Секция А. Физика околоземного космического пространства БШФФ-2006. С. 189–191

УДК 534.222

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

И.И. Орлов, В.И. Куркин, А.В. Ойнац

ON THE ONE METHOD OF WAVE EQUATION SOLUTION

I.I. Orlov, V.I. Kurkin, A.V. Oinats

Рассматривается формально строгий метод построения решений волнового уравнения, возникающего в задачах распространения волн в слоисто-неоднородных средах. Изучаемый метод основан на преобразовании однородного дифференциального уравнения к формально неоднородному дифференциальному уравнению, оператор которого допускает точные решения типа приближений геометрической оптики. Полученное неоднородное уравнение стандартным способом сводится к интегральному уравнению вольтерровского типа и далее преобразуется к канонической системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

В работе предлагается схема построения последовательности приближений к точному решению данной системы дифференциальных уравнений. Изложенный метод применим при наличии потерь и не имеет ограничений на масштабы неоднородностей, а его обоснование не связано с использованием асимптотических соображений.

A formally strict method for solution of wave equations, which arise in the problems of wave propagation in a stratified inhomogeneous medium, is considered in the paper. The method is based on transformation of a homogeneous differential equation to a formally inhomogeneous one with operator that admits exact solutions similar to geometrical optics approximations. Derived equation is reduced to Volterra integral equation, which then is transformed to canonical combined differential equations of the first-order.

A scheme of construction of the approximations sequence to a strict solution of the obtained combined differential equations is also presented. The stated method is applicable in presence of losses and has no heterogeneity scale restrictions. Substantiation of the method do not concerned with use of asymptotical expressions.

Введение

Одним из наиболее распространенных методов решения задач, связанных с исследованием распространения волн в неоднородных средах, является приближение геометрической оптики [1]. Однако указанный метод дает приемлемое асимптотическое решение только для случая плавного изменения свойств среды, или, другими словами, параметры среды должны меняться мало на длине волны. В то же время известно [2], что даже небольшие локальные изменения параметров среды могут существенно сказаться на коэффициенте отражения. В этой связи важно иметь метод построения решений волновых уравнений, позволяющий строить последовательные приближения к точному решению.

В данной работе на примере распространения акустических волн в слоисто-неоднородной среде рассматривается формально строгий подход к исследованию волнового уравнения, тесно связанный с приближением геометрической оптики и свободный от ограничений на характер гладкости свойств среды. Предлагается схема построения последовательных приближений к решению акустического уравнения, не использующая асимптотические методы. В основу излагаемого подхода положена основная форма приближения геометрической оптики, без обращения к асимптотическим соображениям [3].

Основная система уравнений

Пусть зависимость параметров среды от координаты x в акустическом случае задается вещественными функциями $\rho(x)$, $c(x)$, где $\rho(x)$ и $c(x)$ – плотность водной среды и скорость распространения звука в ней. Будем также предполагать, что при $x \to -\infty$ и $x \to \infty$ параметры водной среды стремятся к постоянным значениям, равным соответственно ρ_-, c_- и ρ_+, c_+ [2]. В рамках этой модели задача излучения акустических волн может быть сведена к уравнению для функции Грина

$$\frac{d^2G(x,k)}{dx^2} + k^2n^2(x)G(x,k) = \delta(x - x_0), \tag{1}$$

где $k = \omega / c_0$ и $n^2(x) = c_0^2 / c^2(x)$. Рассматриваемая задача может быть обобщена и на случай наклонного падения волны на слоистую среду (см. [2]). Для построения $G(x,k)$ достаточно найти пару линейно независимых решений однородного уравнения

$$\frac{d^2u(x,k)}{dx^2} + k^2n^2(x)u(x,k) = 0. \tag{2}$$

Будем считать, подобно тому, как это делается при выводе приближения геометрической оптики [3], что распространение волн в среде с медленно изменяющимися параметрами близко к распространению волн в однородной среде с характеристиками близкими к параметрам неоднородной среды на рассматриваемом участке. Тогда решения уравнения (2) будем искать в рамках следующей схемы. Введем пару функций

$$f_\pm(x,k) = \frac{1}{\sqrt{n(x)}} \times \\ \times \exp\left(\pm ikn_+x \mp ik\int_x^\infty \left[n(y) - n_+\right]dy\right), \tag{3}$$

асимптотический характер поведения которых специальным образом задается в бесконечности. Эти функции формально удовлетворяют однородному уравнению

$$\frac{d^2 f_\pm(x,k)}{dx^2} + \left\{k^2n^2(x) + \chi(x)\right\} f_\pm(x,k) = 0, \tag{4}$$

где использовано обозначение

$$\chi(x) = -\sqrt{n(x)}\,\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\sqrt{n(x)}} =$$
$$= -\frac{3(n'(x))^2}{4n^2(x)} + \frac{n''(x)}{2n(x)}.$$

Функцию $\chi(x)$ еще называют Шварцианом [4].

