Труды VIII Конференции молодых ученых. Секция «Астрофизика», БШФФ-2005. С. 233–235

УДК 539.12

НАИБОЛЕЕ ОБЩИЙ ВИД ЛАГРАНЖИАНА ПОЛЯ РАРИТЫ–ШВИНГЕРА

А.Е. Калошин, В.П. Ломов, А.М. Моисеева

THE MOST GENERAL FORM OF RARITA–SCHWINGER FIELD LAGRANGIAN

A.E. Kaloshin, V.P. Lomov, A.M. Moiseeva

В данной работе поставлена задача по определению наиболее общего вида лагранжиана поля Рариты–Швингера и доказательству наличия физических мод в секторе спина 1/2 поля Рариты–Швингера. Для решения первой задачи был использован введенный в работе [4] γ – матричный базис и явно поставлены условия, которым должен удовлетворять искомый лагранжиан. Это следующие условия: уравнения движения должны быть дифференциальными уравнениями первого порядка, лагранжиан должен быть эрмитовым и члены, отвечающие спину 3/2, имеют стандартный вид. В результате, был получен четырех параметрический лагранжиан. Требование отсутствия полюсов в секторе спина 1/2 приводит наш лагранжиан к лагранжиану, данному в работе [5], и стандартному лагранжиану.

Для решения второй задачи был использован полученный лагранжиан. Использование Λ-базиса, определенного в работе [4], позволило ввести матричное представление сектора спина 1/2 и решить задачу о диагонализации матриц. В результате удалось явно показать, что в секторе спина 1/2 имеется два представления спина 1/2 разной четности.

The problem of the most general form of Rarita–Schwinger field lagrangian finding and the proof of the existence of physical modes in spin sector 1/2 of Rarita–Schwinger field are formulated in the paper. In order to solve the problem we use the γ-matrix basis introduced in paper [4] and we explicitly give conditions that must be met by desired lagrangian. These conditions are as follows: motion equations must be first-order differential equations, lagrangian must be hermitean and terms corresponding to spin 3/2 have standard form. This results in four parametric lagrangian. It is the absence of poles in spin sector 1/2 that the lagrangian turns into lagrangian given in paper [5] and standard lagrangian.

In order to prove the second problem we use the obtained lagrangian. Using the Λ-basis defined in paper [4] we introduce matrix notation of spin sector 1/2 and solve the problem of diagonalization of matrices. As the result, we explicitly show the presence of two spin 1/2 physical modes with opposite parity in spin sector 1/2.

Введение

В физике элементарных частиц известны частицы целого и полуцелого спинов, включая высшие спины. В большинстве своем частицы полуцелого спина ≥3/2 это адронные резонансы — короткоживущие частицы, распадающиеся за счет сильного взаимодействия. Такие частицы возникают при столкновении космических лучей средних и высших энергий с атмосферой Земли. Примером частицы спина ≥3/2 может служить семейство частиц под названием Δ-изобара. Они характеризуются спином 3/2 и изоспином 3/2. Это электрически заряженные частицы, но основное их взаимодействие происходит за счет сильных сил. Они рождаются в столкновениях нуклонов и пионов и распадаются, в основном, на эти же частицы. Для определения основных характеристик космических лучей и их источников необходимо знать сечения рассеяния частиц космических лучей при соответствующих энергиях.

В современной литературе поле, соответствующее частицам спина 3/2 называют полем Рариты–Швингера. Определение характеристик частиц спина 3/2, сталкивается с рядом теоретических трудностей. Они были изложены в работах Джонсона, Сударшана [1], Вело, Званзигера [2] и обобщены в работе Кобаяши, Такахаши [3]. Эти трудности связаны с проблемами введения электромагнитного взаимодействия для поля Рариты–Швингера и распространения взаимодействующего поля, нарушающего причинность. Другой проблемой для свободного поля Рариты–Швингера служит наличие представлений спина $1/2$. В настоящей работе мы ставим задачу по поиску самого общего лагранжиана свободного поля Рариты–Швингера и исследованию характеристик всех его мод.

