

О РАСЧЕТЕ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ ДЛЯ СРЕДЫ С ПОТЕРЯМИ

И.И. Орлов, А.В. Ойнац

ON THE REFLECTION COEFFICIENT CALCULATION IN AN ABSORBING MEDIUM

I.I. Orlov, A.V. Oinats

В статье предлагается методика численного решения уравнения Рикатти на коэффициент отражения для слоисто-неоднородной поглощающей среды. Показывается, что в рамках рассматриваемой методики волновое уравнение может быть сведено к системе линейных дифференциальных уравнений, из решения которой и получается решение уравнения Рикатти. Приводятся результаты численного расчета для слоев симметричной и параболической формы по предложенной методике.

Введение

Распространение волн в слоисто-неоднородных средах описывается волновым уравнением [1]

$$\frac{d^2U}{dx^2} + k^2\varepsilon'(x, \omega)U = 0, \quad (1)$$

где U – функция, описывающая поле волны, $k = \frac{\omega}{c}$ –

волновое число, c – скорость света. Например, (1) описывает нормальное падение радиоволны на слоисто-неоднородную плазму с диэлектрической

проницаемостью $\varepsilon'(x, \omega) = 1 - \frac{q(x)k}{k + i\bar{\nu}}$, где $\bar{\nu} = \frac{\nu}{c}$, ν –

эффективная частота соударений, а $q(x)$ – форма слоя.

Точные решения уравнения (1) в аналитическом виде известны лишь для небольшого числа случаев [1, 2], поэтому возникает необходимость разработки устойчивых численных методов, позволяющих с приемлемой точностью и минимальными машинными затратами находить решение при произвольном законе изменения формы слоя.

В данной статье показывается, что уравнение (1) может быть сведено к системе уравнений первого порядка для частей полного решения, которые описывают распространение энергии в одном из двух возможных направлений, и поэтому локально аналогичных бегущим волнам в свободном пространстве [3]. Полученная система уравнений для частей полного решения позволяет получить уравнение типа Рикатти на функцию отражения. Тем самым, построив решение данной системы уравнений, мы можем получить функцию отражения. Для случая аппроксимации формы слоя ступеньками приводятся схема численного интегрирования полученной системы уравнений и результаты расчета модуля и фазы коэффициента отражения для слоев параболической и симметричной формы.

Теоретическая часть

Для построения решения уравнения (1) перепишем его формально в виде неоднородного по аналогии с тем, как это сделано в работе [4]:

$$\frac{d^2U}{dx^2} + k^2U = Q(x, k)U, \quad (2)$$

где $Q(x, k) = \frac{q(x)k}{k + i\bar{\nu}}$. Уравнение (2) можно записать в форме интегрального уравнения типа Вольтера [4]:

$$U_{\pm}(x, k) = e^{\pm ikx} + \frac{1}{2ik} \int_x^{\infty} (e^{ik(x'-x)} - e^{-ik(x'-x)}) Q(x', k) U_{\pm}(x', k) dx'. \quad (3)$$

Структура ядра оператора позволяет представить интегральное уравнение (3) в виде системы связанных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} U_+^+(x, k) = e^{ikx} \left[1 - \frac{1}{2ik} \int_x^{\infty} e^{-ikx'} Q(x', k) U_+^+(x', k) dx' \right], \\ U_+^-(x, k) = e^{-ikx} \frac{1}{2ik} \int_x^{\infty} e^{ikx'} Q(x', k) U_+^-(x', k) dx'. \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} U_-^+(x, k) = e^{ikx} \frac{1}{2ik} \int_x^{\infty} e^{-ikx'} Q(x', k) U_-^+(x', k) dx', \\ U_-^-(x, k) = e^{-ikx} \left[1 - \frac{1}{2ik} \int_x^{\infty} e^{ikx'} Q(x', k) U_-^-(x', k) dx' \right]. \end{cases} \quad (5)$$

Очевидно, что функции связаны соотношениями $U_+ = U_+^+ + U_+^-$ и $U_- = U_-^+ + U_-^-$. Дифференцируя (4) и (5) и используя (3), легко показать, что введенные функции удовлетворяют системам дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dU_+^+}{dx} = ikU_+^+ + \frac{1}{2ik} QU_+, \\ \frac{dU_+^-}{dx} = -ikU_+^- - \frac{1}{2ik} QU_+, \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\begin{cases} \frac{dU_-^+}{dx} = ikU_-^+ + \frac{1}{2ik} QU_-, \\ \frac{dU_-^-}{dx} = -ikU_-^- - \frac{1}{2ik} QU_-. \end{cases} \quad (6.2)$$

