

УДК 530.145, 539.12

КЛАССИЧЕСКАЯ ТРАЕКТОРИЯ И АЛГЕБРА КВАНТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРИЦЕЛЬНОГО ПАРАМЕТРА В ЗАДАЧЕ РАССЕЙНИЯ ЗАРЯДА НА МАГНИТНОМ МОНОПОЛЕ

С.Э. Коренблит, Ли Ки Ын

CLASSICAL TRAJECTORY AND ALGEBRA OF QUANTUM IMPACT-PARAMETER OPERATORS IN THE TASK OF CHARGE SCATTERING ON MAGNETIC MONOPOLE

S.E. Korenblit, Li Ki Eun

Найдена бескоординатная векторная форма решения классической задачи рассеяния заряда на магнитном монополе и определен сохраняющийся квантовый оператор квадрата вектора прицельного параметра.

The solution of classical problem of a charge scattering on magnetic monopole in vector coordinate-free form is found, and a corresponding conserved quantum operator of square of impact-parameter vector is defined.

Несмотря на то, что исследование свойств магнитных монополей ведется давно [1], оно остается в числе интереснейших задач теоретической физики [2]. В частности, сохранение квадрата прицельного параметра, помимо свободного движения, имеет место также в классической задаче рассеяния заряда на магнитном монополе. Поэтому представляет интерес поиск обобщения на этот случай алгебры соответствующих квантовых операторов, найденной для свободного случая в работе [3]. Соответствующее решение классической задачи рассеяния, полученное Гольдхабером [4], дает траекторию движения заряда по конусу с вершиной в монополе в начале координат.

В настоящей работе решение этой задачи, найденное с произвольными начальными условиями в бескоординатной векторной форме, задает как траекторию заряда, так и мгновенную плоскость рассеяния в терминах угла $\psi(t)$ между векторами $\vec{x}(t)$ и $\vec{b}(t)$, – положения заряда и вектора его прицельного параметра, – подсказывая вид квантового оператора квадрата прицельного параметра.

Поскольку для заряда в поле неподвижного магнитного монополя сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости заряда [4], то $\dot{\vec{V}} \perp \vec{V}$, и $\dot{\vec{V}} \perp \vec{x}$, т. е. $0 = (\vec{V} \cdot \dot{\vec{V}})$, $0 = (\vec{x} \cdot \dot{\vec{V}})$, тогда как

$$m\dot{\vec{V}} = \frac{Q}{r^3}[\dot{\vec{x}} \times \vec{x}], \quad \frac{d^2}{dt^2} r^2(t) = 2V_0^2,$$

$$\vec{V}^2 \equiv \dot{\vec{x}}^2 = V_0^2 = const, \quad \vec{V} = V_0 \vec{w}(t), \quad (\dot{\vec{n}})^2 = \dot{\varphi}^2(t) \sin^2 \theta, \quad (1)$$

где при $\vec{n} = \vec{x}/r = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$, имеем $\dot{\vec{n}} = (-\dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi, \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi, 0)$. Тогда для кинетического и полного моментов количества движения этой задачи из (1) находим [4]

$$\vec{N} = m[\vec{x} \times \dot{\vec{x}}] \equiv m\vec{A}, \quad (\vec{N} \cdot \vec{n}) = 0, \quad |\vec{N}| = mV_0 b = const, \\ \vec{J} = \vec{N} - Q\vec{n}, \quad \dot{\vec{J}} = 0, \quad \text{tg } \theta = |\vec{N}|/|Q| = const, \quad (2)$$

где $b = |\vec{b}|$ – прицельный параметр, V_0 – абсолютная величина (начальной) скорости, \vec{N} – кинетический момент импульса, сохраняющийся по абсолютной величине. Так что движение происходит по повер-

