

УДК 533.95:537.84

## ИЗУЧЕНИЕ ПЛАВУЧЕСТИ МАГНИТНЫХ СИЛОВЫХ ТРУБОК В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СОЛНЕЧНОЙ АТМОСФЕРЕ

Р.О. Бортников, В.С. Семенов

### STUDY OF MAGNETIC FLUX TUBE BUOYANCY IN THE HORIZONTAL SOLAR ATMOSPHERE

R.O. Bortnikov, V.S. Semenov

В работе применен подход к задачам МГД на основе рассмотрения тонкой магнитной силовой трубки (thin magnetic flux tube), который позволяет перейти от системы четырехмерных уравнений магнитной гидродинамики (3 пространственных + 1 временная переменная) к двумерному квазиволновому уравнению, которое затем решается численно по схеме Лакса–Вендроффа. Для трубки с закрепленными концами показаны два вида движения в зависимости от соотношения длины трубки и высоты вышележащей атмосферы и плазменного  $\beta$ , а именно: 1) колебания около положения равновесия; 2) всплытие за пределы атмосферы. Обнаружено, что максимальная скорость всплытия для высоты атмосферы, сопоставимой с длиной трубки, приблизительно вдвое больше  $V_{A0}$  и для относительно тонкой атмосферы и большого начального поля может в ходе всплытия достигать скорости звука.

In this paper, we use a known approach to MHD problems based on examination of a thin magnetic flux tube. This approach reduces original 3+1-dimensional MHD equations to two-dimensional wave-like one. Two regimes of emergence depending on the ratio between magnetic pressure  $\beta$  and relative atmosphere height are shown for a flux tube with fixed ends, namely: 1) oscillations under the atmospheric boundary; 2) floating out of the atmosphere. It is found that the maximum emergence speed for the height of the atmosphere comparable to the tube length is about twice as much as the initial Alfvén speed in the tube and can reach the sound speed in a thinner atmosphere and stronger initial field during emergence.

#### Введение

Известная модель солнечного цикла была предложена Бэбкоком [1] и реализована численно Лейтоном [2]. Существенным элементом модели Бэбкока–Лейтона является эффект магнитной плавучести, который заключается во всплытии областей относительно большого магнитного поля. Именно этот эффект ответственен за перенос сильных полей с границы конвективной зоны (так называемого тахоклина) на видимую поверхность фотосферы. В работе плазма с замороженным магнитным полем рассматривается как множество магнитных силовых трубок, толщина которых много меньше остальных характерных размеров задачи. Тензор максвелловских натяжений устроен таким образом, что вдоль трубки, т. е. по направлению поля, существует магнитное натяжение  $B^2/4\pi$ , поперек поля магнитное давление  $B^2/8\pi$ . Рассмотрим уравнение равновесия элемента плазмы в трубке [3]:

$$-\nabla p + \rho \vec{g} + \frac{1}{4\pi} \text{rot} \vec{B} \times \vec{B} = 0. \quad (1)$$

Введем оси координат так, чтобы OZ была вертикальна, OX направлена вдоль силовых линий магнитного поля, и спроецируем уравнение (1) на OY:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{4\pi} [\text{rot} \vec{B} \times \vec{B}]_y &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{B_x}{4\pi} \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial y} \left( p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, видно, что при переходе через границу трубки величина  $p + B^2/8\pi$  не должна меняться. Но снаружи силовой трубки магнитное поле много меньше, чем внутри.

Следовательно, газовое давление, а с ним и плотность плазмы в трубке меньше, чем в окружающей плазме, пронизанной меньшим магнитным полем. Элемент объема разреженной намагниченной плазмы испытывает воздействие выталкивающей силы  $g(\rho_{\text{ext}} - \rho)$  и поднимается по направлению убывания полного давления, которое считается заданным.

#### Вмороженность магнитного поля

Рассматриваются уравнения МГД в идеальной плазме. Уравнение вмороженности:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v} \vec{B}), \quad (3)$$

из чего следует условие вмороженности [5]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\vec{B}}{\rho} + (\vec{v} \nabla) \frac{\vec{B}}{\rho} = \left( \frac{\vec{B}}{\rho} \nabla \right) \vec{v}. \quad (4)$$

Уравнение вмороженности физически означает, что магнитный поток через материальный жидкий контур сохраняется. Это дает нам возможность перейти к лагранжевым координатам  $(\alpha, \tau)$  для описания силовой трубки:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} = \frac{\vec{B}}{\rho}, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} = \left( \frac{\vec{B}}{\rho} \nabla \right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} = \vec{v}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \nabla). \quad (6)$$

При этом отдельная силовая трубка параметризуется одной материальной координатой  $\alpha$ , имеющей смысл массы плазмы в трубке с единичным магнитным потоком и лагранжевым временем  $\tau$ . Таким образом, остается всего две переменных в дифференциальном уравнении движения тонкой силовой трубки.

