УДК 530.145, 539.12

АЛГЕБРА ГРУППЫ SO(2,1) И ОПЕРАТОРЫ ПРИЦЕЛЬНОГО ПАРАМЕТРА В СИСТЕМЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ЗАРЯДОВ

С.Э. Коренблит, Ли Ки Ын

THE SO(2,1)-GROUP ALGEBRA AND IMPACT PARAMETER OPERATORS FOR THE CHARGE-MONOPOLE SYSTEM

S.E. Korenblit, Kieun Lee

В задаче рассеяния заряда на магнитном монополе найден асимптотически сохраняющийся оператор квадрата прицельного параметра как оператор Казимира на группе SO(2,1) и исследованы свойства его решений.

The asymptotically conserved operator of squared impact parameter as the Casimir operator on the SO (2,1) group is found in the problem of charge scattering on magnetic monopole, and properties of its solution are examined.

1. Введение

В работах [1, 2] на основе сохранения прицельного параметра для свободного движения с квантовым оператором прицельного параметра была связана нетривиальная алгебра группы симметрии SO(2,1). Ее представления позволили классифицировать состояния с определенным прицельным параметром (пространственным параметром вылета) при произвольных углах рассеяния и по-новому описать пространственную структуру области взаимодействия в реакциях столкновения элементарных частиц.

В данной работе предпринята попытка поиска и реализации аналогичной асимптотической симметрии в квантовой задаче рассеяния точечного электрического заряда e массой m в точке $\mathbf{x}=r\mathbf{n}$ на неподвижном тяжелом монополе с магнитным зарядом g. В соответсвующем классическом случае абсолютная величина начального прицельного параметра сохраняется в процессе рассеяния, так же как и при свободном движении по прямой [3–5]. Основное ее отличие от свободного случая состоит в наличии у этой системы дополнительного собственного неустранимого момента количества движения $\mathbf{M}=-Q\mathbf{n}$ совместного электромагнитного поля (ЭМП) заряда и монополя, квантование которого связанно с условием квантования Дирака [3, 4]:

$$(\mathbf{M}\cdot\mathbf{n})=-Q\leftrightarrow(\mathbf{S}\cdot\mathbf{n})\leftrightarrow(J\cdot\mathbf{n}),$$
$$(\mathbf{S}\cdot\mathbf{n})\mapsto\hbar\mu,\ 2\mu=N=0,\pm1,\pm2,\ldots,\tag{1}$$

где $\mathbf{S}$, $\boldsymbol{J}$ – операторы эффективного спинового момента ЭМП и полного момента количества движения соответственно [3, 4].

Из найденного в работе [5] решения классической задачи для произвольных начальных условий t_0, $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{V}_0$ при сохраняющихся значениях классического полного момента $\mathbf{J}$ и абсолютных величин орбитального момента $|\mathbf{N}|$ и скорости $V=V_0$:

$$\mathbf{n}(t)-\mathbf{n}_0=\frac{\sin\left(\upsilon(\psi(t)-\psi_0)\right)}{\upsilon}\left(\frac{\mathbf{v}_0-\mathbf{n}_0\sin\psi_0}{\cos\psi_0}\right)-2\sin^2\frac{\left(\upsilon(\psi(t)-\psi_0)\right)}{2}\left(\mathbf{n}_0+\frac{\sigma}{\upsilon^2\mathrm{b}}\mathbf{J}\right);\tag{2}$$

$$\psi(t)=\frac{\xi(t)}{V_0b},\ r(t)=\frac{\mathrm{b}}{\cos\psi(t)},\ \sigma=\frac{|Q|}{mV_0|\mathbf{N}|},\ Q=\frac{eg}{c},$$
$$\upsilon=\frac{|\mathbf{J}|}{|\mathbf{N}|},\ \mathrm{b}=\frac{|\mathbf{N}|}{mV_0};\tag{3}$$

$$\xi(t)=V_0^2(t-t_0)+(\mathbf{x_0}\cdot\mathbf{V_0}),\ \boldsymbol{V}(t)=V\mathbf{v},\ \mathbf{x}=r\mathbf{n},$$
$$\mathbf{n}^2=\mathbf{v}^2=1\tag{4}$$