ности конуса с осью вдоль вектора сохраняющегося полного момента \vec{J} , с фиксированным углом раствора 2θ и перпендикулярной к \vec{N} образующей, т. е. $\sin \theta = |\vec{N}|/|\vec{J}|$, где θ – половина угла раствора конуса, на который наматывается траектория заряда, «заметаемого» вектором $\vec{x}(t)$ при его вращении (прецессии) вокруг вектора $\pm \vec{J}$, при неизменной кинетической энергии заряда $m\vec{V}^2/2 = mV_0^2/2$. Интегрируя уравнения (1) для $r(t)$ и $\varphi(t)$ с учетом (2), с начальными условиями в произвольный момент времени t_0 , имеем обобщение формул [4] в виде:

$$\vec{x}^2(t) = r^2(t) = \vec{x}_0^2 + 2(\vec{x}_0 \cdot \vec{V}_0)(t-t_0) + \vec{V}_0^2(t-t_0)^2, \quad (3)$$

т. е. $\vec{x}^2(t) = \vec{Y}^2(t)$, где $\vec{Y}(t) = \vec{x}_0 + \vec{V}_0(t-t_0) \neq \vec{x}(t)$.

Вектор $\vec{Y}(t)$ описывал бы эволюцию в неподвижной плоскости рассеяния, натянутой на вектора \vec{x}_0 , \vec{V}_0 , т. е. в отсутствие поля монополя для моментов времени $t > t_0$. При $\xi(t) = V_0^2(t-t_0) + (\vec{x}_0 \cdot \vec{V}_0)$ представим $r^2(t)$ в (3) в виде:

$$r^2(t) \equiv \frac{A^2}{V_0^2} + \left[V_0(t-t_0) + \frac{(\vec{x}_0 \cdot \vec{V}_0)}{V_0} \right]^2 \equiv \frac{\xi^2(t) + A^2}{V_0^2}, \\ A^2 = \vec{x}_0^2 \vec{V}_0^2 - (\vec{x}_0 \cdot \vec{V}_0)^2 = V_0^2 b^2 = r_0^2 V_0^2 \cos^2 \psi_0. \quad (4)$$

Очевидно, $A \equiv |\vec{A}| = |\vec{N}|/m = r_0 V_0 \sin \alpha_0$, $\xi(t_0) = (\vec{x}_0 \cdot \vec{V}_0)$, а $\xi(\eta) = 0$ отвечает здесь максимальному сближению. Отсюда легко найти соответствующий момент времени η , при котором $r^2(\eta) = b^2$, и квадрат вектора $\vec{b}(t)$ прицельного параметра в терминах начальных условий:

$$r^2(\eta) = r_0^2 - \frac{(\vec{x}_0 \cdot \vec{V}_0)^2}{V_0^2} = \frac{\vec{N}^2}{m^2 V_0^2} = \frac{A^2}{V_0^2} = |\vec{b}(\eta)|^2 = \vec{b}_\eta^2 \equiv b^2. \quad (5)$$

Подставляя в последнее уравнение (1) производные от решения (3), для любых t, t_0 имеем

$$\dot{r}(t) = \frac{A^2}{r^3(t)}, \quad \dot{\varphi}(t) = \pm \frac{A}{\sin \theta r^2(t)} = \pm \frac{|\vec{J}|}{mr^2(t)},$$

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{\frac{\bar{N}^2}{Q^2}}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad r(t) = \frac{b}{\cos \psi(t)}, \quad (6)$$

$$\varphi(t) - \varphi_0 = \pm \frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{\sin \theta} = \pm \frac{1}{\sin \theta} \operatorname{arctg} \frac{\xi(t) - \xi(t_0)}{A \left[1 + \frac{\xi(t_0)\xi(t)}{A^2} \right]},$$

где $\frac{\xi(t)}{A} = \operatorname{tg} \psi(t)$, $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$. (7)

Уравнение движения в векторной форме, исходя из (1), (2), можно представить в виде:

$$\ddot{\bar{x}} = -\frac{Q\bar{N}}{r^3 m^2} = -\frac{Q\bar{J}}{m^2 r^3} - \frac{Q^2 \bar{x}}{m^2 r^4}. \quad (8)$$