### Основные уравнения

Уравнение движения плазмы в однородном поле тяжести в дифференциальной форме:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right) + \nabla \left( p + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} (\vec{B} \nabla) \vec{B} + \rho \vec{g}_0. \quad (7)$$

После перехода к лагранжевым координатам это уравнение приобретает вид:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \tau^2} - \frac{\rho}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \rho \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \right) = -\nabla P + \rho \vec{g}_0. \quad (8)$$

Это не что иное, как уравнение нелинейной струны (квазиволновое) с вынуждающей силой.

Полное давление связано с плотностью плазмы следующим образом:

$$P(\vec{r}) = p + \frac{B^2}{8\pi} = c\rho^\gamma + \frac{1}{8\pi} \rho^2 \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \right)^2, \quad (9)$$

где  $\gamma$  – показатель политропы, принятый равным 2, что упрощает вычисление плотности из заданного полного давления.

Таким образом, магнитная гидродинамика сводится к уравнению колебаний нелинейной струны.

Известно, что уравнение (8) имеет характеристики, соответствующие альфвеновской и медленной магнитозвуковой волнам, скорости которых равны соответственно [6]:

$$\left| \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} \right| = \sqrt{\frac{\rho}{4\pi}}, \quad (10)$$

$$\left| \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} \right| = \sqrt{\frac{\gamma \rho p}{4\pi(2p + p(\gamma - 2))}} = \sqrt{\frac{\rho}{4\pi}} \sqrt{\frac{p}{P}}.$$

Нормируем давление, плотность, индукцию магнитного поля на соответствующие их значения в начальный момент времени, соответственно  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $B_0$ . Величины, имеющие размерность длины, нормируются на длину трубки  $L_0$  в начальный момент времени. Уравнение движения (8) после нормировки переменных выглядит следующим образом (безразмерные переменные помечены тильдой):

$$\tilde{\rho} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \tilde{\tau}^2} - \tilde{\rho} \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}} \left( \tilde{\rho} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tilde{\alpha}} \right) = -\frac{1}{2} \beta \tilde{\nabla} \tilde{p}_{\text{tot}} + \delta \tilde{\rho} \vec{k}, \quad (11)$$

где  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  – единичный орт в направлении против силы тяжести. В уравнения входят два безразмерных параметра:  $\beta = \frac{8\pi p_0}{B_0^2}$ ,  $\delta = \frac{4\pi L_0 g_0 \rho_0}{B_0^2}$ . При

этом виде уравнения время оказалось нормированным на  $\tau_0 = \frac{L_0 \sqrt{4\pi \rho_0}}{B_0}$ , что соответствует времени пробега альфвеновской волны по длине трубки.

### Модель атмосферы

Первое приближение атмосферы — горизонтальная, то есть однородная по (x, y), атмосфера в однородном вертикальном поле тяжести.

Уравнение гидростатического равновесия горизонтального слоя атмосферы:

$$\nabla P = \rho_{\text{ext}} \vec{g}_0. \quad (12)$$

Приведа это уравнение к безразмерному виду, получим:

$$\tilde{\nabla} \tilde{P} = 2 \frac{\delta}{\beta} \tilde{\rho}_{\text{ext}} \vec{k}, \quad (13)$$

где  $2 \frac{\delta}{\beta} = \frac{L_0 g_0 \rho_0}{p_0}$ . Подставив это выражение безразмерного градиента газового давления в уравнение (11), получим

$$\tilde{\rho} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \tilde{\tau}^2} - \tilde{\rho} \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}} \left( \tilde{\rho} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tilde{\alpha}} \right) = -\delta \vec{k} (\tilde{\rho}_{\text{ext}} - \tilde{\rho}) \quad (14)$$

или, учтя положительность  $\rho$ :

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \tilde{\tau}^2} - \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}} (\tilde{\rho} \vec{u}) = -\delta \vec{k} \left( \frac{\tilde{\rho}_{\text{ext}}}{\tilde{\rho}} - 1 \right), \quad (15)$$