следует, что единичный вектор $\mathbf{n}(t)$ достаточно быстро стремится к своим асимптотическим предельным значениям $\mathbf{n}(\pm\infty)=\pm\boldsymbol{v}(\pm\infty)$: $|\mathbf{n}(t)-\mathbf{n}(\pm\infty)|\propto b/r(t)$ при $t\to\pm\infty$. Поэтому угол рассеяния частицы Θ может быть с успехом определен скалярными произведениями единичных векторов как в импульсном, так и в координатном пространстве, при

$$\mathbf{n}=(\sin\beta\cos\alpha,\ \sin\beta\sin\alpha,\ \cos\beta),$$
$$\mathbf{v}=(\sin\eta\cos\varphi,\ \sin\eta\sin\varphi,\ \cos\eta);\tag{5}$$
$$\cos\Theta=(\mathbf{v}(\infty)\cdot\mathbf{v}(-\infty))=-(\mathbf{n}(\infty)\cdot\mathbf{n}(-\infty)).\tag{6}$$

2. Операторы типа прицельного параметра

Квантовые операторы $\tilde{\Omega}_i$ типа прицельного параметра [1, 2] возникают при эрмитизации векторных операторов $\Omega_i=\varepsilon_{ijk}\nu_jJ_k$, построенных с помощью оператора момента импульса $\boldsymbol{J}$ и произвольного эрмитового векторного оператора $\boldsymbol{\nu}$, для которых

$$\left(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{J}\right)=i\hbar\boldsymbol{J},\ \mathbf{v}^\dagger=\mathbf{v},\ [\nu_i,\nu_j]=0,$$
$$[J_i,\nu_j]=i\hbar\varepsilon_{ijk}\nu_k,\tag{7}$$

откуда: $\tilde{\Omega}_i=\varepsilon_{ijk}\nu_jJ_k-i\hbar\nu_i=\frac{1}{2i\hbar}\left[\boldsymbol{J}^2,\nu_i\right],$

$$\left(\boldsymbol{J}\cdot\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\right)\equiv0;\tag{8}$$

$$[\tilde{\Omega}_i,\nu_j]=i\hbar(\mathbf{v}^2\delta_{ij}-\nu_i\nu_j),\ (\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\cdot\mathbf{v})=i\hbar\mathbf{v}^2,$$
$$[(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{J}),\mathbf{v}]=0,\tag{9}$$

$$[J_i,\tilde{\Omega}_j]=i\hbar\varepsilon_{ijk}\tilde{\Omega}_k,\ [\tilde{\Omega}_i,\tilde{\Omega}_j]=-i\hbar\mathbf{v}^2\varepsilon_{ijk}J_k,$$
$$[(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{J}),\boldsymbol{J}]=0,\tag{10}$$

что при $\boldsymbol{v}^2=1$ приводит к алгебре SO(2,1) для операторов $\tilde{\Omega}_1$, $\tilde{\Omega}_2$, J_3:

$$[\tilde{\Omega}_1,\tilde{\Omega}_2]=-i\hbar J_3,\ [J_3,\tilde{\Omega}_1]=i\hbar\tilde{\Omega}_2,$$
$$[J_3,\tilde{\Omega}_2]=-i\hbar\tilde{\Omega}_1\tag{11}$$

с оператором Казимира вида:

$$K_{\Omega} = \tilde{\Omega}_1^2 + \tilde{\Omega}_2^2 - J_3^2 = \nu_3^2 \boldsymbol{J}^2 + 2i\hbar \nu_3 \tilde{\Omega}_3 - 2J_3 \nu_3 (\boldsymbol{J} \cdot \mathbf{v}). \quad (12)$$

Последнее равенство в (8), (15) отвечает классической ортогональности момента $\boldsymbol{J}$ к плоскости рассеяния, содержащей вектор $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$.

Поскольку в теории рассеяния [6] $\widehat{S}$ -матрица коммутирует со свободным гамильтонианом $2mH=\mathbf{p}^2$, $\left[\widehat{S}, H_0\right] = 0$, достаточно определить соответствующий асимптотический оператор со свойствами (11), (12). Рассмотрим сперва непосредственный аналог оператора из работы [1]. Выбирая в качестве $\boldsymbol{\nu}$ вектор вида (5), для выполнения коммутационных соотношений (7) необходимо в (8)–(12) взять спиновую реализацию оператора полного момента [3, 4], полагая что:

$$\mathbf{L} = (\mathbf{x} \times \mathbf{p}), \ \mathbf{p} = \mathbf{v}\mathrm{p}, \ \mathrm{p} = |\mathbf{p}|, \ [\mathrm{p}_i, \mathbf{S}] = 0. \quad (13)$$

$$\text{Тогда } \boldsymbol{J} \mapsto \boldsymbol{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}, \ \tilde{\boldsymbol{\Omega}} = (\mathbf{v} \times \boldsymbol{J}) - i\hbar \mathbf{v}, \quad (14)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}^2 = \boldsymbol{J}^2 - (\boldsymbol{J} \cdot \mathbf{v})^2 - (i\hbar)^2, \ \left(\boldsymbol{J} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Omega}}\right) \equiv 0. \quad (15)$$

Поскольку оператор $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ тогда асимптотически сохраняется $[\tilde{\Omega}_i, \mathbf{p}^2] = 0$, $[K_{\Omega}, \mathbf{p}^2] = 0$ и асимптотические условия классической и квантовой задачи совпадают при $r \to \infty$, $t \to \pm\infty$:

$$\mathbf{v} \mapsto \pm \mathbf{n},$$

$$(\boldsymbol{J} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}) \mapsto \pm(\boldsymbol{J} \cdot \mathbf{n}) = \pm(\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \Rightarrow \pm\hbar\mu, \quad (16)$$

этого достаточно для определения спиральных квантовых чисел μ волновых функций начального и конечного асимптотических состояний рассеяния. По той же причине компоненты $\tilde{\mathrm{w}}_i$ оператора $\tilde{\mathbf{w}} = (\mathbf{n} \times \boldsymbol{J}) - i\hbar \mathbf{n} \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ и порожденная ими и J_3 алгебра SO(2,1), с соответствующим оператором Казимира $K_{\mathrm{w}} = \tilde{\mathrm{w}}_1^2 + \tilde{\mathrm{w}}_2^2 - \mathrm{J}_3^2$ асимптотически неотличимы от алгебры (11) и оператора Казимира K_{Ω} (12) с вектором $\boldsymbol{\nu}$ (5) из (13):

$$K_{\Omega} \Rightarrow K_{\mathrm{w}}, \text{ при: } \mathbf{v} \to \pm \mathbf{n}. \quad (17)$$

Очевидно, что в случае **S**=0 дуальность дифференциального выражения оператора $\mathbf{L} = (\mathbf{x} \times \mathbf{p})$ в **x-** и **p**-пространствах приводит асимптотический оператор Казимира (17) к виду из работы [1].

Поэтому дифференциальную реализацию асимтотического оператора прицельного параметра K_{Ω} (12) можно построить, выбрав в (8) векторный оператор **n**(β, α) из (5) вместо вектора $\boldsymbol{\nu}$ из (13) и «струнное» представление [4] оператора полного момента $\boldsymbol{J}$:

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), \ \boldsymbol{J} = (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\pi}) - Q\mathbf{n},$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = (\mathbf{n} \times \boldsymbol{J}) - i\hbar \mathbf{n}. \quad (18)$$

Как показано в работе [8], при замене –Q в (1) матричным спиновым оператором $-Q \leftrightarrow (\mathbf{S}\cdot\mathbf{n})$ из [3], дифференциальным оператором $-Q \leftrightarrow (\boldsymbol{J}\cdot\mathbf{n}) = -i\hbar\partial/\partial\gamma$ и выборе $\mathbf{A}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ в виде швингеровской струны [4], это выражение для $\boldsymbol{J}$ в терминах углов Эйлера α, β, γ в точности совпадает с оператором полного углового момента импульса [7] для вращающегося протяженного (твердого) тела – волчка. Такое изменение интерпретации ротационных свойств зарядово-монопольной «молекулы» [8] снимает швингровское ограничение [4] в условии квантования (1) и позволяет определить операторы $\tilde{\omega}_i$ и соответствующий оператор Казимира в явной дифференциальной форме:

$$\tilde{\omega}_1 = i\hbar \left\{ \cos\alpha \cos\beta \frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \frac{\partial}{\partial\alpha} - \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha \,\mathrm{ctg}\beta \frac{\partial}{\partial\gamma} \right\}, \quad (19)$$

$$\tilde{\omega}_2 = i\hbar \left\{ \cos\alpha \cos\beta \frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} \frac{\partial}{\partial\alpha} - \sin\beta\sin\alpha\text{-}\cos\alpha \,\mathrm{ctg}\beta \frac{\partial}{\partial\gamma} \right\}; \quad (20)$$