Будем искать его решение в виде разложения по трем линейно независимым начальным векторам $\bar{x}_0, \bar{V}_0, \bar{J}$ как $\bar{x}(t) = a(t)\bar{x}_0 + b(t)\bar{V}_0 + c(t)\bar{J}$. Тогда, сравнивая коэффициенты при этих векторах, имеем три уравнения для скалярных функций $a(t), b(t), c(t)$ с начальными условиями: $\ddot{a}(t) = -\frac{Q^2}{m^2 r^4} a(t), a(t_0) = 1,$

$$\dot{a}(t_0) = 0, \quad \ddot{b}(t) = -\frac{Q^2}{m^2 r^4} b(t), \quad b(t_0) = 0, \quad \dot{b}(t_0) = 1, \quad (9)$$

$$\ddot{c}(t) = -\frac{Q^2}{m^2 r^4} c(t) - \frac{Q}{m^2 r^3}, \quad c(t_0) = 0, \quad \dot{c}(t_0) = 0. \quad (10)$$

Для неоднородного дифференциального уравнения на $c(t)$ соответствующее ему однородное уравнение совпадает с уравнениями на $a(t)$ и $b(t)$. Вводя тот же переменный угол $\psi(t)$ (7): $\xi(t)/A = \operatorname{tg} \psi(t)$,

$$-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}, \quad c(t) = \tilde{c}(\xi) = \frac{w(\psi)}{\cos \psi}, \quad \lambda = \left| \frac{Q}{\bar{N}} \right| > 0,$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{mV_0}, \quad \mu^2 = \frac{\bar{J}^2}{\bar{N}^2} = \lambda^2 + 1, \quad (11)$$

приходим к простому неоднородному дифференциальному уравнению:

$$w''(\psi) + \mu^2 w(\psi) = -\sigma.$$

Отсюда находим общее решение однородного и частное решение неоднородного уравнения в виде:

$$w_0(\psi) = C \cos(\mu\psi + \Delta),$$

$$w_1(\psi) = -\sigma/\mu^2,$$

где Δ и C находятся из начальных условий.

Для функций $a(t), b(t), c(t)$, констант и вектора $\bar{x}(t)$, согласно (9), (10), (11), получаем:

$$a(t) = a_0 \frac{\cos(\mu\psi + \Delta_a)}{\cos \psi}, \quad b(t) = b_0 \frac{\cos(\mu\psi + \Delta_b)}{\cos \psi},$$

$$c(t) = \frac{c_0 \cos(\mu\psi + \Delta_c) - \sigma/\mu^2}{\cos \psi}, \quad (12)$$

$$a_0 = \frac{\cos \psi_0}{\cos(\mu\psi_0 + \Delta_a)} = (-1)^{n_a} \sqrt{\cos^2 \psi_0 + \frac{\sin^2 \psi_0}{\mu^2}},$$

$$\Delta_a = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \psi_0}{\mu} \right) + \pi \quad n_a - \mu\psi_0, \quad (13)$$

$$b_0 = \frac{(-1)^{n_b} |\bar{N}|}{\mu m V_0^2 \cos \psi_0}, \quad \Delta_b = \pi \quad n_b - \mu\psi_0 - \frac{\pi}{2},$$

$$c_0 = \frac{\sigma/\mu^2}{\cos(\mu\psi_0 + \Delta_c)} = (-1)^{n_c} \frac{\sigma}{\mu^2},$$

$$\Delta_c = \pi \quad n_c - \mu\psi_0. \quad (14)$$

$$\frac{\bar{x}(t)}{r(t)} = \frac{\cos \psi_0}{b} \left[\cos(\mu(\psi - \psi_0)) - \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{tg} \psi_0}{\mu} \sin(\mu(\psi - \psi_0)) \right] \bar{x}_0 +$$

$$+ \frac{\sin(\mu(\psi - \psi_0))}{\mu V_0 \cos \psi_0} \bar{V}_0 + \frac{\sigma [\cos(\mu(\psi - \psi_0)) - 1]}{\mu^2 b} \bar{J}.$$

Можно убедиться, что квадрат последнего выражения тождественно равен единице. В любой момент времени плоскости векторов $(\bar{x}, \bar{N}, \bar{J}) \perp (\bar{x}, \bar{V}, \bar{b})$ взаимно перпендикулярны. На рисунке показан геометрический смысл угла $\psi(t)$ в плоскости $(\bar{x}, \bar{V}, \bar{b})$:

$$(\bar{x} \cdot \bar{V}) = r(t),$$

$$V_0 \cos \alpha = r(t) V_0 \sin \psi,$$

$$\alpha \equiv \frac{\pi}{2} - \psi, \quad \text{где } 0 \leq \alpha \leq \pi,$$

$$\text{и } (\bar{b}(t) \cdot \bar{x}(t)) = br(t) \cos \psi = br(t) \sin \alpha,$$