Преобразуем однородное уравнение (2) к неоднородному уравнению вида

$$\frac{d^2u(x,k)}{dx^2} + \left\{k^2n^2(x) + \chi(x)\right\}u(x,k) = = \chi(x)u(x,k). \quad (5)$$

Решение уравнения (2) сводится к решению неоднородного уравнения (5). Запись (2) в виде уравнения (5) удобна тем, что функции (3) являются решениями однородного уравнения с оператором в левой части (5). Проделанные преобразования точны и не основаны на асимптотических соображениях. Более того, они не требуют введения ограничений на плавность изменения свойств неоднородной среды.

Действуя стандартным образом, преобразуем неоднородное уравнение (5) к интегральному уравнению, задав соответствующие условия в бесконечности. Для этого построим функцию Грина следующего уравнения:

$$\frac{d^2G(x,k)}{dx^2} + \left\{k^2n^2(x) + \chi(x)\right\}G(x,k) = \delta(x - x_0). \quad (6)$$

Так как полный набор решений однородного уравнения, определяемого оператором в (6), известен, функцию Грина будем искать в виде их линейной комбинации при $x < x_0$:

$$G(x, x_o) = C_+ f_+(x,k) + C_- f_-(x,k). \quad (7)$$

При $x > x_0$ считаем функцию Грина равной 0.

Используя для определения коэффициентов в (7) условие непрерывности и условие на разность производных в точке $x = x_0$, можно получить для функции Грина выражение

$$G(x, x_0, k) = \frac{\theta(x_0 - x)}{2ik\sqrt{n(x)n(x_0)}} \times$$
$$\times \left\{\exp(ik\int_x^{x_0} n(y)dy) - \exp(-ik\int_x^{x_0} n(y)dy)\right\}. \quad (8)$$

Так как функция Грина (8) играет вспомогательную роль, то для нее нет необходимости ставить условия излучения в бесконечности.

С помощью функции Грина (8) уравнение (5) может быть преобразовано к интегральному уравнению вольтерровского типа, которое с учетом (3) записывается в виде

$$u_+(x) = f_+(x) -$$
$$-\frac{1}{2ik}\int_x^{\infty}\chi(y)\left\{f_+(x)f_-(y) - f_-(x)f_+(y)\right\}u_+(y)dy. \quad (9)$$

Введем теперь пару функций, определив их равенствами

$$\begin{cases} u_+^+(x,k) = f_+(x,k)\left\{1 - \dfrac{1}{2ik}\displaystyle\int_x^{\infty}\chi(y)f_-(y,k)u_+(y)dy\right\}, \\ u_+^-(x,k) = f_-(x,k)\dfrac{1}{2ik}\displaystyle\int_x^{\infty}\chi(y)f_+(y,k)u_+(y)dy. \end{cases} \quad (10)$$

Дифференцируя введенные функции, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{du_+^+(x)}{dx} = \dfrac{f_+^{(1)}(x)}{f_+(x)}u_+^+(x) + \dfrac{\chi(x)}{2ikn(x)}u_+(x), \\ \dfrac{du_+^-(x)}{dx} = \dfrac{f_-^{(1)}(x)}{f_-(x)}u_+^-(x) - \dfrac{\chi(x)}{2ikn(x)}u_+(x). \end{cases} \quad (11)$$

Аналогично (11) получается вторая система дифференциальных уравнений, определяющая второе линейно независимое решение исходного волнового уравнения $u_-(x,k)$. Если из компонент $u_+^{\pm}(x,k)$ решения $u_+(x,k)$ образовать первый столбец, а из компонент $u_-^{\pm}(x,k)$ – второй столбец матрицы $Z(x,k)$, то эти системы уравнений в матричной записи примут вид

$$\frac{dZ(x,k)}{dx} = ikn(x)I_3Z(x,k) -$$
$$-\frac{n'(x)}{2n(x)}I_0Z(x,k) + \frac{\chi(x)}{ikn(x)}I_+Z(x,k), \quad (12)$$

где I_α – матрицы Паули, а $I_+ = (I_3 + iI_2)/2$. Если перейти к новой функции с помощью замены $Z(x,k) \Rightarrow Z_1^{[0]}(x,k)/\sqrt{n(x)}$, то (12) запишется в виде

$$\frac{dZ_1^{[0]}(x,k)}{dx} = ikn(x)I_3Z_1^{[0]}(x,k) +$$
$$+\frac{\chi(x)}{ikn(x)}I_+Z_1^{[0]}(x,k). \quad (13)$$

Если воспользоваться выражением для I_+ и ввести обозначения

$$\alpha_3^{[0]}(x) = kn(x)\left(1 - \frac{\chi(x)}{2k^2n^2(x)}\right),$$
$$\alpha_2^{[0]}(x) = \frac{\chi(x)}{2kn(x)},$$

то уравнение (13) можно записать в виде

$$\frac{dZ_1^{[0]}(x,k)}{dx} = i\alpha_3^{[0]}(x)I_3Z_1^{[0]}(x,k) +$$
$$+\alpha_2^{[0]}(x)I_2Z_1^{[0]}(x,k). \quad (14)$$

Здесь нижний индекс у коэффициентов соответствует индексу матрицы Паули, при которой они стоят. Нижний индекс у искомой матрицы указывает на отсутствующее слагаемое с соответствующей матрицей Паули. Верхний индекс обозначает номер проводимой итерации.