Таким образом, построение решения волнового уравнения (1) может быть сведено к решению систем дифференциальных уравнений первого порядка (6.1), (6.2). Хотя введенные функции (5) и (6) по отдельности не являются решениями уравнения (1), описанное разбиение полного решения на части имеет простой физический смысл [3], так как эти части связаны с переносом энергии в двух противоположных направлениях

Системы уравнений (6.1), (6.2) можно записать в компактной матричной форме, если ввести так называемую фундаментальную матрицу

$$U = \begin{pmatrix} U_+^+ & U_-^+ \\ U_+^- & U_-^- \end{pmatrix}$$

$$\frac{dU}{dx} = ik\sigma_3 U + \frac{1}{ik} Q \sigma_+ U, \quad (7)$$

где $\sigma_+ = (\sigma_3 + i\sigma_2)/2$, а σ_- – матрицы Паули.

В рассматриваемой схеме естественно определить функцию отражения отношением элементов фундаментальной матрицы $R_+(x, k) = \frac{U_+^-(x, k)}{U_+^+(x, k)}$. В

этом случае из (7) можно получить уравнение типа Рикатти на функцию отражения [2]:

$$\frac{dR_+}{dx} = -2ikR_+ - \frac{1}{2ik} Q(1 + R_+)^2. \quad (8)$$

Так как полное решение нам известно только при $x \rightarrow \infty$, то естественным условием нормировки решений будет условие

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-ik\sigma_3 x} U = \sigma_0, \quad (9)$$

следующее из факта отсутствия среды в бесконечности. Наложение условия (9) приводит к тому, что при численных расчетах счет необходимо вести справа налево, т.е. фактически от $+\infty$. Реально же достаточно вести счет от значений $x \gg 0$, при которых можно считать, что слой уже отсутствует.

Полное решение в области $x \sim 0$ под слоем является суперпозицией экспоненциально затухающих и возрастающих волн, поэтому при приближении к источнику поля справа значения отдельных элементов матрицы $U(x, k)$ должны экспоненциально возрастать. Однако функция отражения $R_+(x, k)$, определяемая отношением элементов фундаментальной матрицы, по модулю не может превышать единицу. Пользуясь этим фактом, для сохранения требуемой точности при численном интегрировании (7) можно на каждом шаге (или по мере необходимости) производить перенормировку столбцов $U(x, k)$ с помощью умножения справа на диагональную матрицу, так чтобы норма элементов столбцов $U(x, k)$ оставалась ограниченной. Таким образом, интегрируя (7) и производя в случае необходимости перенормировку, мы фактически решаем уравнение (8) для комплексной функции отражения.

Расчетная часть

Применение описанной выше методики возможно при использовании различных моделей среды. В простейшем случае форму слоя можно задавать ступеньками. Разобьем интервал $[x_a, x_b]$, на котором требуется определить функцию отражения, на N отрезков так, чтобы в пределах каждого отрезка функцию, задающую форму слоя, можно было считать постоянной $q(x \in [x_{m+1}, x_m]) = q_m$. На каждом из отрезков постоянства коэффициентов уравнение (7) можно представить в виде:

$$\frac{dX(x)}{dx} = A_m X(x),$$

$$\text{где } A_m = ik \begin{pmatrix} 1 - \frac{q_m}{2k(k - i\bar{\nu})} & -\frac{q_m}{2k(k - i\bar{\nu})} \\ \frac{q_m}{2k(k - i\bar{\nu})} & -\left(1 - \frac{q_m}{2k(k - i\bar{\nu})}\right) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Решение на отрезке постоянства согласно [5] будет выражаться следующим образом:

$$X_m(x) = \exp(ikn_m(x - x_m)) P_{m,+} + \exp(-ikn_m(x - x_m)) P_{m,-}, \quad (11)$$

где $n_m = \sqrt{1 - \frac{q_m}{ik(\bar{\nu} + ik)}}$, $\lambda_{m,\pm} = \pm ikn_m$ – собственные

значения матрицы A_m , $P_{m,\pm} = \frac{A_m - \lambda_{m,\mp} I}{\lambda_{m,\pm} - \lambda_{m,\mp}}$ – проекторы

на собственные подпространства. Решения (11) нормированы на единичную матрицу в правых концах рассматриваемого отрезка. Сшивая решения по непрерывности в точках разрыва коэффициента $x = x_m$, получим искомое решение на всем интересующем нас интервале. Функция отражения соответственно будет равна $R_+(x, k) = \frac{X_{21}(x, k)}{X_{11}(x, k)}$.