Лагранжиан поля Рариты–Швингера

Чтобы получить самый общий вид лагранжиана свободного поля Рариты–Швингера, наложим на лагранжиан поля следующие условия:

1. уравнения движения должны быть дифференциальными уравнениями первого порядка;
2. лагранжиан должен быть эрмитовым;
3. члены, отвечающие спину 3/2, имеют стандартный вид.

Этих требований достаточно, чтобы определить лагранжиан. В результате, мы получим наиболее общий вид лагранжиана свободного поля Рариты–Швингера. Для того чтобы найти явный вид лагранжиана будем исходить из разложения по γ-матричному базису (см. [4]). Лагранжиан свободного поля Рариты–Швингера запишем в таком виде[1]

$$\begin{aligned} &L = \Psi_m \Lambda^{mn} \Psi_n, \\ &\Lambda^{mn} = g^{mn} s_1 + \hat{p} g^{mn} s_4 + s_5 p^m \gamma^n + \\ &+ s_6 p^n \gamma^m + s_7 \sigma^{mn} + i\varepsilon^{mnlr} \gamma^5 \gamma_r p_l \end{aligned}.$$

Здесь Λ^{mn} — спин-тензор, обратный свободный пропагатор; и учтено первое требование. Второе требование, записанное для Λ^{mn} в виде $\gamma^0 \Lambda^{\dagger}_{mn} \gamma^0 = \Lambda_{nm}$, говорит, что s_1, s_4, s_7, s_{10} —

[1] Обозначения: $\varepsilon_{0123} = +1$, $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$,
$\gamma_m \gamma_n \gamma_l = g_{mn}\gamma_l + g_{nl}\gamma_m - g_{ml}\gamma_n + i\varepsilon_{mnlr}\gamma^5\gamma^r$.

вещественные параметры, а $s_6 = s_5^*$. Из третьего условия вытекает связь между параметрами s_1, s_7 и s_4, s_{10}:

$$\begin{cases} s_7 &= M + s_1 \\ s_{10} &= s_4 - 1 \end{cases}$$

Удобно сменить обозначения

$s_1 = M\rho_1$, $s_4 = r_4$, $s_5 = r_5 + ia_5$.

Здесь мы выделили множитель массы в s_1, и представили явно комплексность s_5. Мы получаем, таким образом, что лагранжиан свободного поля Рариты–Швингера в самом общем случае зависит от четырех параметров: ρ_1, r_4, r_5, a_5. Если в качестве третьего условия взять уравнения

$$(\hat{p} - M)\Psi_{\mathrm{m}} = 0,\ p_{\mathrm{m}}\Psi^{\mathrm{m}} = 0,\ \gamma_{\mathrm{m}}\Psi^{\mathrm{m}} = 0,$$

что равносильно отсутствию полюсов в секторе спина 1/2, т.е. равенство нулю коэффициентов у членов E и E^2 в Δ_1, Δ_2, которые возникают при обращении обратного свободного пропагатора (см. [4]):

$$\Delta_1 = M^2(-3 - 4\rho_1) + 2EM(r_4 - r_5 - \rho_1) + \\ + E^2(-3a_5^2 - 3r_5^2 - 3r_4^2 - 6r_4 r_5 + 4r_5 + 2r_4),$$

$$\Delta_2 = \Delta_1(E \to -E),$$

то это дает еще два условия на имеющиеся четыре параметра, в результате чего мы получим только два независимых параметра. Этот результат был получен ранее в [5] и там же была показана его связь с общепринятым лагранжианом.

