УДК 539.12, 537.8

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО ПАРАМЕТРУ ВЫЛЕТА ПРИ РАССЕЯНИИ ЭЛЕКТРОНА НА АТОМЕ ВОДОРОДА

А.Н. Валл, А.К. Едемская, И.А. Перевалова, О.Н. Солдатенко, А.А. Владимиров

ESCAPE PARAMETER DISTRIBUTION IN ELECTRON SCATTERING BY HYDROGEN ATOM

A.N. Vall, A.K. Edemskaya, I.A. Perevalova, O.N. Soldatenko, A.A. Vladimirov

В работе получена амплитуда перехода частицы из состояния с определенным импульсом в состояние с определенным параметром вылета μ во внешнем поле. Эта амплитуда позволяет построить соответствующее распределение и связать его с дифференциальным сечением рождения частицы в интервале углов. Построенный формализм применяется для процесса рассеяния электрона на нейтральном атоме, что позволяет связать динамические характеристики форм-фактора и пространственные характеристики области рождения рассеянной частицы.

The amplitude of particle transition from the state with the defined momentum to the state with the defined emission parameter μ in the external field has been obtained. This amplitude allows us to construct the corresponding distribution and to relate it with the differential cross section of a particle creation in the range of angles. The constructed formalism is applied to the process of electron scattering by neutral atom. This allows relating the form factor dynamic characteristics with spatial characteristics of the scattered particle production area.

1. Вычисление функции распределения $\rho^{(\varepsilon)}(b)$ для процесса рассеяния электрона на сложном атоме

Рассмотрим водородоподобный атом с z-протонами. Плотность распределения заряда в такой системе $\rho(\vec{x}) = -ze\delta(\vec{x}) + e\rho_{el}(\vec{x})$, где $\rho_{el}(\vec{x})$ – плотность электронного облака:

$$\rho_{el}(\vec{x}) = |\psi(\vec{x})|^2 = \frac{z}{8\pi a^3}e^{-r/a}, \quad r = |\vec{x}|, \quad a = \frac{\hbar^2}{2me^2 z}. \qquad (1)$$

(Далее будем работать в системе $\hbar = c = 1$).

Здесь $|\psi(\vec{x})|$ – волновая функция электрона в основном состоянии (процессами возбуждения атома и тормозным излучением будем пренебрегать). При этом выполняется условие нормировки

$$\int \rho_{el}(\vec{x})d\vec{x} = 1.$$

Отсюда амплитуда рассеяния электрона в Борновском приближении при $z = 1$ равна:

$$\begin{gathered} A(\cos\theta) = A_{\text{кул}}(\cos\theta)[1 - F_A(\cos\theta)], \\ A_{\text{кул}}(\cos\theta) = \frac{-me^2}{p^2(1-\cos\theta)}, \end{gathered} \qquad (2)$$

где $F_A(\cos\theta)$ – атомный форм-фактор, равный:

$$F_A(\cos\theta) = \int e^{i\vec{K}\vec{x}}\rho_{el}(\vec{x})d\vec{x} = \frac{1}{(1+a^2K^2)^2},$$

$$K^2 = 2p^2(1-\cos\theta), \qquad (3)$$

где $\vec{K} = \vec{q} - \vec{p}$ – передача импульса. В соответствии с выше сказанным, $\vec{\rho}$ – импульс электрона в начальном состоянии, $\vec{q}$ – в конечном, $|\vec{q}| = |\vec{p}| = p$, а θ – угол рассеяния. Подставляем явный вид атомного форм-фактора в амплитуду (2), получим

$$A(\cos\theta) = \frac{-me^2}{p^2}\cdot\frac{2z_0 - 1 - \cos\theta}{(z_0 - \cos\theta)^2}, \quad z_0 = 1 + \frac{1}{2a^2p^2}. \qquad (4)$$

В терминах обозначения

$$\left\langle \vec{q}_\perp, \varepsilon\sqrt{q^2 - q_\perp^2} \,\middle|\, \hat{f} \,\middle|\, \vec{p} \right\rangle \equiv f^{(\varepsilon)}(\vec{q}_\perp, q),$$

