УДК 550.837.76, 517.444

НОВЫЙ АЛГОРИТМ СВЕРТКИ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ РАДАРА НЕКОГЕРЕНТНОГО РАССЕЯНИЯ

С.С. Алсаткин, А.Л. Воронов

NEW CONVOLUTION ALGORITM FOR INCOHERENT RADAR DATA PROCESSING

S.S. Alsatkin, A.L. Voronov

При обработке данных радара некогерентного рассеяния возникает необходимость вычисления свертки импульса с различными типами реализаций сигналов. Обычно для этих целей используется быстрое преобразование Фурье (БПФ). Но если необходимо вычислять очень большое количество сверток, то нужно иметь алгоритм, который более эффективен по скорости по сравнению с БПФ. Цель нашего сообщения – представить новый алгоритм свертки, основанный на хорошо известном алгоритме свертки Винограда [1].

Классический алгоритм Винограда основан на выборе циклотомического полинома, степень которого больше, чем суммарная длины свертываемых сигналов, разложении этого полинома в произведение полиномов меньших степеней, вычислении свертки по модулю каждого полученного полинома и получении требуемой исходной свертки с помощью китайской теоремы об остатках. Мы предлагаем новую схему, в которой эта процедура итеративно повторяется для каждого полученного полинома меньшей степени до тех пор, пока степень полинома не станет меньше 16, после чего можно использовать известные оптимальные схемы вычисления свертки.

During incoherent radar data processing, one has to calculate convolution of pulse with various types of signal realization. For this purpose the fast Fourier transform (FFT) is usually used. But in order to calculate a great number of convolutions, we need an algorithm that is more effective in speed than FFT. The goal of our report is to present a new convolution algorithm based on the well-known Winograd convolution algorithm [1].

The classical Winograd algorithm rests on choosing cyclotomic polynomial of degree greater than sum of lengths of two convoluted signals, decomposing this polynomial into product of polynomials with lesser degrees, calculating the convolution by module of each obtained polynomial, and restoring needed convolution by means of the Chinese remainder theorem. We propose a new scheme in which this procedure is repeated iteratively for each obtained lesser convolution until the degree of polynomial is less than 16; then we can use optimal calculation schemes.

Классический алгоритм Винограда состоит из трех стадий. Первая это – выбор многочлена, степень которого больше суммы длин двух свертываемых последовательностей, его разложение на неприводимые множители над полем рациональных чисел и вычисление вычетов исходных последовательностей по модулю каждого многочлена из выбранного разложения. На второй стадии производятся короткие свертки полученных вычетов. На третьей стадии с помощью вычисленных коротких сверток и китайской теоремы об остатках получается требуемая свертка. Как показано в [1], при больших длинах исходных последовательностей по сравнению с алгоритмом БПФ Кули–Тьюки алгоритм Винограда требует в среднем в 5 раз меньше умножений при сравнимом числе сложений. Ниже мы подробно рассмотрим все стадии алгоритма с модификациями нашей версии и анализом числа и типа операций на каждой стадии.

Перед началом первой стадии необходимо выбрать многочлен $P(x)$ и его разложение на неприводимые множители над полем рациональных чисел. Поскольку в нашей задаче необходимо производить свертку последовательности длиной 2000 с импульсом длиной 50–70, то в качестве многочлена $P(x)$ мы выбрали многочлен $x^{2304}–1$. Этот выбор обусловлен несколькими причинами. Во-первых, разложение этого многочлена на неприводимые множители хорошо известно:

$$P(x)=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^4+1)(x^4-x^2+1)(x^6+x^3+1)\times$$
$$\times(x^6-x^3+1)(x^8+1)(x^8-x^4+1)(x^{12}-x^6+1)(x^{16}+1)(x^{16}-x^8+1)\times$$
$$\times(x^{24}-x^{12}+1)(x^{32}+1)(x^{32}-x^{16}+1)(x^{48}-x^{24}+1)(x^{64}+1)\times$$
$$\times(x^{64}-x^{32}+1)(x^{96}-x^{48}+1)(x^{128}+1)(x^{128}-x^{64}+1)(x^{192}-x^{96}+1)\times$$
$$\times(x^{256}-x^{128}+1)(x^{384}-x^{192}+1)(x^{768}-x^{384}+1).$$

Во-вторых, это разложение хорошо тем, что все множители имеют не более трех ненулевых коэффициентов, и поэтому редукция по этим модулям требует небольшого числа сложений. И наконец, степень этого многочлена больше суммы длин исходной последовательности и импульса. Нахождение вычетов по указанным модулям не требует умножений и при оптимальной схеме вычислений линейно по числу сложений относительно длины исходной последовательности, причем для тех модулей, степень которых больше длины импульса, редукцию импульса производить не нужно. На этом этапе мы не делали никаких модификаций по сравнению с классическим алгоритмом.