θ-преобразование

Рассмотрим преобразование, не нарушающее условий, накладываемых на лагранжиан, не меняющее положение особенностей пропагатора и вид лагранжиана, которое будем называть θ-преобразованием

$$\Psi_{\mathrm{m}} \to \Psi'_{\mathrm{m}} = \theta_{\mathrm{mn}}(b)\Psi^{\mathrm{n}},$$

$$\Delta_{1.2} \to (1+4b)^2\Delta_{1.2},$$

$$\theta_{\mathrm{mn}}(b) = g_{\mathrm{mn}} + b\gamma_{\mathrm{m}}\gamma_{\mathrm{n}}.$$

В результате θ-преобразования меняются параметры лагранжиана:

$$\mathrm{L}(\rho_1, r_4, r_5, a_5) \to \mathrm{L}(\rho'_1, r'_4, r'_5, a'_5).$$

Это позволяет сделать вывод, что θ-преобразование меняет параметризацию лагранжиана, но не является динамической симметрией.

Физические моды

Сектор спина 3/2 и сектор спина 1/2

В работе [4] были введены $\hat{p}$ и Λ-базисы. Используя $\hat{p}$ или Λ-базис, произвольный спин-тензор T_{mn} можно разложить, соответственно, по формулам

$$T_{\mathrm{mn}} = (T_1 + \hat{p}T_2)\mathcal{P}^{3/2}_{\mathrm{mn}} + (T_3 + \hat{p}T_4)\mathcal{P}^{1/2}_{11\mathrm{mn}} + \\ + (T_5 + \hat{p}T_6)\mathcal{P}^{1/2}_{22\mathrm{mn}} + (T_7 + \hat{p}T_8)\mathcal{P}^{1/2}_{21\mathrm{mn}} + (T_9 + \hat{p}T_{10})\mathcal{P}^{1/2}_{12\mathrm{mn}}$$

или

$$T_{\mathrm{mn}} = \sum_{A=1}^{10} \overline{T}_A \mathcal{P}^A_{\mathrm{mn}}.$$

Используя свойства $\hat{p}$ или Λ-базисов произвольный спин-тензор T_{mn} можно разделить на сектор спина 3/2 и сектор спина 1/2, взаимно ортогональные друг другу, следующим образом

$$T_{\mathrm{mn}} = T^{3/2}_{\mathrm{mn}} + T^{1/2}_{\mathrm{mn}},$$

$$T^{3/2}_{\mathrm{ma}} T^{1/2\mathrm{a}}_{\mathrm{n}} = 0,$$

$$T^{3/2}_{\mathrm{mn}} = (T_1 + \hat{p}T_2)\mathcal{P}^{3/2}_{\mathrm{mn}} = \overline{T}_1\mathcal{P}^1_{\mathrm{mn}} + \overline{T}_2\mathcal{P}^2_{\mathrm{mn}},$$

$$T^{1/2}_{\mathrm{mn}} = (T_3 + \hat{p}T_4)\mathcal{P}^{1/2}_{11\mathrm{mn}} + (T_5 + \hat{p}T_6)\mathcal{P}^{1/2}_{22\mathrm{mn}} + \\ + (T_7 + \hat{p}T_8)\mathcal{P}^{1/2}_{21\mathrm{mn}} + (T_9 + \hat{p}T_{10})\mathcal{P}^{1/2}_{12\mathrm{mn}} = \sum_{A=3}^{10} \overline{T}_A \mathcal{P}^A_{\mathrm{mn}}.$$

Это разделение соответствует интерпретации, даваемой для компонент пропагатора. Сектор спина 3/2 отвечает за описание и характеристики спина 3/2. Сектор спина 1/2 отвечает за описание и характеристики представлений спина 1/2. Кроме этого, удобство разделения проявляется и при произведении двух спин-тензоров: соответствующие спиновые сектора спин-тензоров перемножаются. Для сектора спина 1/2 удобно ввести представление в виде симметричных матриц

$$T^{1/2}_{\mathrm{mn}} = e^t_{\mathrm{m}}(\Lambda^+ T^{1/2+} + \Lambda^- T^{1/2-})e_{\mathrm{n}},$$

$$e^t_{\mathrm{m}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\pi_{\mathrm{m}}}{\sqrt{\pi^2}} & \dfrac{p_{\mathrm{m}}}{\sqrt{p^2}} \end{pmatrix},$$

$$T^{1/2\pm} = \begin{pmatrix} T_3 \mp ET_4 & T_7 \mp ET_8 \\ T_9 \pm ET_{10} & T_5 \pm ET_6 \end{pmatrix}.$$

Произведению секторов спина 1/2 соответствует произведение матриц с одинаковыми индексами.