где оператор $\hat{f}$ определяется соотношением $2\pi E_p \hat{A} = \hat{f}$, будем иметь

$$\begin{gathered} f^{(\varepsilon)}(\vec{q}_\perp, p) = A\left(\cos\theta = \varepsilon\sqrt{1 - \frac{q_\perp^2}{p^2}}\right) = \\ = \frac{-me^2}{p^2}\cdot\frac{2z_0 - 1 - \varepsilon|\cos\theta|}{(z_0 - \varepsilon|\cos\theta|)^2}. \end{gathered} \qquad (5)$$

Переходя к переменным на конусе $u_0 = \frac{1}{|\cos\theta|}$, получим

$$f^{(\varepsilon)}(\vec{q}_\perp, p) = -a(z_0 - 1)\cdot\frac{(2z_0 - 1)u_0^2 - \varepsilon u_0}{z_0^2(u_0 - \frac{\varepsilon}{z_0})^2}, \qquad (6)$$

где в соответствии с (1) использовалось соотношение $\frac{me^2}{p^2} = a(z_0 - 1)$.

Теперь вычислим амплитуду перехода из состояния с определенным импульсом в состояние с определенным параметром вылета:

$$f^{(\varepsilon)}(\vec{\mu}, p) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d\Omega_{\vec{q}}\vec{\xi}(\vec{q}_\perp, \vec{\mu}) f^{(\varepsilon)}(\vec{q}_\perp, p). \qquad (7)$$

Для вычисления этого матричного элемента воспользуемся следующим свойством функции Шапиро [5]:

$$\begin{gathered} \int_0^{2\pi} d\psi\xi(\vec{q}_\perp, \vec{\mu}) = \\ = 2\pi\frac{q}{\sqrt{q^2 - q_\perp^2}}P_{-1/2+i\mu}\left(\frac{q}{\sqrt{q^2 - q_\perp^2}}\right) = 2\pi u_0 P_{-1/2+i\mu}(u_0), \end{gathered} \qquad (8)$$

где ψ – направляющий угол вектора $\vec{\mu}$. Если амплитуда $f^{(\varepsilon)}(\vec{q}_\perp, p)$ не зависит от полярного угла вектора $\vec{q}_\perp$, соотношение (7) примет вид

$$f^{(\varepsilon)}(\vec{\mu}, p) = \frac{1}{2\pi}\int_1^\infty f^{(\varepsilon)}(\vec{q}_\perp, p) u_0 P_{-1/2+i\mu}(u_0)\frac{du_0}{u_0^2}. \quad (9)$$

Здесь использована связь $\frac{du_0}{u_0^2} = \frac{q_\perp dq_\perp}{q\sqrt{q^2 - q_\perp^2}}$.

При подстановке (6) в (9) возникают интегралы:

$$I_1 = \int_1^\infty \frac{1}{(u_0 - x)} P_{-1/2+i\mu}(u_0) du_0 = \frac{\pi}{ch(\mu\pi)} P_{-1/2+i\mu}(-x),$$

$$x = \frac{\varepsilon}{z_0}, \quad |x| < 1. \quad (10)$$

$$I_2 = \int_1^\infty \frac{1}{(u_0 - x)^2} P_{-1/2+i\mu}(u_0) du_0 =$$

$$= \frac{\pi}{ch(\mu\pi)} \frac{\partial P_{-1/2+i\mu}(-x)}{\partial x} = \frac{\pi}{ch(\mu\pi)} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} P^1_{-1/2+i\mu}(-x).$$

Получим

$$f^{(\varepsilon)}(\vec{\mu}, p) = \frac{-a(z_0 - 1)}{2\pi z_0^2}\left[(2z_0 - 1)I_1 - \frac{\varepsilon}{z_0}(z_0 - 1)I_2\right]. \quad (11)$$