$$\tilde{\omega}_3 = i\hbar \left\{ \sin\beta \frac{\partial}{\partial\beta} + \cos\beta \right\}, \ J_3 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\alpha}, \quad (21)$$

$$K_{\omega} = \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2 - J_3^2, \quad (22)$$

$$K_{\omega} \frac{1}{n_3} = \frac{1}{n_3}\left(n_3^2 \boldsymbol{J}^2 - 2\left(\boldsymbol{J} \cdot \mathbf{n}\right) J_3 n_3\right) = \frac{(i\hbar)^2}{\cos\beta} \times$$
$$\times \left\{ \cos\beta \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + \frac{\cos^3\beta}{\sin\beta} \frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta} \left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{2}{\cos\beta} \frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{\partial}{\partial\gamma} + \frac{\partial^2}{\partial\gamma^2} \right) \right\}. \quad (23)$$

Выбирая K_{ω}, J_3, $(\boldsymbol{J}\cdot\mathbf{n})$ в качестве полной системы коммутирующих операторов, характеризующих состояния заряда, рассеиваемого на магнитном монополе, имеем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$K_{\omega} |\Xi\rangle = \hbar^2 \mathrm{b}^2 |\Xi\rangle, \ J_3 |\Xi\rangle = \hbar m |\Xi\rangle,$$
$$(\boldsymbol{J} \cdot \mathbf{n}) |\Xi\rangle = \hbar\mu |\Xi\rangle, \quad (24)$$

решение которой, при $\hbar \mapsto 1$, $\cos\beta = c = 1/x$, будем искать аналогично [1] и [7] в виде

$$\langle \alpha\beta\gamma | \Xi \rangle = \Xi_{\mathrm{b}}(\alpha\beta\gamma) = \frac{1}{\cos\beta} e^{im\alpha} e^{i\mu\gamma} f_{\mathrm{b}}\left(\frac{1}{\cos\beta}\right), \quad (25)$$

откуда:

$$\cos\beta K_{\omega} \Xi_{\mathrm{b}}(\alpha\beta\gamma) = c K_{\omega} \frac{1}{c} e^{im\alpha} e^{i\mu\gamma} f_{\mathrm{b}}\left(\frac{1}{c}\right) = \mathrm{b}^2 e^{im\alpha} e^{i\mu\gamma} f_{\mathrm{b}}(x), \quad (26)$$

$$\left[-\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 1)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{(m-\mu)^2}{x-1} - \frac{(m+\mu)^2}{x+1} \right) \right] \times$$
$$\times f_{\mathrm{b}}(x) = \mathrm{b}^2 f_{\mathrm{b}}(x). \quad (27)$$

Согласно [9], это дифференциальное уравнение для функций Якоби $B^l_{m\mu}(x)$, реализующих, при $-\mathrm{b}^2 = l(l+1)$, χ=(*l*, ε), $1<x<\infty$, различные серии унитарных представлений матричных элементов группы SO(2,1), $f_{\mathrm{b}}(x) = B^l_{m\mu}(x)$: при $l = -\frac{1}{2} + i\rho$, $\rho = \sqrt{\mathrm{b}^2 - \frac{1}{4}}$, ε=0, 1/2 – основные серии; при $0<l<1$, ε=0 – дополнительная серия; при *l*±ε= целое – дискретная серия.

Для любых *x*, *l* и одновременно целых или полуцелых m, μ, ε [9] (см. (45) ниже)

$$B^{l}_{m\mu}(x)=\frac{\xi_{m\mu}(x)}{(|\mu-m|)!}\frac{\Gamma(l+|\mu|+1)\Gamma(l-|\mu|+1)}{\Gamma(l+N+1)\Gamma(l-M+1)}\times$$
$$\times F\left(M+l+1,M-l;|\mu-m|+1;\frac{1-x}{2}\right), \quad (28)$$

где: $M\equiv \max\{|m|,|\mu|\}$, $N\equiv\min\{|m|,|\mu|\}$, $F(a,\ b,\ c)$ – гипергеометрическая функция,

$B^{l}_{m\mu}(1)=\delta_{m,\mu}$, $B^{l}_{00}(x)=F\left(l+1,-l;1;\dfrac{1-x}{2}\right)=P_l(x)$ – функция Лежандра. (29)