Диагонализация матриц сектора спина 1/2

Обратный свободный пропагатор поля Рариты–Швингера S_{mn} можно, как и любой спин-тензор, разделить на сектор спина 3/2 и сектор спина 1/2

$$S^{3/2}_{\mathrm{mn}} = (-M + \hat{p})\mathcal{P}^{3/2}_{\mathrm{mn}} = \left(\sqrt{p^2} - M\right)\mathcal{P}^1_{\mathrm{mn}} + \left(-\sqrt{p^2} - M\right)\mathcal{P}^2_{\mathrm{mn}},$$

$$S^{1/2}_{\mathrm{mn}} = e^t_{\mathrm{m}}\left(\Lambda^+ S^{1/2+} + \Lambda^- S^{1/2-}\right)e_{\mathrm{n}},$$

$$S^{1/2\pm} = \begin{pmatrix} M(2+3\rho_1) \mp E(3r_4 - 2) \\ \sqrt{3E^2}\,r_5 \pm E\sqrt{\dfrac{3}{E^2}}M(1+\rho_1) \\ \sqrt{3E^2}\,r_5 \pm E\sqrt{\dfrac{3}{E^2}}M(1+\rho_1) \\ M\rho_1 \pm E(r_4 + 2r_5) \end{pmatrix}.$$

Вопрос об одновременной диагонализации матриц $S^{1/2\pm}$ решается положительно. Именно. следуя ниже приведенной схеме, матрицы $S^{1/2\pm}$ можно одновременно диагонализовать:

1) выбрать область параметров, в которой множители перед E у элементов главной диагонали одного знака;

2) сделать преобразование:

$$S^{1/2\pm} \to S^{1/2\pm'} = \Omega^{-1}(\beta_1) S^{1/2\pm} \Omega(\beta_1),$$

где $\Omega(\beta_1)$ Ï ортогональная матрица 2×2, чтобы избавиться от члена линейного[2] по E у элементов побочной диагонали;

3) повторить шаг 1);

4) сделать преобразование

$$S^{1/2\pm'} \to S^{1/2\pm''} = \Gamma S^{1/2\pm'} \Gamma,$$

где Γ — симметричная матрица 2×2, чтобы нормировать множитель при E на единицу у элементов главной диагонали;

5) сделать преобразование

$$S^{1/2\pm''} \to S^{1/2\pm'''} = \Omega^{-1}(\beta_2) S^{1/2\pm''} \Omega(\beta_2),$$

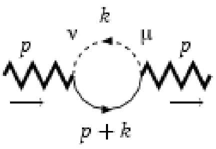
чтобы избавиться от оставшегося члена у элементов побочной диагонали.

В результате мы получим матрицы

$$S^{1/2\pm'''} = \begin{pmatrix} m_1 \pm E & 0 \\ 0 & -m_2 \pm E \end{pmatrix}.$$

Физические моды сектора спина 1/2

Рассмотрим процесс рассеяния пиона на нуклоне, с образованием Δ–изобары, $\pi N \to \Delta \to \pi N$



где был взят лагранжиан взаимодействия

$$\mathrm{L}_{int} = g\overline{\Psi}_{\mathrm{m}} (g^{\mathrm{mn}} + a\gamma^{\mathrm{m}}\gamma^{\mathrm{n}}) \Psi \partial_{\mathrm{n}} \varphi + h.c..$$

Матричный элемент этого процесса вычисляется по формуле

$$m = -g^2 \overline{u}(p_2) k_{2\mathrm{m}} \theta^{\mathrm{ma}}(a) G_{\mathrm{ab}} \theta^{\mathrm{bn}}(a) k_{1\mathrm{n}} u(p_1),$$