Отсюда для функции распределения $\rho^{(\varepsilon)}(b)$ получим выражение

$$\rho^{(\varepsilon)}(b) = \frac{(2\pi)^3 p^2 b th(\pi\mu)}{\hbar^2 \sigma^{(\varepsilon)}}\left|f^{(\varepsilon)}(\vec{\mu}, p)\right|^2 =$$

$$= \frac{\pi(z_0 - 1)}{\sigma^{(\varepsilon)} z_0^4} b th(\pi\mu) \times$$

$$\times\left[(2z_0 - 1)^2 I_1^2 + \frac{1}{z_0^2}(z_0 - 1)^2 I_2^2 - \frac{2\varepsilon}{z_0}(2z_0 - 1)(z_0 - 1) I_1 I_2\right]. \quad (12)$$

Используя представление для сечения

$$\sigma^{(\varepsilon)} = \sum_{\varepsilon = \pm 1}\int d\Omega_{\vec{q}} \left|f^{(\varepsilon)}(\vec{q}_\perp, p)\right|^2 =$$

$$= \sum_{\varepsilon = \pm 1}\int d\Omega_{\vec{q}} d\Omega_{\vec{\mu}} \xi(\vec{q}_\perp, \vec{\mu}) f^{(\varepsilon)}(\vec{\mu}, p) f^{(\varepsilon)}(\vec{q}_\perp, p)$$ через

амплитуду $f^{(\varepsilon)}(\vec{q}_\perp, p)$ (6), получим

$$\sigma^{(\varepsilon)} = \frac{2\pi a^2 (z_0 - 1)^2}{z_0^4} \frac{z_0}{3(z_0 - \varepsilon)^3} \times$$

$$\times\left[12 z_0^3 (z_0 - 1) + 5 z_0 (2z_0 - 1) + 1 - 3 z_0 \varepsilon (6 z_0^2 - 5 z_0 + 1)\right]. \quad (13)$$

В дальнейшем наряду с функцией распределения $\rho^{(\varepsilon)}(b)$ мы будем использовать функцию распределения по параметру μ:

$$\rho^{(\varepsilon)}(\mu) = \frac{1}{\sigma^{(\varepsilon)}}\frac{d\sigma^{(\varepsilon)}}{d\mu}, \quad (14)$$

связанную с $\rho^{(\varepsilon)}(b)$ соотношением:

$$\rho^{(\varepsilon)}(\mu) = \frac{\mu\hbar^2}{p^2 b}\rho^{(\varepsilon)}(b). \quad (15)$$

$$\rho^{(\varepsilon)}(\mu) = \frac{(2\pi)^3 \mu th(\pi\mu)}{\sigma^{(\varepsilon)}}\left|f^{(\varepsilon)}(\vec{\mu}, p)\right|^2 =$$

$$= \frac{2\pi a^2 (z_0 - 1)^2}{\sigma^{(\varepsilon)} z_0^4} \mu th(\pi\mu) \times$$

$$\times\left[(2z_0 - 1)^2 I_1^2 + \frac{1}{z_0^2}(z_0 - 1)^2 I_2^2 - \frac{2\varepsilon}{z_0}(2z_0 - 1)(z_0 - 1) I_1 I_2\right]. \quad (16)$$

Таким образом, единственный параметр, который входит в $\rho^{(\varepsilon)}(b)$ $\rho^{(\varepsilon)}(\ \mu)$, это параметр $z_0 = 1 + \frac{1}{2a^2 p^2}$, который определяется энергией налетающего электрона E_p и радиусом электронной «шубы» a (радиус Бора).

Построение функции распределение $\rho^{(\varepsilon)}(b)$ для процесса рассеяния электрона на сложном атоме

Из соотношения между z_0 и импульсом p (4) получаем

$$pc = \frac{\hbar c}{a\sqrt{2(z_0 - 1)}}, \quad (17)$$

отсюда

$$pc = \frac{1}{\sqrt{2(z_0 - 1)}} \cdot 0{,}197 \cdot 10^{-2}\,\text{МэВ, при } a = 10^{-8}\,\text{см}. \quad (18)$$

Если длина волны де Бройля частицы с импульсом p порядка a, т. е. $2\pi\hbar/p = a$, тогда $pc \approx 1.24 \cdot 10^{-2}$ МэВ.

