \Omega]dt. \quad (18)$$

Пусть $\mu[B_r(\mathbf{x})]$ – мера Радона для шара $B_r(\mathbf{x})$, окружающего каждую точку $\mathbf{x} \in A$. Используя выражение (4) мы полагаем, что для достаточно малых окрестностей точки справедлива следующая аппроксимация [21]:

$$\mu[B_r(\mathbf{x})] = a(\mathbf{x})r^{h(\mathbf{x})} + o(r^{h(\mathbf{x})}). \quad (19)$$

Здесь гельдеровские показатели обозначены через $h(\mathbf{x})$, чтобы отличить их от общего случая (12), а $o(r^{h(\mathbf{x})})$ обозначают члены более высокого порядка малости, чем $r^{h(\mathbf{x})}$. Коэффициенты $a(\mathbf{x})$ зависят от выбора метрики, использующейся для определения шаров и шкалы масштабов. Напротив, $h(\mathbf{x})$ не зависят от метрики и дают всю информацию об эволю-

ции меры при изменении масштаба. Они могут быть получены с помощью линейной регрессии $\log \mu(B_r(\mathbf{x})) = h(\mathbf{x}) \log r$ [17, 18]. Такой вариант получения оценок показателей реферируют как микроканонический вариант мультифрактального формализма [17, 18].

В численных методах из-за большой вариабельности контраста обычно не удается хорошо определить градиент: при уменьшении размера окрестности последовательность оценок не меняется монотонно при уменьшении цифрового радиуса окрестности. Чтобы обойти эту трудность, можно вместо обычной борелевой меры – суммы уровней серого в пикселах – использовать так называемые емкости Шоке [22]. Они удовлетворяют слабому условию аддитивности и гарантируют монотонность при изменении масштаба. Не останавливаясь на деталях [22–25], определим три емкости Шоке μ_{\max} , μ_{\min} и μ_{iso} для области Ω цифрового изображения следующим образом. Пусть $\Omega^* \subset \Omega$ – подмножество, в котором для любого пиксела i интенсивность $p(i) \neq 0$. Определим емкость как максимальное или минимальное значение $p(i)$:

$$\mu_{\max}(\Omega) = \max_{i \in \Omega^*} p(i), \quad \mu_{\min}(\Omega) = \min_{i \in \Omega^*} p(i). \quad (20)$$

Третья емкость μ_{iso} зависит от дискретизации уровней серого. Будем считать два пиксела i и j эквивалентными $p_{\delta}(i) \approx p_{\delta}(j)$, если уровни серого в них не различаются с точностью до заданного фиксированного числа δ , т. е. $|p(i) - p(j)| < \delta$. Тогда:

$$\mu_{\text{iso}} = \#\{i \in \Omega : p_{\delta}(i) = p_{\delta}(G(\Omega))\}, \quad (21)$$

где $G(\Omega)$ – геометрический центр Ω , а $\#$ – число пикселей. Очевидно, что все три емкости монотонно изменяются с размерами окрестности. Используя емкости Шоке, мы можем вычислить гильдеровские показатели для цифрового изображения. Затем для каждого h мы сможем получить компоненту мультифрактального разложения $F_h = \{\mathbf{x} \in \Omega | h(\mathbf{x}) = h\}$ – так называемое Singular manifold (SM) [16, 19]. Размерность Хаусдорфа $d_H F_h = D(h)$ можно оценить на основе следующих соображений [26]. Для покрытия точек F_h необходимо $N_h(\epsilon) \sim \epsilon^{-D(h)}$ боксов размером ϵ из общего числа $N(\epsilon) \sim \epsilon^{-2}$ боксов, покрывающих всю Ω . Следовательно, вероятность наблюдения сингулярности h на масштабе ϵ ведет себя в пределе малых ϵ как:

$$P_{\epsilon}(h) \propto N_h(\epsilon)/N(\epsilon) \sim \epsilon^{2-D(h)}. \quad (22)$$

Таким образом, для оценки мультифрактального спектра $(h, D(h))$ в этом варианте формализма можно использовать частотную гистограмму вычисленных показателей [8, 17, 28]. Применение емкостей Шоке для MDI магнитограмм Солнца описано в нашей работе [24], а для сегментации данных космического мониторинга, в [25].

Напомним, что чем меньше h , тем больше сингулярность соответствующей меры. Минимальным значениям показателя соответствуют так называемые

MSM – most singular fractal manifolds [21, 27]. Наиболее интересны из них те, для которых $D(h) \approx 1$, т. е. F_h представляют собой контуры. Они играют особую роль при распознавании образов – мы можем узнать человека, располагая лишь контурным рисунком – шаржем. На рис. 2 приведен пример MSM для диапазона показателей $0 < h \leq 1$. Удивительная особенность MSM состоит в том, что оно позволяет восстановить исходную картину с помощью простого пропатора [27]. Иными словами, можно восстановить интенсивность $I(\mathbf{x})$ в каждой точке по информации об изменении градиента интенсивности в точках MSM. Технические детали построения пропатора можно найти в работах [23, 27], а эвристика заключается в «растущевке» контуров MSM в Фурье-представлении. Для иллюстрации на рис. 3 приведены оригинальное изображение, его гильдеровская карта, MSM и реконструкция с помощью описанного пропатора. Хотя для реконструкции использовалось лишь 38 % показателей $h(\mathbf{x})$, она визуально мало отличается от оригинала.