В качестве иллюстрации на рис. 1 представлены зависимости коэффициента отражения $|R_{\text{расч}}|^2$ для симметричного непоглощающего слоя, рассчитанные при различных значениях толщины S . Число отрезков разбиения бралось постоянным $N = 900$. Ошибка расчетного значения по сравнению с точным аналитическим выражением [1, с. 311] для различных значений толщины слоя не превышает нескольких процентов.

На рис. 2 представлены результаты расчета $-\ln(R_{\text{расч}})$ для параболического слоя при полутолщине $z_m = 100$ км и различных значениях эффективного

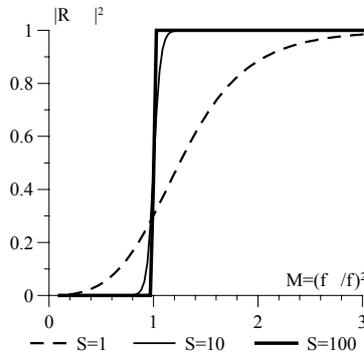


Рис. 1. Зависимости $|R_{\text{расч}}|^2$ для симметричного слоя без поглощения при различной толщине и числе отрезков $N = 900$.

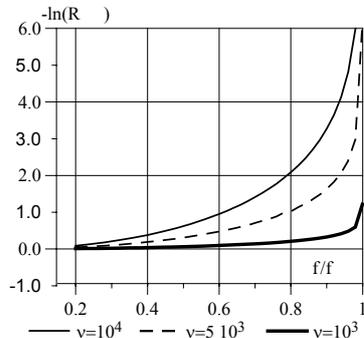


Рис. 2. Зависимости $-\ln(R_{\text{расч}})$ для параболического слоя при полутолщине 100 км и для различных значений эффективного числа соударений.

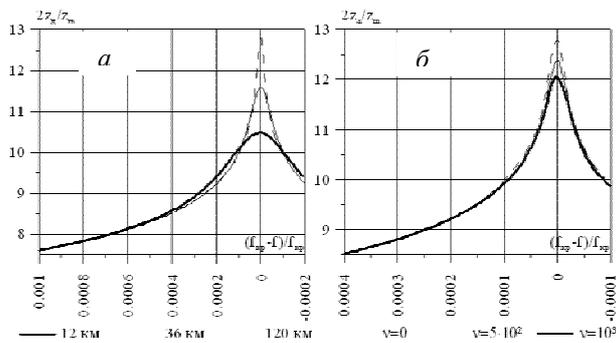


Рис. 3. Высотно-частотные характеристики для параболического слоя: *a* – при различных значениях полутолщины слоя в отсутствие поглощения; *б* – для полутолщины слоя 120 км и для различных значений эффективного числа соударений.

числа соударений $\nu = 10^3, 5 \cdot 10^3, 10^4$. Максимальная длина отрезка постоянства не превышала 0.5λ . В сравнении с аналитическим выражением, представленным в [1, с. 511], относительная погрешность расчета также не превышает нескольких процентов.

Вычисление фазы коэффициента отражения $\arg R$ по предложенной выше методике также согласуется с точными решениями. На рис. 3 приведены рассчитанные зависимости первой производной фазы от частоты (высотно-частотные характеристики) для параболического слоя с $f_{kp} = 10$ МГц при различных полутолщинах в отсутствие поглощения (*a*) и при различных значениях эффективного числа соударений для полутолщины $z_m = 120$ км (*б*). В отсутствие поглощения различия между рассчитанными и теоретическими значениями [1, с. 524; 6] не превосходят десятых долей процента. В случае поглощения высотно-частотные характеристики также согласуются с приведенными в [1, 6].

Заключение

В работе предложена методика численного решения уравнения типа Рикатти для функции отражения от слоисто-неоднородной среды. Методика позволяет проводить расчеты при различных способах аппроксимации формы слоя, а также при наличии поглощения в среде.

Тестирование методики для случая аппроксимации формы слоя ступенчатой функцией показало, что рассчитанные комплексные коэффициенты отражения хорошо согласуются с известными аналитическими выражениями для симметричного и параболического слоев.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 03-05-64527 и № 05-05-64634) и в рамках гранта НШ-272.2003.5 государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967. 684 с.
2. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
3. Орлов И.И. О переносе электромагнитной энергии в слоисто-неоднородных средах // Исследование по геомагнетизму, аэронавигации и физике Солнца. М.: Наука, 1995. Вып. 103. С. 142–148.
4. Фаддеев Л.Д. Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера // Труды МИ им. В.А. Стеклова, LXXIII (Краевые задачи математической физики 2) М.–Л.: АН СССР. 1964. С. 314–336.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
6. Rydbeck O. On the propagation of radio waves. Trans. Chalmers Univ. Sweden. N 34. 1994.

Институт солнечно-земной физики СО РАН, Иркутск