причем: $\psi(\eta) = 0$, тогда как:

$$\text{при } t \rightarrow -\infty: \operatorname{tg} \psi \rightarrow -\infty, \quad \psi \rightarrow -\frac{\pi}{2} + 0, \quad \alpha \rightarrow \pi;$$

$$\text{а при } t \rightarrow \infty: \operatorname{tg} \psi \rightarrow \infty, \quad \psi \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0, \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (15)$$

Найдем бескоординатное выражение для вектора прицельного параметра $\bar{b}(t)$ через $\bar{\pi}$ и \bar{N} . Поскольку $\pi(t) \equiv m\bar{V}(t) = m\dot{\bar{x}}(t)$, $\bar{N} = (\bar{x}(t) \times \bar{\pi}(t)) = (\bar{b}(t) \times \bar{\pi}(t))$, $(\bar{\pi}(t) \cdot \bar{b}(t)) \equiv 0$, (16)

$$\text{то: } \bar{b}(t) = \frac{(\bar{\pi}(t) \times \bar{N}(t))}{\bar{\pi}^2},$$

$$\text{причем: } \dot{\bar{b}}(t) = \frac{Q}{\bar{\pi}^2} \frac{\dot{r}(t)}{r^2(t)} \bar{N}(t). \quad (17)$$

При $t = \eta$, $\bar{\pi}_\eta \equiv \bar{\pi}(\eta)$, получаем условия:

$$\bar{x}(\eta) = \bar{b}(\eta) = \bar{b}_\eta, \quad (\bar{\pi}_\eta \cdot \bar{J}) = 0, \quad r^2(\eta) = \bar{N}^2 / \bar{\pi}^2 \equiv \bar{b}^2.$$

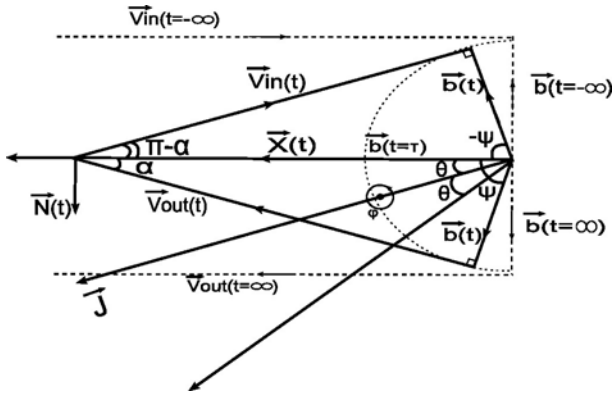
Для нахождения \bar{b}_η в терминах \bar{J} выразим из (2) \bar{N} через \bar{J} и, подставив в (17), получим:

$$\bar{b}(t) = \frac{1}{\bar{\pi}^2} (\bar{\pi} \times \bar{J}) + \frac{Q}{\bar{\pi}^2} \left(\bar{\pi} \times \frac{\bar{x}}{r} \right) = \frac{1}{\bar{\pi}^2} (\bar{\pi} \times \bar{J}) - \frac{Q\bar{N}}{\bar{\pi}^2 r} =$$

$$= \frac{1}{\bar{\pi}^2} \left((\bar{\pi}(t) \times \bar{J}) - Q \frac{\bar{J}}{r(t)} - Q^2 \frac{\bar{x}(t)}{r^2(t)} \right), \quad (18)$$

где $\bar{\pi}^2, \bar{J}, \bar{N}^2$ – константы движения, и $\bar{J}^2 = \bar{N}^2 + Q^2$.

