УДК 539.12

УНИТАРНОЕ СМЕШИВАНИЕ ФЕРМИОННЫХ ПОЛЕЙ РАЗНОЙ ЧЕТНОСТИ

А.Е. Калошин, Е.А. Кобелева

UNITARY MIXING OF FERMIONIC FIELDS OF DIFFERENT PARITIES

A.E. Kaloshin, E.A. Kobeleva

Мы исследуем смешивание, специфическое для фермионов, когда на петлевом уровне смешиваются два поля противоположной четности, хотя при этом вершины сохраняют четность.

В рамках эффективной теории поля мы получаем многоканальные амплитуды с учетом этого эффекта и сравниваем их со стандартным *K*-матричным подходом.

We study specific mixing of fermions: two different fields with opposite parities mix up at the loop level, though vertices conserve parity.

In the framework of the effective quantum field theory, we obtain multichannel amplitudes and compare them with the standard *K*-matrix approach.

Введение

Этот эффект был ранее отмечен в [1]. Здесь мы исследуем его более детально, в частности, для многоканального случая.

Петлевое смешивание полей является хорошо известным явлением как в адронной физике, так и в физике кварков. Смешивание фермионных полей имеет свою специфику по сравнению с барионными. Во-первых, это наличие γ-матричной структуры в пропагаторах. Здесь полезным техническим приемом является переход к внемассовым проекционным операторам $\Lambda^{\pm}$. После этого дело сводится к изучению коэффициентов при проекционных операторах, и смешивание фермионов фактически ничем не отличается от смешивания барионов. Другой, специфический для фермионных полей аспект смешивания состоит в том, что фермион и антифермион имеют противоположную *P*-четность. При этом четностью фермионного поля называют четность решения с положительной энергией.

Мы изучаем смешивание фермионных полей противоположной четности (при сохранении четности в вершине) с целью приложения этого эффекта для описания рождения барионных резонансов.

Внемассовые проекционные операторы и смешивание фермионов. В своих вычислениях мы будем использовать внемассовые проекционные операторы $\Lambda^{\pm}$. Они имеют вид:

$$\Lambda^{\pm} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\hat{p}}{W}\right),$$

где $W = \sqrt{p^2}$ – энергия в системе центра масс.

Проекционные операторы обладают рядом свойств:

$$\Lambda^{+}\Lambda^{-} = 0,\ \Lambda^{\pm}\Lambda^{\pm} = \Lambda^{\pm},\ \Lambda^{+}\gamma^{5} = \gamma^{5}\Lambda^{-},$$

$$\Lambda^{+} + \Lambda^{-} = 1,\ \Lambda^{+} - \Lambda^{-} = \frac{\hat{p}}{W}.$$

Это приводит к простому виду умножения:

$$(\Lambda^{+}\alpha^{+} + \Lambda^{-}\alpha^{-})(\Lambda^{+}b^{+} + \Lambda^{-}b^{-}) = \Lambda^{+}\alpha^{+}b^{+} + \Lambda^{-}\alpha^{-}b^{-}.$$

Чтобы получить пропагатор $G(p)$ с учетом взаимодействия (одетый пропагатор), необходимо решить уравнение Дайсона–Швингера:

$$G(p) = G_0 + G\Sigma G_0, \tag{1}$$

где G_0 – затравочный пропагатор, а Σ – собственно-энергетический вклад.

Перепишем уравнение (1), разложив по базису проекционных операторов:

$$G = \sum_{M=1}^{2} P^{M} G^{M}, \tag{2}$$

где $P_1 = \Lambda^{+}$, $P_2 = \Lambda^{-}$.

В этом базисе уравнение Дайсона–Швингера сводится к уравнениям на числовые коэффициенты:

$$G^{M} = G_0^{M} + G^{M}\Sigma^{M}G_0^{M}, \quad M = 1, 2 \tag{3}$$

или эквивалентно $$\left(G^{-1}\right)^{M} = \left(G_0^{-1}\right)^{M} - \Sigma^{M}. \tag{4}$$

Совместное одевание двух фермионов разной четности

Рассмотрим совместное одевание двух фермионов разной четности $1/2^{\pm}$. Уравнение Дайсона—Швингера имеет матричный вид, базис проекционных операторов будет состоять из четырех компонент:

$$P_1 = \Lambda^{+},\ P_2 = \Lambda^{-},\ P_3 = \Lambda^{+}\gamma^{5},\ P_4 = \Lambda^{-}\gamma^{5}.$$

$$\left(G^{M}\right)_{ij} = \left(G_0^{M}\right)_{ij} + \left(G^{M}\right)_{ik}\left(\Sigma^{M}\right)_{kl}\left(G_0^{M}\right)_{lj}, \tag{7}$$

$M = 1, 2;\ i, j, k, l = 1, 2.$

Нарушения четности в лагранжиане нет, и диагональные петли содержат только I и $\hat{p}$, а недиагональные обязательно имеют γ^5.