Схема построения решения

Рассмотрим схему построения последовательных приближений к точному решению, основанную на уравнении (14). Для этого, с целью фиксации рассматриваемого множества решений, потребуем выполнения условия

$$\lim_{x\to+\infty} Z_1^{[0]}(x,k)\exp(-ikI_3x) = I_0. \tag{15}$$

Исключим из (14) слагаемое при матрице Паули I_3. Для этого введем функцию $Y_3^{[1]}(x,k)$, являющуюся решением уравнения

$$\frac{dY_3^{[1]}(x,k)}{dx} = i\alpha_3^{[0]}(x)I_3Y_3^{[1]}(x,k) \tag{16}$$

с условием в бесконечности типа (15). В случае вещественных $n(x), k$ функция $\alpha_3^{[0]}(x)$ будет вещественной, а $Y_3^{[1]}(x,k)$ будет иметь вид суммы экспонент с матричными коэффициентами

$$\begin{aligned} Y_3^{[1]}(x) &= \exp\left\{i\beta_3^{[1]}(x)I_3\right\} = \\ &= I_0\cos\left[\beta_3^{[1]}(x)\right] + iI_3\sin\left[\beta_3^{[1]}\right], \end{aligned} \tag{17}$$

где введено обозначение

$$\beta_3^{[1]}(x) = \alpha_3^{[0]}(\infty)x - \int_x^\infty \left\{\alpha_3^{[0]}(y) - \alpha_3^{[0]}(\infty)\right\}dy.$$

Такая форма вводимой функции выбрана для обеспечения выполнения условия (15) для матрицы $Y_3^{[1]}(x,k) = Y_3^{[1]}(x)$. $Y_3^{[1]}(x,k)$ имеет вид, аналогичный приближению геометрической оптики, но с иной фазой.

Если ввести обозначение

$$Z_1^{[0]}(x,k) = Y_3^{[1]}(x,k)Z_3^{[1]}(x,k),$$

то (14) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dZ_3^{[1]}(x)}{dx} &= \alpha_2^{[0]}(x)\times \\ &\times\left\{I_2\cos\left[2\beta_3^{[1]}(x)\right] - I_1\sin\left[2\beta_3^{[1]}(x)\right]\right\}Z_3^{[1]}(x). \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь использовано свойство $I_2I_3 = iI_1$. Вводя обозначения

$$\alpha_2^{[1]}(x) = \alpha_2^{[0]}(x)\cos\left[2\beta_3^{[1]}(x)\right],$$

$$\alpha_1^{[1]}(x) = -\alpha_2^{[0]}(x)\sin\left[2\beta_3^{[1]}(x)\right],$$

уравнение (18) можно записать в виде, подобном (14):

$$\frac{dZ_3^{[1]}(x)}{dx} = \alpha_2^{[1]}(x)I_2Z_3^{[1]}(x) + \alpha_1^{[1]}(x)I_1Z_3^{[1]}(z). \tag{19}$$

Далее, исключая из (19) сначала слагаемое при матрице Паули I_2, а в получившемся уравнении слагаемое при матрице I_1, придем к уравнению, аналогичному (14), решение которого можно искать, повторно проводя вышеописанные операции. Таким образом, рассмотренный алгоритм позволяет рекуррентно строить последовательные приближения к точному решению в рамках формально строгой схемы.

Выводы

Изложенный в работе подход к изучению решений уравнения (1) основан на том, что если мы знаем решение уравнения с близким в некотором смысле коэффициентом, то можно поставить задачу на изучение свойств решений нужного уравнения с помощью интегрального уравнения, получающегося из неоднородного дифференциального уравнения. Выбор решения вспомогательного уравнения, используемого для построения интегрального уравнения, определяется конкретной задачей и может быть никак не связан с методом геометрической оптики. Таким образом, представленный подход носит общий характер.

Предложенная в работе рекуррентная схема построения последовательности приближений к точному решению формально не зависит от каких-либо предположений о коэффициентах исходного уравнения и может быть использована при исследовании распространения радиоволн в слоистых средах.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05–05–64634).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
2. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Изво АН СССР, 1957. 502 с.
3. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: ГИФМЛ, 1960. 552 с.
4. Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1985. Т. 5. 1246 с.

Институт солнечно-земной физики СО РАН, Иркутск,
oinats@iszf.irk.ru