При $t \rightarrow \eta$, $\bar{\pi}(t) \rightarrow \bar{\pi}_\eta$, получаем вектор:



Эволюция вектора прицельного параметра во вращающейся плоскости рассеяния.

$$\begin{aligned} \vec{b}_n &= \frac{\vec{N}^2(\vec{\pi}_n \times \vec{J})}{\vec{J}^2 \vec{\pi}^2} - \frac{Q|\vec{N}|\vec{J}}{\vec{J}^2 |\vec{\pi}|} = \\ &= \left(1 - \frac{Q^2}{\vec{J}^2}\right) \frac{(\vec{\pi}_n \times \vec{J})}{\vec{\pi}^2} - \frac{Q}{|\vec{\pi}|} \left(1 - \frac{Q^2}{\vec{J}^2}\right)^{1/2} \frac{\vec{J}}{|\vec{J}|}. \end{aligned} \quad (19)$$

Вычисляя его квадрат, вновь убеждаемся, что $\vec{b}^2(t) \equiv \vec{b}_n^2$ – сохраняющаяся величина. Явный вид вектора $\vec{b}(t)$ можно найти, подставляя в (18) решения для $r(t)$ (3), $\vec{x}(t)$ (12)–(14), и $\vec{\pi}(t)$ (16).

На рисунке показана эволюция (15) вектора $\vec{b}(t)$ и его угла $\psi(t)$ с вектором $\vec{n}(t)$, при $Q < 0$.

Квантовая задача [1], [4] определяется коммутационными соотношениями для операторов: $\vec{x} = r\vec{n}$, $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}_{\vec{x}}$, $m\dot{\vec{x}} \equiv \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x})$, $\vec{L} = (\vec{x} \times \vec{p})$,

$$\vec{J} = \vec{L} - Q\vec{n}, \quad \vec{B}(\vec{x}) = g \frac{\vec{x}}{r^3}, \quad Q = \frac{eg}{c}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} [x_i, \pi_j] &= i\hbar\delta_{ij}, \quad [J_i, x_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}x_k, \quad [J_i, \pi_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\pi_k, \\ [J_i, J_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}J_k, \end{aligned} \quad (21)$$

$$(\vec{\pi} \times \vec{\pi}) = i \frac{e\hbar}{c} (\vec{\nabla}_{\vec{x}} \times \vec{A}(\vec{x})) = i \frac{e\hbar}{c} \vec{B}(\vec{x}),$$

$$2mi\hbar\dot{\vec{\pi}} = [\vec{\pi}, \vec{\pi}^2] = i \frac{e\hbar}{c} ((\vec{\pi} \times \vec{B}) - (\vec{B} \times \vec{\pi})) = -2i\hbar Q \frac{1}{r^3} \vec{L}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} [\pi_i, [\pi_j, \pi_k]] &= \frac{e\hbar^2}{c} (\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{B}(\vec{x})) = 4\pi \hbar^2 Q \delta_3(\vec{x}), \\ [\vec{L}, f(r)] &= [\vec{L}, (\vec{\pi} \cdot \vec{x})] = 0, \quad [L_i, x_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}x_k. \end{aligned} \quad (23)$$

Оператор \vec{L} , обладает лишь некоторыми свойствами (23) момента импульса, но не подчиняется соответствующей алгебре (21) для операторов полного момента J_i , вместо которой имеем:

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk} \left\{ L_k + Q \frac{x_k}{r} \right\}, \\ [L_i, \pi_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk} \pi_k + i\hbar \frac{Q}{r} (\delta_{ij} - n_i n_j), \end{aligned}$$

$$[L_i, \vec{\pi}^2] = 2i\hbar Q \left\{ \pi_i \frac{1}{r} - \frac{x_i}{r^3} (\vec{x} \cdot \vec{\pi}) \right\}. \quad (24)$$

Следуя [3], введем по аналогии с классическим вектором (17) вспомогательные операторы:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= (\vec{\pi} \times \vec{L}), \\ \vec{D}^{\pm} &= \frac{1}{2} (\vec{D} \pm \vec{D}^{\dagger}) = (\vec{\pi} \times \vec{L}) - i\hbar\vec{\pi} = \vec{\pi}^2 \vec{x} - (\vec{\pi} \cdot \vec{x})\vec{\pi}, \\ 2mi\hbar\dot{\vec{D}} &= [\vec{D}, \vec{\pi}^2] = 2i\hbar Q (\vec{\pi} \cdot \vec{x}) \frac{1}{r^3} \vec{L}. \end{aligned} \quad (25)$$