3. Разложение на группе SO(2,1)

В случае магнитного монополя асимптотические условия (16) $(\boldsymbol{J}\cdot\mathbf{v})=\pm\hbar\mu$ оставляют, очевидно, только основные серии унитарных представлений SO(2,1) [9]. При ε=0 это первая основная серия, при ε=1/2 – вторая основная серия. Тогда для любой функции $F(x)\in L^2$ [9]

$$F(x)=\int_0^\infty a(\rho)B^{-\frac{1}{2}+i\rho}_{-\mu\mu}(x)\rho\,\mathrm{th}\pi(\rho+i\varepsilon)d\rho,$$

$$a(\rho)=\int_1^\infty F(x)B^{-\frac{1}{2}-i\rho}_{-\mu\mu}(x)dx; \quad (30)$$

$$\int_1^\infty|F(x)|^2\,dx=\int_0^\infty|a(\rho)|^2\,\rho\,\mathrm{th}\pi(\rho+i\varepsilon)d\rho. \quad (31)$$

Соотношение ортогональности для функций Якоби из основной серии имеет вид [9]:

$$\int_1^\infty B^{-\frac{1}{2}+i\rho}_{m\mu}(x)B^{-\frac{1}{2}-i\zeta}_{m\mu}(x)dx=\rho\,\mathrm{th}\pi(\rho+i\varepsilon)\delta(\rho-\zeta). \quad (32)$$

Для индексов противоположного знака они образуют также и полную систему функций [9]:

$$\int_0^\infty B^{-\frac{1}{2}+i\rho}_{-\mu\mu}(x)B^{-\frac{1}{2}-i\rho}_{-\mu\mu}(y)\rho\,\mathrm{th}\pi(\rho+i\varepsilon)d\rho=\delta(x-y), \quad (33)$$

что существенно упрощает (см. ниже) разложение по ним амплитуды рассеяния, по сравнению с общим случаем произвольных значений спиральности начального и конечного состояний.

4. Волновая функция и амплитуда рассеяния

Операторы $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ и $\tilde{\mathbf{w}}$ оказываются, так же как и операторы полного момента, связаны между собой операцией спинового вращения [3, 4, 8], при $\mathbf{S}=\mathbf{S}_a+\mathbf{S}_b$, $[\mathbf{S}a,\mathbf{S}b]=0$, вокруг вектора $\mathbf{e}_{(\alpha)}$:

$$\mathbf{e}_{(\alpha)}=-\mathbf{e}_1\sin\alpha+\mathbf{e}_2\cos\alpha, \quad (34)$$

$$U=\exp\left(i(\mathbf{S}_a\cdot\mathbf{e}_{(\alpha)})\beta\right)\exp\left(i(\mathbf{S}_b\cdot\mathbf{e}_{(\alpha)})(\beta-\pi)\right);$$

$$U\boldsymbol{J}U^{-1}=\boldsymbol{J},\ U\tilde{\mathbf{w}}U^{-1}=\tilde{\boldsymbol{\Omega}}, \quad (35)$$

что дает соответствующую связь для операторов Казимира (17), (22) $UK_{\mathrm{w}}U^{-1}=K_\omega$ и собственных функций этих операторов:

$$K_\Omega U^{-1}\Xi_{\mathrm{b}}(\alpha\beta\gamma)\underset{r\to\infty}{\Rightarrow}K_{\mathrm{w}}U^{-1}\Xi_{\mathrm{b}}(\alpha\beta\gamma)=$$
$$=U^{-1}K_\omega\Xi_{\mathrm{b}}(\alpha\beta\gamma)=\mathrm{b}^2U^{-1}\Xi_{\mathrm{b}}(\alpha\beta\gamma). \quad (36)$$

Согласно [3, 4], волновые функции и амплитуда рассеяния F заряда на монополе в различных представлениях оператора полного момента связаны соотношениями

$$\Phi^{(+)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})=U^{-1}\hat{\Psi}^{(+)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}),\ \hat{\Psi}^{(+)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})=\chi_a^{\mu/2}\chi_b^{-\mu/2}\Psi^{(+)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}); \quad (37)$$