Поэтому разложение обратного пропагатора по базису выглядит так:

$$S(p) = P_1\begin{pmatrix} -m_1 + W - \Sigma_{11}^{1} & 0 \\ 0 & -m_2 + W - \Sigma_{22}^{1} \end{pmatrix} +$$

$$+P_2\begin{pmatrix} -m_1 + W - \Sigma_{11}^{2} & 0 \\ 0 & -m_2 - W - \Sigma_{22}^{2} \end{pmatrix} +$$

$$+P_3\begin{pmatrix} 0 & -\Sigma_{12}^{3} \\ -\Sigma_{21}^{3} & 0 \end{pmatrix} + P_4\begin{pmatrix} 0 & -\Sigma_{12}^{4} \\ -\Sigma_{21}^{4} & 0 \end{pmatrix},$$

где i, j = 1, 2 нумеруют одевающиеся фермионные состояния.

Подставляя все в решение (7), получаем матрицу одетого пропагатора:

$$G = \Lambda^{+}\begin{pmatrix} \dfrac{-m_2 - W - \Sigma_{22}^{2}}{\Delta_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{-m_1 - W - \Sigma_{11}^{2}}{\Delta_2} \end{pmatrix} +$$

$$+\Lambda^{-}\begin{pmatrix} \dfrac{-m_2 + W - \Sigma_{22}^{1}}{\Delta_2} & 0 \\ 0 & \dfrac{-m_1 + W - \Sigma_{11}^{1}}{\Delta_1} \end{pmatrix} + \qquad (8)$$

$$+\Lambda^{+}\gamma^{5}\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\Sigma_{12}^{3}}{\Delta_1} \\ -\dfrac{\Sigma_{21}^{3}}{\Delta_2} & 0 \end{pmatrix} + \Lambda^{-}\gamma^{5}\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\Sigma_{12}^{4}}{\Delta_2} \\ -\dfrac{\Sigma_{21}^{4}}{\Delta_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\Delta_1 = \left(-m_1 + W - \Sigma_{11}^{2}\right)\left(-m_2 - W - \Sigma_{22}^{2}\right) - \Sigma_{12}^{3}\Sigma_{21}^{4},$$

$$\Delta_2 = \left(-m_1 - W - \Sigma_{11}^{1}\right)\left(-m_2 + W - \Sigma_{22}^{1}\right) - \Sigma_{12}^{4}\Sigma_{21}^{3} =$$

$$= \Delta_1\left(W \to -W\right).$$

Появление в (8) операторов P_3 и P_4 свидетельствует о наличии переходов между состояниями разной четности. Они отсутствуют в случае хорошо известного смешивания состояний с одинаковой четностью [1]. Другое отличие состоит в различных свойствах знаменателей Δ_1, Δ_2.

Адронные амплитуды изоспином 1/2

Рассмотрим амплитуды с учетом двух каналов реакции πN и ηN, изоспином 1/2 [2, 3]. В этих реакциях могут рождаться барионные резонансы со спин-четностью $J^{p}=(1/2)^{\pm}$.

Амплитуда рассеяния в нашем случае имеет вид матрицы 2×2:

$$T = -\bar{u}\left(p_2\right)Ru(p_1), \qquad (9)$$

где $\bar{u}\left(p_2\right)$ и $u\left(p_1\right)$ – четырехкомпонентные спиноры (биспиноры Дирака), а R – матрица 2×2.

Воспользуемся предыдущими вычислениями полного пропагатора (8) для смешивания фермионных состояний с разной четностью. Но теперь собственно энергетическая часть имеет вклады от двух каналов реакций: πN и ηN.