Как видим, в отличие от свободного случая [3], сам векторный эрмитов оператор \vec{D} не является более сохраняющейся величиной, а коммутационные соотношения для его компонент имеют вид:

$$\begin{aligned} [\vec{D}_i, \vec{D}_j] &= -i\hbar\epsilon_{ijk} \left\{ \vec{\pi}^2 L_k + \frac{e}{c} [i\hbar(\vec{\pi} \cdot \vec{x}) - \right. \\ &\left. - (\vec{\pi} \cdot \vec{x})^2] B_k - 2 \frac{e}{c} (\vec{\pi} \cdot \vec{x}) (\vec{L} \times \vec{B})_k \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} [L_i, \vec{D}_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk} \vec{D}_k - i\hbar Q \left\{ \epsilon_{ijk} L_k + n_i (\vec{n} \times \vec{L})_j + \right. \\ &\left. + (\delta_{ij} (\vec{\pi} \cdot \vec{x}) - \pi_i x_j) + i\hbar (\delta_{ij} - n_i n_j) \right\} \frac{1}{r}, \end{aligned} \quad (27)$$

образуя с L_i замкнутую алгебру SO(3,1) лишь при $Q = 0$ [3]. Тем не менее, его квадрат будет сохраняться, являясь естественной эрмитизацией соответствующего классического выражения:

$$\begin{aligned} (\vec{\pi} \times \vec{N})^2 &\leftrightarrow \\ (\vec{D})^2 &= \vec{\pi}^2 \vec{x}^2 \vec{\pi}^2 - (\vec{\pi} \cdot \vec{x})^2 \vec{\pi}^2 - \vec{\pi}^2 (\vec{x} \cdot \vec{\pi})^2 + (\vec{\pi} \cdot \vec{x}) \vec{\pi}^2 (\vec{x} \cdot \vec{\pi}), \\ \left[(\vec{D})^2, \vec{\pi}^2 \right] &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

так что оператор полного квадрата прицельного параметра можно, по-прежнему, выбрать в виде:

$$(\vec{b})^2 = \frac{1}{\vec{\pi}^2} (\vec{D})^2 \frac{1}{\vec{\pi}^2} = \frac{1}{(\vec{\pi}^2)^2} (\vec{D})^2 = \left(\frac{\vec{D}}{\vec{\pi}^2} \right)^2 \frac{1}{(\vec{\pi}^2)^2}. \quad (29)$$

Однако, даже в свободном случае [3] он является тривиальным оператором Казимира в алгебре группы SO(3,1). Нетривиальным оператором Казимира обладает лишь ее подгруппа SO(2,1) [3].

Более «близкую» SO(3,1) алгебру образуют компоненты эрмитовых операторов \vec{J} и \vec{W} :

$$\begin{aligned} \vec{W} &= (\vec{\pi} \times \vec{J}) - i\hbar\vec{\pi}, \quad [J_i, \vec{W}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} \vec{W}_k, \\ [J_i, J_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk} J_k, \quad [\vec{W}_i, \vec{W}_j] = -i\hbar\epsilon_{ijk} \left(\vec{\pi}^2 + \frac{Q^2}{r^2} \right) J_k. \end{aligned} \quad (30)$$

Однако, полный квадрат оператора \vec{W} не является сохраняющейся величиной. Поиску на основе (26), (27), (30) подходящей подалгебры SO(2,1) с сохраняющимся оператором Казимира и его возможной дифференциальной реализации будет посвящена следующая работа.

Авторы благодарны проф. А.Н. Валлу за полезные обсуждения и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коулмен С. Магнитный монополь пятьдесят лет спустя // Успехи физических наук. 1984. Т. 144. Вып. 2. С. 277–346.
2. Jasiw R. Dirac's Magnetic Monopoles (Again), Preprint MIT-CTP-3327, Florida 2002.
3. Валл А.Н., Макеев Н.А. Группа прицельного параметра и ее реализация // Ядерная физика. 1978. Т. 27. Вып. 2. С. 558–564.
4. Монополь Дирака // Сборник статей. М.: Мир. 1970.

Иркутский госуниверситет университет, Иркутск