где  $\vec{u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tilde{\alpha}}$ . Пусть теперь плазма снаружи подчиняется тому же политропному соотношению:

$$P = p_0 \left( \frac{\rho_{\text{ext}}}{\rho_0} \right)^2$$

или, в безразмерном виде:  $\tilde{P} = \tilde{\rho}_{\text{ext}}^2$ . Дифференцируя это выражение и подставив значение градиента давления, получим:  $\tilde{\nabla} \tilde{\rho}_{\text{ext}} = \frac{\delta}{\beta} \vec{k}$ . Интегрируя с гранич-

ным условием на границе атмосферы  $\rho|_{z=0} = 0$ , получим (учитывая, что ось z направлена против силы тяжести):

$$\tilde{\rho}_{\text{ext}} = \frac{\delta}{\beta} \tilde{z}, \quad \tilde{z} < 0. \quad (16)$$

Полученное из выражения плотности фоновой плазмы значение полного давления должно совпасть с давлением, вычисленным для трубки. Отсюда выводится граничное условие на  $z_0$ :

$$P(z_0) = p_0 + \frac{B_0^2}{8\pi} = p_0 \left( \frac{\delta}{\beta} \tilde{z}_0 \right)^2,$$

$$\text{откуда } \tilde{z}_0 = \sqrt{\frac{\beta^2 + \beta}{\delta^2}}. \quad (17)$$

Высота вышележащей атмосферы  $\tilde{z}_0$  будет выступать в роли второго независимого параметра вместе с  $\beta$ .

Плотности плазмы в трубке и вне трубки связаны следующим соотношением:

$$P = p_0 \tilde{\rho}^2 + \frac{B^2}{8\pi} = p_0 \tilde{\rho}^2 + \frac{B_0^2}{8\pi} \tilde{\rho}^2 \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tilde{\alpha}} \right)^2 =$$

$$= \tilde{\rho}^2 p_0 \left( 1 + \frac{\left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tilde{\alpha}} \right)^2}{\beta} \right) = p_0 \tilde{\rho}_{\text{ext}}^2,$$

$$\text{откуда } \tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{\text{ext}} \left( 1 + \frac{\left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tilde{\alpha}} \right)^2}{\beta} \right)^{-1/2}. \quad (18)$$

Мы получили систему уравнений (6), (15), (18), а также из условия на смешанные производные

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \bar{r} = \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \bar{r}$$

следует  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\tau}} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{\alpha}}$ . (19)

Эта система уравнений решалась численно по схеме Лакса–Вендроффа для выбранных значений безразмерных параметров  $\bar{z}_0, \beta$ . Выбор вычислительной схемы был обусловлен тем, что она второго порядка точности и потому хорошо себя зарекомендовала на гладких решениях без ударных волн.

**Результаты численного моделирования  
Трубка с закрепленными концами**

Обнаружены два режима движения силовой трубки с закрепленными концами: колебания (рис. 1) и всплытие вплоть до достижения границы атмосферы (рис. 2, рис. 3), причем режим движения определяется соотношением приведенной к длине трубки высоты атмосферы  $z_0$  и плазменного  $\beta$  лишь в пределах  $0.5 < z_0 < 0.8$ . Для больших значений  $z_0$  трубка совершает колебания, для атмосферы, вдвое меньшей длины трубки и более тонкой, трубка всегда всплывает (рис. 4). Скорость всплытия вершины трубки ведет себя как показано на рис. 3. В режиме всплытия скорость всплытия оказывается равной

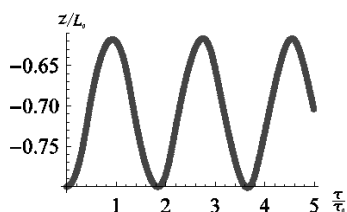


Рис. 1. На рисунке показаны колебания вершины трубки для значений параметров  $z_0 = -0.8, \beta = 1$ .

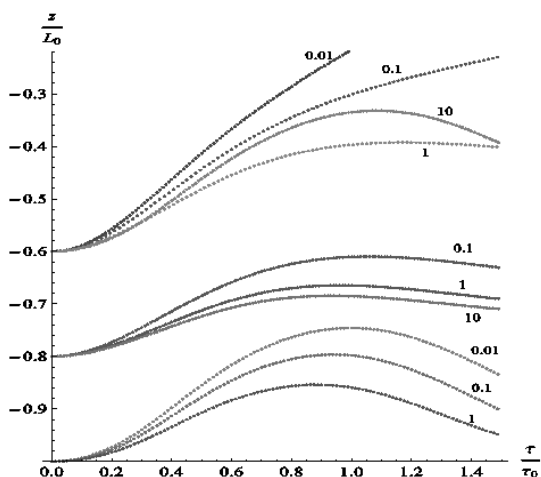


Рис. 2. На рисунке показан ход всплытия вершины трубки для  $z_0 = -1; -0.8; -0.6$  при указанных значениях  $\beta$ . Видно, что для высоты  $z_0 = -0.6$  малые значения  $\beta$  приводят к беспрепятственному всплытию вершины трубки. С другой стороны, для большей высоты атмосферы, например  $z_0 = -1$ , трубка попадает в режим колебаний для всех выбранных значений  $\beta$ .