Оператор между спинорами выглядит так:

$$R = \begin{pmatrix} g_{1,\pi}\gamma^{5}, & ig_{2,\pi} \\ g_{1,\eta}\gamma^{5}, & ig_{2,\pi} \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} g_{1,\pi}\gamma^{5}, & g_{1,\eta}\gamma^{5} \\ ig_{2,\pi}, & ig_{2,\eta} \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

S-волновые парциальные амплитуды с четностью $J^{p}=(1/2)^{-}$ имеют вид:

$$f_{\pi N\to\pi N} = \frac{\left(E_1 + m\right)}{8\pi W\Delta_2}\times$$

$$\times\Big[g_{1,\pi}^{2}\left(-m_2 - W - \Sigma_{22}^{1}\right) - g_{2,\pi}^{2}\left(-m_1 - W - \Sigma_{11}^{2}\right) +$$

$$+ig_{1,\pi}g_{2,\pi}\left(\Sigma_{12}^{3} + \Sigma_{12}^{4}\right)\Big],$$

$$f_{\eta N\to\eta N} = \frac{\left(E_2 + m\right)}{8\pi W\Delta_2}\times$$

$$\times\Big[g_{1,\eta}^{2}\left(-m_2 - W - \Sigma_{22}^{1}\right) - g_{2,\eta}^{2}\left(-m_1 - W - \Sigma_{11}^{2}\right) +$$

$$+ig_{1,\eta}g_{2,\eta}\left(\Sigma_{12}^{3} + \Sigma_{12}^{4}\right)\Big],$$

$$f_{\pi N\to\eta N} = \frac{\sqrt{\left(E_1 + m\right)\left(E_2 + m\right)}}{8\pi W\Delta_2}\times$$

$$\times\Big[g_{1,\pi}g_{1,\eta}\left(-m_2 - W - \Sigma_{22}^{1}\right) - g_{2,\pi}g_{2,\eta}\left(-m_1 - W - \Sigma_{11}^{2}\right) +$$

$$+ig_{1,\pi}g_{2,\eta}\left(\Sigma_{12}^{2} + \Sigma_{12}^{4}\right)\Big],$$

$$f_{S,+}(\pi N \to \eta N) = f_{S,+}(\eta N \to \pi N). \qquad (11)$$

P-волновые парциальные амплитуды с четностью $J^{p}=(1/2)^{+}$, соответственно, выглядят так:

$$f_{\pi N\to\pi N} = \frac{\left(E_1 - m\right)}{8\pi W\Delta_1}\times$$

$$\times\Big[g_{1,\pi}^{2}\left(-m_2 + W - \Sigma_{22}^{2}\right) - g_{2,\pi}^{2}\left(-m_1 + W - \Sigma_{11}^{1}\right) +$$

$$+ig_{1,\pi}g_{2,\pi}\left(\Sigma_{12}^{4} + \Sigma_{12}^{3}\right)\Big],$$

$$f_{\eta N\to\eta N} = \frac{\left(E_2 - m\right)}{8\pi W\Delta_1}\times$$

$$\times\Big[g_{1,\eta}^{2}\left(-m_2 + W - \Sigma_{22}^{2}\right) - g_{2,\eta}^{2}\left(-m_1 + W - \Sigma_{11}^{1}\right) +$$

$$+ig_{1,\eta}g_{2,\eta}\left(\Sigma_{12}^{4} + \Sigma_{12}^{3}\right)\Big],$$

$$f_{\pi N\to\eta N} = \frac{\sqrt{\left(E_1 - m\right)\left(E_2 - m\right)}}{8\pi W\Delta_1}\times$$

$$\times\Big[g_{1,\pi}g_{1,\eta}\left(-m_2 + W - \Sigma_{22}^{2}\right) - g_{2,\pi}g_{2,\eta}\left(-m_1 + W - \Sigma_{11}^{1}\right) +$$

$$+ig_{1,\pi}g_{2,\eta}\left(\Sigma_{12}^{4} + \Sigma_{12}^{3}\right)\Big],$$

$$f_{\pi N\to\eta N} = f_{p,-}\left(\eta N \to \pi N\right), \qquad (12)$$

где E_1 и E_2 – энергия нуклона в состоянии πN и ηN соответственно.

Условие унитарности для парциальных волн [2, 3] в случае двух каналов выглядит так:

$$\operatorname{Im} f_{\pi\pi} = p_{\pi}\left|f_{\pi\pi}\right|^{2} + p_{\eta}\left|f_{\pi\eta}\right|^{2}. \qquad (13)$$

Построенные нами парциальные амплитуды удовлетворяют условию унитарности.