где: $U(\mathbf{S}_{a,b}\cdot\mathbf{n})U^{-1}=\pm(\mathbf{S}_{a,b})_3$, при: $(\mathbf{S}_a-\mathbf{S}_b)'_3=-Q$,

$$(\mathbf{S}_{a,b})_3\chi^{\mu/2}_{a,b}=\frac{\mu}{2}\chi^{\mu/2}_{a,b}. \quad (38)$$

$$\Psi^{(+)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})=\sum_{j=|\mu|}^{\infty}(2j+1)e^{i\pi j}e^{-i\pi\ell/2}\,\mathrm{j}_\ell(kr)e^{-2i\mu\alpha}d^{j}_{-\mu\mu}(\cos\beta),$$

$$\ell+\frac{1}{2}=\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)^2-\mu^2\right]^{1/2}; \quad (39)$$

$$\Psi^{(+)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\to e^{-2i\mu\alpha}\left[e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+F(k^2,\cos\beta)\frac{e^{ikr}}{r}\right],\ r\to\infty; \quad (40)$$

$$2ikF(k^2,\cos\beta)=\sum_{j=|\mu|}^{\infty}(2j+1)e^{-i\pi(\ell-j)}d^{j}_{-\mu\mu}(\cos\beta). \quad (41)$$

При использовании в (39) вращательных собственных функций симметричного волчка [7] множитель $e^{-2i\mu\alpha}$ в (40), деформирующий также и падающую плоскую волну [4], заменяется на $e^{i\mu(\gamma-\alpha)}$ [8]. Однако эта общая фаза волновой функции, зависящая от угла γ, при фиксированном μ уже не несет физического смысла и не влияет ни на одночастичную интерпретацию волновой функции (39), ни на амплитуду рассеяния (41) [8], поскольку направление вектора **n** (5) определяется лишь двумя углами Эйлера α и β, где угол рассеяния (6) Θ=β. Тогда аналогично [1], [2], при c=cosβ, имеем для нее разложение по функциям Якоби отдельно для $c>0$ и $c<0$, с профильной функцией $f^{\pm}_{\mu}(k^2,\rho)$ соответственно:

$$F^{\pm}(k^2,c)=F(k^2,\pm c)=$$
$$=\int_0^\infty f^{\pm}_{\mu}(k^2,\rho)\frac{1}{c}B^{-\frac{1}{2}+i\rho}_{-\mu\mu}\left(\frac{1}{c}\right)\rho\,\mathrm{th}\pi(\rho+i\varepsilon)d\rho; \quad (42)$$

$$f^{\pm}_{\mu}(k^2,\rho)=\int_0^1\frac{dc}{c}F^{\pm}(k^2,c)B^{-\frac{1}{2}-i\rho}_{-\mu\mu}\left(\frac{1}{c}\right)=$$
$$=\frac{1}{2ik}\sum_{j=|\mu|}^{\infty}(2j+1)e^{-i\pi(\ell-j)}Z^{\pm}_{\mu}(j,\rho); \quad (43)$$

$$Z^{\pm}_{\mu}(j,\rho)=\int_1^\infty\frac{dx}{x}d^{j}_{-\mu\mu}\left(\pm\frac{1}{x}\right)B^{-\frac{1}{2}-i\rho}_{-\mu\mu}(x). \quad (44)$$

Как видим, возникающий тип ε основной серии представлений группы SO(2,1) непосредственно связан с условием квантования произведения зарядов (3) $-Q=\hbar\mu$ [4]: ε=0 для целых μ (Швингер); ε=1/2 для полуцелых μ (Дирак).

5. Ряды Клебша–Гордона для функций Якоби

Замечателен аналог разложения Клебша–Гордона для произведения этих функций Якоби с функциями $B^{\mu}_{\pm\mu\mu}(x)$. Как и для функций вращения [7], он может быть получен для функций Якоби с произвольным l путем индукции по m, и μ, с помощью рекурентных соотношений [9] для функции Якоби (28) и/или для гипергеометрической функции $F(a, b, c)$ [9], и также содержит только функции Лежандра. В случае $\pm m = \mu \mapsto |\mu|$, для целых или полуцелых μ имеем:

$$\xi_{m\mu}(x) = \left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{|\mu-m|}{2}} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{|\mu+m|}{2}}, \ \xi_{\mu\mu}(x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\mu},$$