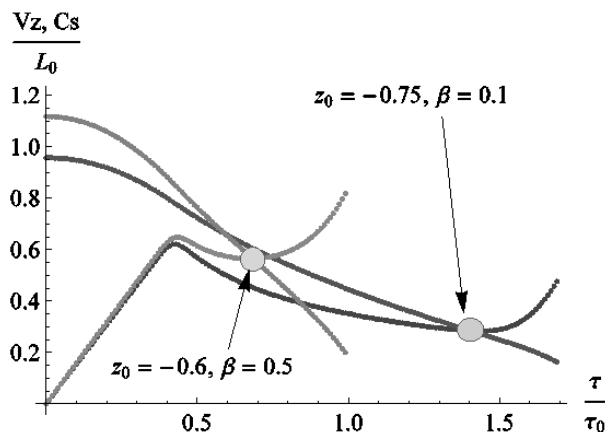


Рис. 3. На рисунке показана вертикальная скорость вершины трубки в сравнении со скоростью звука в окружающей плазме в вершине трубки для двух выбранных значений параметров.

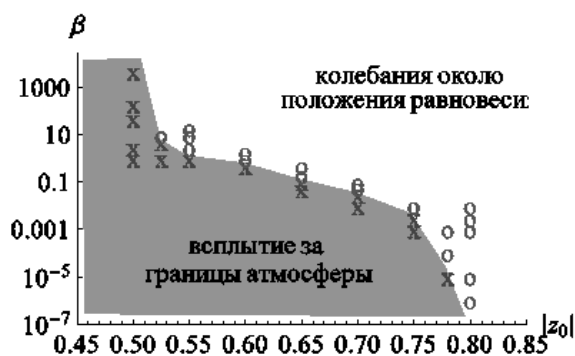


Рис. 4. Показаны режимы всплытия в плоскости параметров. Кругами отмечены колебательные решения, крестиками – выходы за границы атмосферы (расходящиеся решения). Видно, что в пределах изменения  $z_0$  (0.5, 0.8) режим движения трубки определяется плазменным  $\beta$ . Вне этих пределов для малых высот наблюдается всплытие за границы атмосферы, для больших высот – только колебательные решения.

приблизительно  $0.5 \cdot V_{A0}$ , где  $V_{A0} = \sqrt{\frac{B_0^2}{4\pi\rho_0}}$ , которая определяется, прежде всего, значением магнитного поля в трубке.

Произведено сравнение скорости всплытия вершины трубки с адиабатической скоростью звука в окружающей плазме  $C_s = \sqrt{5/3 \frac{P}{\rho_{ext}}}$  (рис. 3). Видно, что вершина всплывающей трубки в определенный момент достигает скорости звука, высота, на которой это происходит, также зависит от соотношения параметров.

**Выводы**

Поведение магнитной силовой трубки в горизонтальной атмосфере существенно зависит от соотношения длины трубки и высоты атмосферы, чем определяется режим всплытия, колебания около положения равновесия или достижение границы атмосферы.

Скорость всплытия определяется прежде всего величиной магнитного поля в трубке.

При достижении границы атмосферы в некоторых случаях скорость всплытия достигает скорости звука в окружающей плазме. Этот эффект может быть ответственным за передачу энергии верхним слоям атмосферы.

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

1. Babcock H.W. The topology of the sun's magnetic field and the 22-year cycle // *Astrophys. J.* 1961. V. 133. P. 572–586.
2. Leighton R.B. A magneto-kinematic model of the solar cycle // *Astrophys. J.* 1969. V. 156. P. 1–26.

3. Пудовкин М.И. Основы физики Солнца: Лекции для бакалавров физического факультета СПбГУ. СПб. 2001. 108 с.
4. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Наука, 1962. 246 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Электродинамика сплошных сред. Т. 8. М.: Наука, 1982. 624 с.
6. Пудовкин М.И., Семенов В.С. Теория пересоединения и взаимодействие солнечного ветра с магнитосферой Земли. М.: Наука, 1985. 126 с.

*Санкт-Петербургский государственный университет,  
Санкт-Петербург*