На второй стадии производится свертка по модулю каждого многочлена из разложения $P(x)$. Свертки по модулям небольшой степени хорошо изучены, и для них существуют оптимальные алгоритмы [1], поэтому основное внимание нужно обратить на свертки по модулям, степень которых больше 100. Здесь мы вводим первую модификацию классического алгоритма. Пусть нужно выполнить свертку вычетов по модулю многочлена степени 768. Заменим эту задачу на вычисление свертки по модулю многочлена $Q(x)= x^{1024}–1$, разложение на множители которого также хорошо известно:

$$Q(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)(x^{16}+1)(x^{32}+1)\times$$
$$\times(x^{64}+1)(x^{128}+1)(x^{256}+1)(x^{512}+1),$$

затем применим к вычислению свертки по модулю Q(x) исходную схему алгоритма Винограда. Далее, в этой схеме свертку по модулю многочлена степени 512 заменяем на свертку по модулю многочлена $x^{768}–1$ с разложением

$$x^{768}-1=(x-1)(x+1)(x^2-x+1))(x^2+x+1)(x^4+1)(x^4-x^2+1)\times$$
$$\times(x^8+1)(x^8-x^4+1)(x^{16}+1)(x^{16}-x^8+1)(x^{32}+1)(x^{32}-x^{16}+1)\times$$
$$\times(x^{64}+1)(x^{64}-x^{32}+1)(-x^{128}+1)(x^{128}-x^{64}+1)(x^{256}-x^{128}+1)$$

и вновь применяем классический алгоритм для этого разложения. Далее по тому же принципу используются многочлены $x^{512}-1$, $x^{384}-1$, $x^{256}-1$, $x^{192}-1$, $x^{128}-1$. Тем самым мы сводим вычисление сверток по модулям больших степеней к вычислению сверток по модулям, степень которых меньше 100. Поскольку стадия редукции не требует умножений, то за счет увеличения числа сложений мы примерно в 10 раз снижаем число умножений, необходимых для выполнения требуемых сверток. Это и обуславливает выигрыш в производительности по сравнению с классическим алгоритмом в связи с тем, что умножение является намного более затратной операцией по сравнению со сложением.

Третья стадия состоит в восстановлении свертки по вычисленным сверткам с помощью китайской теоремы об остатках. Пусть A_k – вычисленные короткие свертки. Тогда требуемая свертка вычисляется по формуле

$$R=A_1P_1+A_2P_2+\ldots+A_nP_n \bmod P(x),$$

где P_i – некоторые заранее вычисленные многочлены. Слагаемые с малыми индексами вычисляются так же, как и в классическом алгоритме, и требуют небольшого числа умножений. Для вычисления слагаемых с большими индексами мы используем тот факт, что произведение многочленов представляет собой свертку, и поэтому к ней можно вновь применить схему понижения степени, описанную во второй стадии для сокращения числа умножений. В этом состоит наша вторая модификация классического алгоритма.

В целом, анализируя улучшения на второй и третьей стадии, можно констатировать увеличение скорости вычисления свертки по сравнению с классическим алгоритмом примерно в два раза за счет уменьшения требуемого числа умножений. Отметим, что при работе с комплексными сигналами выигрыш в скорости будет еще больше, поскольку соотношение между стоимостью сложения и умножения гораздо выше, чем в вещественном случае.

Отметим в заключение, что данный алгоритм, в отличие от БПФ, является параллельным, и на многопроцессорных системах с языками параллельных вычислений дает еще больший выигрыш производительности вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ричард Е. Блейхут. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1985, 448 с.

Институт солнечно-земной физики СО РАН, Иркутск, Россия