Такому значению pc соответствует

$$z_0 = 1 + \frac{1}{8\pi^2} \approx 1.003.$$

При заданных значениях μ и z_0

$$b = a\sqrt{2(z_0 - 1)\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)},$$

а длина волны де Бройля λ

$$\lambda = 2\pi a\sqrt{2(z_0 - 1)}.$$

Связь $\rho(b)$ и $\rho(\mu)$:

$$a\rho(b) = \frac{b/a}{2(z_0 - 1)} \cdot \frac{\rho(\mu)}{\mu}.$$

На рисунках представлена функция распределения $\rho(b)$ в заднюю и переднюю полусферу, нормированная на радиус Бора a. (рис. 1, 2)

Заключение

В ходе работы была получена функция распределения $\rho(b)$. Убедились, что она является хорошей динамической характеристикой в области взаимодействия и отражает пространственную структуру этой области. Анализ модели рассеяния электрона на водородоподобном атоме показал, что распределение по b действительно тесно связано с пространственной

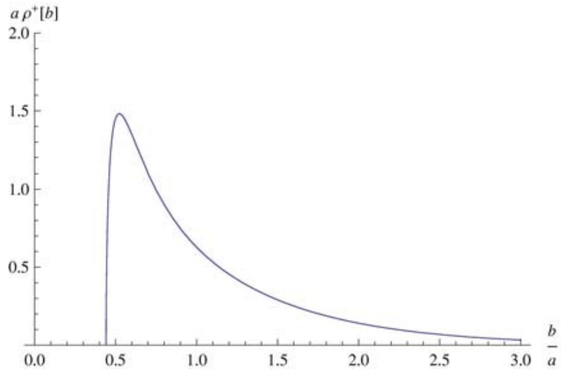

Рис. 1. Распределение $\rho(b)$ в переднюю полусферу. Длина волны при z_0=1.39 равна λ=5.549a. Минимальное значение параметра вылета b_0=0.442. Положение пика в распределении соответствует точке $b/a\approx0.6$.

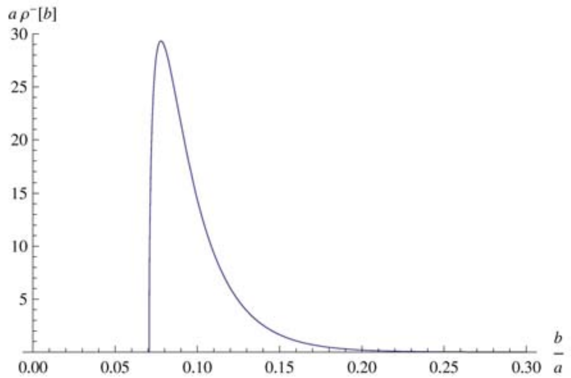

Рис. 2. Распределение $\rho(b)$ в заднюю полусферу. Длина волны при z_0=1.01 равна λ=0.889a. Минимальное значение параметра вылета b_0=0.071. Положение пика в распределении соответствует точке $b/a\approx0.09$.

структурой мишени, а формализм, применимый к реакции $2\to1+s$, даст адекватное представление о пространственной структуре области рождения детектируемой частицы. Такой подход естественным образом дополняет формализм GPD-распределения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольданский В.И., Никитин Ю.П., Розенталь И.Л. Кинематические методы в физике высоких энергий. М.: Наука, 1987. 199 с.
2. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Квантовые поля. М.: Наука, 1993. 331 с.
3. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984. 604 с.
4. Валл А.Н., Перевалова И.А., Солдатенко О.Н., Владимиров А.А. Эксклюзивные процессы в формализме группы SO(2.1) // Настоящий сборник С. 334–337.
5. Бейтман Г., Эрдейи А.. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1973. Т. 1. 294 с.
6. Фок В.А. О разложении произвольной функции в интеграл по функциям Лежандра с комплексным значком // Доклады АН СССР, 1943. Т. 39, № 7. С. 279–283.

Иркутский государственный университет, кафедра теоретической физики, Иркутск