где G_{ab} — пропагатор поля Рариты–Швингера, $\theta_{\mathrm{mn}}(a) = g_{\mathrm{mn}} + a\gamma_{\mathrm{m}}\gamma_{\mathrm{n}}$. Этот матричный элемент можно разделить на два слагаемых, которые порождаются соответственно сектором спина 3/2 и сектором спина 1/2

$$m = m^{3/2} + m^{1/2}.$$

Выпишем явно член, отвечающий сектору спину 1/2

$$m^{1/2} = -g^2 \overline{u}(p_2) \left(\left[\Lambda^+ \frac{A^2(-E)}{m_1 + E} + \Lambda^- \frac{A^2(E)}{m_1 - E} \right] + \right.$$
$$\left. + \left[\Lambda^+ \frac{B^2(-E)}{-m_2 + E} + \Lambda \frac{B^2(E)}{-m_2 - E} \right] \right) u(p_1),$$

где $A(E)$, $B(E)$ известные четные функции $E = \sqrt{p^2}$.

Для того чтобы определить характеристики мод сектора спина 1/2, сравним $m^{1/2}$ с матричными элементами двух систем: система «скаляр Ï фермион» и система «псевдоскаляр Ï фермион» с лагранжианами взаимодействия

$$\mathrm{L}_{\mathrm{int}} = g\Psi\Psi_N \varphi + h.c.,$$

и, соответственно,

$$\mathrm{L}_{int} = g\Psi\gamma^5\Psi_N \varphi + h.c.$$

Матричные элементы процесса $\pi N \to N^* \to \pi N$

$$m = -g^2 \overline{u}(p_2) \left(\Lambda^+ \frac{1}{E - M} + \Lambda^- \frac{1}{-E - M} \right) u(p_1),$$

и, соответственно,

$$m = g^2 \overline{u}(p_2) \left(\Lambda^- \frac{1}{E - M} + \Lambda^+ \frac{1}{-E - M} \right) u(p_1).$$

В результате мы видим, что в секторе спина 1/2 имеется две физические моды — состояния со спином 1/2 и разной четностью.

Заключение

В работе мы поставили условия, которым должен удовлетворять лагранжиан, чтобы описать с его помощью свободное поле Рариты–Швингера и нашли лагранжиан, который удовлетворяет поставленным условиям. При этом, возможно, была выбрана не самая удобная параметризация, что, однако, не меняет сути дела.

Используя этот лагранжиан и обратный свободный пропагатор поля Рариты–Швингера, следующий из этого лагранжиана, был исследован сектор спина 1/2 поля Рариты–Швингера. В результате мы нашли, что в секторе спина 1/2 есть две физические моды – состояния со спином 1/2, массами m_1 и m_2 с противоположными четностями.

Также с помощью этого лагранжиана можно исследовать две возможности: оставить две степени свободы в секторе спина 1/2 физическими при перенормировке или сделать их нефизическими.

Данная работа поддержана частично грантом РФФИ 05-02-17722а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Johnson K., Sudarshan E. C. G. // Ann. Phys. (N.Y.) 1969. 13. P. 126

2. Velo G., Zwanzinger D. // Phys. Rev. 1969. 186. P. 1337

3. Kobayashi M., Takahashi Y.//J. Phys. A 1987. 20. P. 6581

4. Kaloshin A.E., Lomov V.P. The Rarita–Schwinger field: dressing procedure and spin-parity content // hep-ph/0409052

5. Pilling T. Symmetry of Massive Rarita–Schwinger fields // Int. J. Mod. Phys. A. 2005. 20. P. 2715–2742.

Иркутский государственный университет, кафедра теоретической физики

[2] Здесь имеется в виду E, которое возникает при записи элементов матриц через коэффициенты разложения по $\hat{p}$ – базису, а не зависимость самих коэффициентов от E.