$$\xi_{-\mu\mu}(x) = \left(\frac{x-1}{2}\right)^{\mu}; \tag{45}$$

$$\xi_{\pm\mu\mu}(x) B^{l}_{\pm\mu\mu}(x) = \\ = \frac{\Gamma(l+\mu+1)}{\Gamma(l-\mu+1)} \sum_{k=-\mu}^{\mu} (\pm 1)^{\mu+k} \frac{(2\mu)!}{(\mu-k)!(\mu+k)!} P_{l-k}(x) \times \\ \times \frac{\Gamma(2l+1-\mu-k)(2l-2k+1)}{\Gamma(2l+2+\mu-k)}; \tag{46}$$

$$B^{l}_{\mu\mu}(x) = \xi_{\mu\mu}(x) F\left(\mu+l+1,\ \mu-l; 1; \frac{1-x}{2}\right),$$

$$B^{\mu}_{\pm\mu\mu}(x) = \xi_{\pm\mu\mu}(x); \tag{47}$$

$$B^{l}_{-\mu\mu}(x) = \xi_{-\mu\mu}(x) \frac{\Gamma(l+\mu+1)}{(2\mu)!\Gamma(l-\mu+1)} \times \\ \times F\left(\mu+l+1, \mu-l; 2\mu+1; \frac{1-x}{2}\right), \tag{48}$$

где суммирование идет при целом μ – по целым k, а при полуцелом μ – по полуцелым k, так что $\mu \pm k$ всегда целое. Аналогично при m=0 и целых $\mu \mapsto |\mu|$

$$\xi_{0\mu}(x) P^{\mu}_{l}(x) = \xi_{0\mu}(x) \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l-\mu+1)} B^{l}_{0\mu}(x) = \\ = \frac{\Gamma(l+\mu+1)}{\Gamma(l-\mu+1)} \sum_{k=-\mu/2}^{\mu/2} \frac{(-1)^{k+\mu/2}}{2^{2\mu+1}} \times \tag{49}$$

$$\times \frac{\mu!}{\left(\frac{\mu}{2}-k\right)!\left(\frac{\mu}{2}+k\right)!} P_{l-2k}(x) \frac{\Gamma\left(l+\frac{1-\mu}{2}-k\right)(2l-4k+1)}{\Gamma\left(l+1+\frac{1+\mu}{2}-k\right)},$$

$$\xi_{0\mu}(x) = \left(\frac{x^2-1}{2}\right)^{\mu/2}; \tag{50}$$

$$P^{\mu}_{l}(x) = \xi_{0\mu}(x) \frac{\Gamma(l+\mu+1)}{\mu!\Gamma(l-\mu+1)} F\left(\mu+l+1, \mu-l; \mu+1; \frac{1-x}{2}\right), \tag{51}$$

где суммирование идет при четном μ по целым k, а при нечетном μ – по полуцелым k.

Авторы признательны проф. А.Н. Валлу, а также С.В. Ловцову и А.Э. Растегину за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант N 09-02-00749) и аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 гг.)» (проект РНП.2.2.1.1/ /1483, 2.1.1/1539).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Валл А.Н., Макеев Н.А. Группа прицельного параметра и ее реализация // Ядерная физика, 1978. Т. 27, Вып. 2. С. 558.

2. Валл А.Н., Владимиров А.А., Перевалова И.А., Солдатенко О.Н. // ЭЧАЯ. 2009. Т. 40, № 7. С. 1.

3. Goldhaber A.S. // Phys. Rev. 1966. V. 140, N. 5B. P. 1407.

4. Milton K.A. // Rep. Prog. Phys. 2006. V. 69, N 6. P. 1637. [arXiv:hep-ex/0602040 v1]

5. Коренблит С.Э., Ли Ки Ын // Труды X Конференции молодых ученых «Современные проблемы в астрофизике и физике космической плазмы», Ред. д.ф.-м.н. В.И. Куркин. ИСЗФ, СО РАН. 2007. С. 294.

6. Сунакава С. Квантовая теория рассеяния. М: Мир, 1979. 268 с.

7. Биденхарн Л.К., Лаук Д.Д. Угловой момент в квантовой физике. М.: Мир, 1984. Т. 1, 2. 302 с.

8. Коренблит С.Э., Ли Ки Ын // Изв. вузов, Физика. 2010 (в печати) [arXiv:hep-th/0907.3299 v2]

9. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965. 588 с.

Иркутский государственный университет, физический факультет, Иркутск