Сравнение с *K*-матрицей

Классическое определение K-матрицы [4] вытекает из матрицы амплитуды, которая представляется в виде

$$T=K(I-CK)^{-1}. \qquad (14)$$

Получим явный вид K-матрицы для случая двух каналов πN и ηN. Приведем нашу амплитуду рассеяния к подобному виду. Для удобства рассмотрения возьмем построенную нами амплитуду рассеяния (9) и перепишем ее в более удобном для рассмотрения виде:

$$T^{-1} = K^{-1} + \frac{1}{8\pi W}\begin{pmatrix} \dfrac{\Sigma_\pi}{E_1+m} & 0 \\ 0 & \dfrac{\Sigma_\eta}{E_2+m} \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

Получим вид K-матрицы:

$$K = \frac{-1}{8\pi W}\begin{pmatrix} \sqrt{E_1+m} & 0 \\ 0 & \sqrt{E_2+m} \end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} \dfrac{g_{1,\pi}^2}{W+m_1}+\dfrac{g_{2,\pi}^2}{W-m_2} & \dfrac{g_{2,\pi}g_{2,\eta}}{W-m_2}+\dfrac{g_{1,\pi}g_{1,\eta}}{W+m_1} \\ \dfrac{g_{1,\pi}g_{1,\eta}}{W+m_1}+\dfrac{g_{2,\pi}g_{2,\eta}}{W-m_2} & \dfrac{g_{1,\eta}^2}{W+m_1}+\dfrac{g_{2,\eta}^2}{W-m_2} \end{pmatrix}\times \qquad (16)$$
$$\times\begin{pmatrix} \sqrt{E_1+m} & 0 \\ 0 & \sqrt{E_2+m} \end{pmatrix}.$$

Сравним полученную нами K-матрицу с классической, которая обычно имеет полюсной вид:

$$K = \begin{pmatrix} \dfrac{g_{1,\pi}^2}{W-m_1}+\dfrac{g_{2,\pi}^2}{W-m_2} & \dfrac{g_{2,\pi}g_{2,\eta}}{W-m_2}+\dfrac{g_{1,\pi}g_{1,\eta}}{W-m_1} \\ \dfrac{g_{1,\pi}g_{1,\eta}}{W+m_1}+\dfrac{g_{2,\pi}g_{2,\eta}}{W-m_2} & \dfrac{g_{1,\eta}^2}{W-m_1}+\dfrac{g_{2,\eta}^2}{W-m_2} \end{pmatrix}. \qquad (17)$$

По сравнению с классической K-матрицей [4, 5], у нас появился полюс с отрицательной энергией $\dfrac{1}{W+m_1}$ и дополнительные факторы $(E_\pi+m)$, $(E_\eta+m)$ и $\sqrt{(E_\pi+m)(E_\eta+m)}$. Вместо импульсов у нас стоят петли, мнимая часть которых с учетом фактора и есть импульс. Применение K-матрицы очень удобно при рассмотрении унитарности. Как мы уже говорили,

$$T^{-1}=K^{-1} - C. \qquad (18)$$

Вследствие того, что K-матрица – вещественная величина [4]:

$$\operatorname{Im} T^{-1} = -\operatorname{Im} C = -\begin{pmatrix} p_\pi & 0 \\ 0 & p_\eta \end{pmatrix}. \qquad (20)$$

Заключение

Рассмотренный нами эффект может быть полезен при интерпретации экспериментальных данных по рождению барионных резонансов спина 1/2 и 3/2. Напомним, что до сих пор существуют противоречия между свойствами наблюдаемых барионных резонансов и предсказаниями кварковых моделей (см., например, [5]).

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 гг.)» (проект РНП.2.2.1.1/1483, 2.1.1/1539).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калошин А.Е., Ломов В.П., Поле Рариты–Швингера: процедура одевания и спин-четность компонент // Ядерная физика. 2006. Т. 69, № 3. С. 1–11.
2. Газиорович С. Физика элементарных частиц М.: Наука, 1969. 747 с.
3. Ширков Д.В., Серебряков В.В., Мещеряков В.А. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях. М.: Наука, 1967. 324 с.
4. Arndt R., Workman R. Resonance parameters from K-matrix and T-matrix poles // Phys. Rev. 2009. C. 79. P. 038201.
5. Workman R. Single-channel fits and K-matrix constraints // Phys. Rev. Series C. 2006. V. 74, N 5. P. 055207–055210.
6. Capstick S., Roberts W. Quark Model of Baryon Masses and Decays // Prog. Part. Nucl. Phys. 2000. V. 45. P. 241–331.

Иркутский государственный университет, Иркутск