В заключение отметим, что описанные методы имеют чрезвычайно широкий круг применений. Действительно, современные экспериментальные данные большей частью являются матричными, т. е. они представлены цифровыми изображениями. С ними приходится иметь дело в медицине, геофизике, дистанционном зондировании Земли из космоса, астрономии и многих других областях знания. Удивительно, но практически все природные изображения с достаточно высоким пространственным разрешением мультифрактальны, т. е. имеют свойство статистической масштабной инвариантности. Как раз оно и обеспечивает эффективность методов, изложенных в статье. Кроме геометрии, изображение имеет еще и топологию (алгебраическую структуру): два фрактала могут иметь одинаковую размерность, но различаться «пористостью» меры. О методах извлечения топологии из изображений было рассказано в лекции.



Рис. 2. Оригинал (слева) и MSM для $0 < h \leq 1$ (справа).



Рис. 3. Реконструкция изображения по сингулярным многообразиям. Слева – оригинал; в центре – MSM $0 < h(\mathbf{x}) \leq 2$; справа – реконструкция.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Barnsley M. Fractals Everywhere N.Y.: Academic Press. 1988. 531 p.
2. Falconer K. Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. Wiley. 2003.
3. Falconer K. Techniques in Fractal Geometry. Wiley & Sons. 1997. 256 p.
4. Макаренко Н.Г., Каримова Л.М., Мухамеджанова С.А., Князева И.С. Система итеративных функций и Марковский прогноз временных рядов // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 6. С. 3.
5. Edgar G. Measure, Topology, and Fractal Geometry. Springer. 2008. 268 p.
6. Morgan F. Geometric Measure Theory. A Beginner's Guide. Academic Press. 2000.
7. Ziemer W.P. Weakly differentiable functions, Graduate Texts in Mathematics 120, Springer-Verlag, New York, 1989. 370 p.
8. Turiel A., Pérez-Vicente C.J., Grazzini J. Numerical methods for the estimation of multifractal singularity spectra: a comparative study // J.Computat. Phys. 2006. V. 216. P. 362.
9. Barreira L., Pesin Y., Schmeling J. On a general concept of multifractality: Multifractal spectra for dimensions, entropies, and Lyapunov exponents. Multifractal rigidity // Chaos. 1997. V. 7. P. 27. Daoudi K, Levy Vehel J., Meyer Y. Construction of continuous functions with prescribed local regularity // Constructive Approximation. 1998. V. 014(03). P. 349.
10. Mallat St., Hwang W. Singularity detection and processing with wavelets // IEEE Trans. Info. Theory. 1992. V. 38. P. 617.
11. Mallat St. A Wavelet Tour of Signal Processing. Academic Press. 1999. 851 p.
12. Halsey T.C., Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I., Schraiman B.I. Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets // Phys. Rev. A. 1986. V. 33. P. 1141.
13. Falconer K. J. The multifractal spectrum of statistically self-similar measures // J. Theor. Prob. 1994. V. 7. P. 681.
14. Mach J., Mas F., Saguès F. Two representations in multifractal analysis // J. Phys A: Math. Gen. 1995. V. 28. P. 5607.
15. Harte D. Multifractals: theory and applications. CRC Press. 2001. 247 p.
16. Arneodo A., Bacry E., Muzy J.F. The thermodynamics of fractals revisited with wavelets // Physica A. 1995. V. 213. P. 232.
17. Turiel A., Yahia H., Pérez-Vicente C. J. Microcanonical multifractal formalism – a geometrical approach to multifractal systems: Part 1. Singularity analysis // J. Phys. A: Math. Theor. 2008. V. 41. P. 015501.
18. Florack L.M.J. Mathematical Techniques for Image Analysis. 2008. Eindhoven University of Technology. 2008. 100 p.
19. Chan T.F., Shen J. Image processing and analysis. Variational, PDE, wavelet and stochastic methods. 2005. SIAM. 2005. 400 p.
20. Turiel A., Parga N. The multi-fractal structure of contrast changes in natural images: from sharp edges to textures // Neural Computation. 2000. V. 12. P. 763.
21. Levy Vehel J., Vojak R. Multifractal Analysis of Choquet Capacities: Preliminary Results // Advances in Applied Mathematics. 1998. V. 20. P. 1.
22. Макаренко Н. Г. Геометрия изображений // Лекции по нейронинформатике. М.: МИФИ, 2009. С. 89.
23. Круглун О.А., Каримова Л.М., Мухамеджанова С.А., Макаренко Н.Г. Мультифрактальный анализ и моделирование магнитограмм полного диска Солнца // Солнечно-земная физика. 2007. Вып. 10. С. 31–42.
24. Макаренко Н.Г., Круглун О.А., Макаренко И.Н., Каримова Л.М. Мультифрактальная сегментация данных дистанционного зондирования // Исследование Земли из Космоса. 2008. № 3. С. 18.
25. Riedi R., Scheuring I. Conditional and relative multifractal spectra // Fractals. 1997. V. 5. P. 153.
26. Turiel A, del Pozo A. Reconstructing images from their most singular fractal manifold // IEEE Trans. on Image Processing. 2002. V. 11. P. 345.

Главная астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург