

## СТРУКТУРА СОБСТВЕННЫХ АЛЬФВЕНОВСКИХ КОЛЕБАНИЙ С $m \gg 1$ В ДИПОЛЬНОЙ МАГНИТОСФЕРЕ С ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМОЙ

Д.А. Козлов, А.С. Леонович

## THE STRUCTURE OF STANDING ALFVEN WAVES WITH $m \gg 1$ IN A DIPOLE MAGNETOSPHERE WITH ROTATING PLASMA

D.A. Kozlov, A.S. Leonovich

Проведено теоретическое исследование структуры и спектра стоячих альфвеновских волн в дипольной магнитосфере с вращающейся плазмой. Найдены решения уравнений, описывающих продольную (вдоль силовых линий) и поперечную (поперек магнитных оболочек) структуру стоячих альфвеновских волн с большими азимутальными волновыми числами  $m \gg 1$ . Построены спектры нескольких первых гармоник полоидальных и тороидальных стоячих альфвеновских волн внутри магнитосферы. Показано, что поперечная структура основной гармоники стоячих альфвеновских волн похожа на структуру многополосных полярных сияний.

The structure and spectrum of standing Alfvén waves were theoretically investigated in a dipole magnetosphere with rotating plasma. The solutions of the equations were found that describe longitudinal (along field lines) and transverse (across magnetic shells) structures of standing Alfvén waves with high azimuthal wave numbers  $m \gg 1$ . Spectra were constructed for the several first harmonics of poloidal and toroidal standing Alfvén waves inside the magnetosphere. The transverse structure of basic harmonics of standing Alfvén waves was shown to be analogous to the structure of a discrete auroral arc.

### Введение

История теоретических исследований собственных МГД-колебаний земной магнитосферы насчитывает более полувека. Авторы большинства работ, в которых изучалась пространственная структура альфвеновских колебаний, использовали модели магнитосферы с покоящейся плазмой. Однако плазма реальной магнитосферы движется, причем характер этого движения различен в разных областях магнитосферы.

Впервые влияние этого фактора на спектр и структуру собственных альфвеновских колебаний дипольной магнитосферы было исследовано в [1]. Учет движения плазмы внутри магнитосферы и в области солнечного ветра привел к необходимости использования самосогласованной модели среды [2], т.е. модели, характеристики которой не задаются набором характерных параметров, а рассчитываются с использованием замкнутой самосогласованной системы уравнений магнитной гидродинамики. В работе [1] было показано, что азимутальное вращение плазмы магнитосферы приводит к дополнительному расщеплению спектра собственных альфвеновских колебаний.

В настоящей работе мы рассмотрим влияния движения плазмы на структуру и спектр собственных азимутально-мелкомасштабных ( $m \gg 1$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$  – азимутальное волновое число) альфвеновских колебаний в рамках самосогласованной дипольной модели магнитосферы. В частности, мы проведем детальное сопоставление структуры стоячей альфвеновской волны в направлении поперек магнитных оболочек с пространственной структурой дискретных дуг полярных сияний.

### Модель и основные уравнения

Для исследования альфвеновских колебаний используем систему уравнений идеальной МГД:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla P + \frac{1}{4\pi} [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}], \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\nabla(\rho \mathbf{v}), \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{P}{\rho^\gamma} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{B}$  – вектор напряженности магнитного поля,  $\mathbf{v}$  – вектор скорости,  $\rho$  – плотность и  $P$  – давление плазмы,  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $d/dt \equiv \partial/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$  – полная Лагранжева производная по времени. В стационарном состоянии ( $\partial/\partial t \equiv 0$ ) система уравнений (1) описывает распределение равновесных параметров плазмы  $P_0$ ,  $\rho_0$ ,  $v_0$  и  $B_0$ .

Электрическое поле поля резонансных альфвеновских колебаний с  $m \gg 1$  может быть выражено через их скалярный потенциал  $\phi$ :  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  [3]. После некоторых преобразований исходных уравнений, линеаризованных относительно малых возмущений, связанных с альфвеновскими колебаниями, получаем следующее уравнение для потенциала:

$$\nabla_1 \hat{L}_T \nabla_1 \phi - k_2^2 \hat{L}_P \phi + k_2 \frac{(\nabla_1 \Omega)}{\bar{\omega}} \hat{L}_{T0} \phi = 0, \quad (2)$$

где

$$\hat{L}_T = \hat{L}_{T0} - \beta_T, \quad \hat{L}_P = \hat{L}_{P0} - \beta_P$$

– тороидальный и полоидальный операторы,

$$\begin{aligned} \hat{L}_{T0} &= \frac{1}{\sqrt{g_3}} \nabla_3 \frac{p}{\sqrt{g_3}} \nabla_3 + p \frac{\bar{\omega}^2}{A^2}, \quad \hat{L}_{T0} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_3}} \nabla_3 \frac{p^{-1}}{\sqrt{g_3}} \nabla_3 + p^{-1} \frac{\bar{\omega}^2}{A^2} \end{aligned}$$

– операторы нулевого приближения в холодной ( $P_0 = 0$ ) неподвижной ( $\Omega = 0$ ) плазме,

$$\beta_T = \left(\frac{\Omega}{A}\right)^2 \frac{(\nabla_3 g_2)^2}{\sqrt{g_1 g_2}},$$

$$\beta_P = -\frac{p}{2} \left(\frac{s}{A}\right)^2 (\nabla_1 \ln g_2) \left( \nabla_1 \ln \frac{\rho_0 \sqrt{g_3}}{B_0} \right) -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{g_1 g_2}} \left(\frac{s}{A}\right)^2 (\nabla_1 \ln \frac{\bar{\omega}}{B_0}) \left( \nabla_1 \ln \frac{\rho_0^{1/\gamma} \sqrt{g_3}}{B_0} \right) -$$

– поправки, связанные с конечным давлением плазмы и ее движением,  $p = \sqrt{g_2/g_1} \pi$ ,  $\bar{\omega} = \omega - k_2 \Omega$ ,  $\Omega(x^1)$  – угловая скорость вращения плазмы,  $A$  – альфвеновская скорость,  $s$  – скорость звука.

### Пространственная структура и спектр альфвеновских колебаний

Воспользуемся свойством поперечной мелко-масштабности рассматриваемых колебаний и представим искомое решение уравнения (2) в виде

$$\varphi(x^1, x^2, x^3, \bar{\omega}) = U(x^1, \bar{\omega}) \exp(ik_2 x^2) [H(x^1, x^3, \bar{\omega}) + h(x^1, x^3, \bar{\omega})]. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), в главном порядке теории возмущений получим продольное уравнение  $(k_1^2 \hat{L}_T + k_2^2 \hat{L}_P)H = 0$ , определяющее структуру решения вдоль силовой линии (см. [4]), где  $k_1 = U^{-1} \partial U / \partial x^1$  – квазиклассическое волновое число по координате  $x^1$ . Граничные условия на ионосферах Южного и Северного полушарий в этом порядке имеют вид  $H(x_{\pm}^3) = 0$ . При  $k_1 \rightarrow \infty$  решение этой задачи определяет структуру тороидальных собственных мод альфвеновских колебаний и их собственные частоты, а при  $k_1 = 0$  – структуру собственных полоидальных колебаний и собственную полоидальную частоту. Решения этих предельных граничных задач, описывающие структуру колебаний между магнитосопрежженными ионосферами и имеющие вдоль силовых линий магнитного поля вид стоячих волн, представлены на рис. 2. Распределение собственных полоидальной и тороидальной частот этих колебаний поперек магнитных оболочек в системе покоя источника (на ионосфере) представлено на рис. 3. Из рис. 3 видно, что для генерации волн, бегущих в магнитосфере по азимуту в направлении вращения плазмы ( $m > 0$ ), частота источника  $\omega$  должна быть больше, чем для волн, распространяющихся в противоположном направлении ( $m < 0$ ). Отсюда, в частности, следует, что в магнитосфере с движущейся плазмой не могут устанавливаться колебания, стоячие по азимутальной координате.

Чтобы определить поперечную (поперек магнитных оболочек) структуру колебаний, построим модельное уравнение [5], применимое во всей области их существования, включая полоидальную и тороидальную резонансные поверхности. Используя преобразование Фурье, можно найти решение этого уравнения в виде

$$U_N(\xi) = i \frac{b_N}{\kappa_N} \int_0^{\infty} \frac{\exp[ik(\xi + i\varepsilon) + \alpha_N \arctg \psi(k)]}{\sqrt{k^2 - iqk + \kappa_N^2}} dk, \quad (4)$$

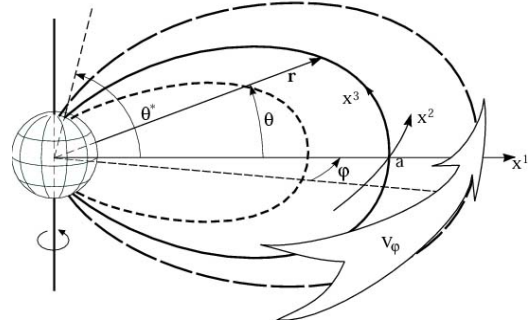


Рис. 1. Системы координат, связанные с силовыми линиями дипольного магнитного поля: криволинейная ортогональная система координат  $(x_1, x_2, x_3)$  и неортогональная система координат  $(a, \varphi, \theta)$ , использованная в численных расчетах.

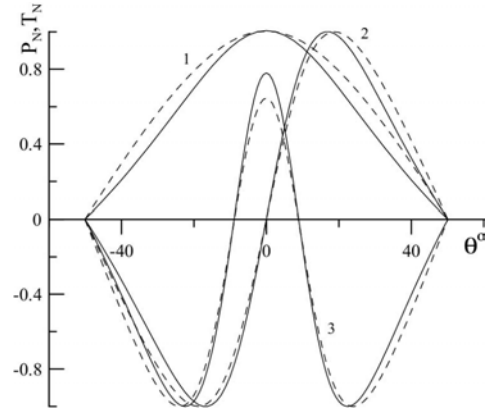


Рис. 2. Структура стоячих альфвеновских волн с тороидальной (сплошные линии) и полоидальной (пунктирные линии) поляризацией. Представлены графики полоидальной  $P_N$  и тороидальной  $T_N$  собственных функций с единичной амплитудой для первых трех продольных гармоник ( $N=1, 2, 3$ ).

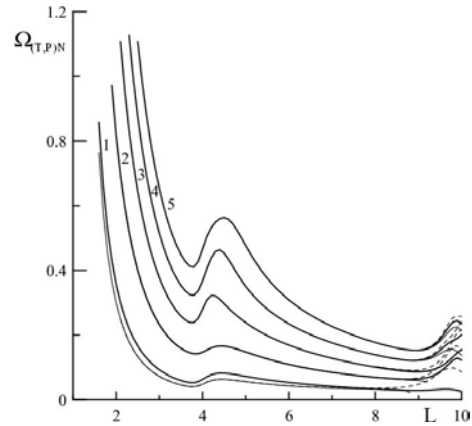


Рис. 3. Зависимость тороидальных (толстые линии) и полоидальных (тонкие линии) собственных частот  $\Omega_{P(T)N}$  первых пяти продольных гармоник ( $N=1, \dots, 5$ ) от параметра магнитной оболочки  $L$  в системе отсчета, связанной с источником. Приведенные значения полоидальных собственных частот соответствуют азимутальным гармоникам  $m=50$  (сплошные линии) и  $m=-50$  (пунктирные линии).

где  $\xi = (x^1 - x_{TN}^1) / \Delta_N$ ,  $\Delta_N = x_{TN}^1 - x_{PN}^1$  – расстояние между тороидальной и полоидальной резонансными поверхностями, положение которых определяется уравнениями  $\Omega_{TN}(x_{TN}^1) = \bar{\omega}$  и  $\Omega_{PN}(x_{PN}^1) = \bar{\omega}$  соответ-

ственно. Безразмерная величина  $\varepsilon = 2(\gamma_N / \bar{\omega})L / \Delta_N$  характеризует диссипацию альфвеновской волны в ионосфере, где  $\gamma_N$  — декремент затухания,  $L$  — характерный масштаб изменения функций  $\Omega_{P(T)N}(x^1)$ . Параметр  $\kappa_N \sim k_2 \Delta_N$  играет роль волнового числа по координате  $\xi$ , а величина  $b_N$  определяет амплитуду колебаний, источником которых являются сторонние токи в ионосфере. Кроме того, введены следующие обозначения:

$$q = -\Delta_N (\nabla_1 \ln \bar{\omega}), \quad \alpha_N = \frac{\kappa_N^2 + q/2}{\sqrt{\kappa_N^2 + q^2/4}},$$

$$\psi(k) = k \frac{\sqrt{\kappa_N^2 + q^2/4}}{\kappa_N^2 - ikq/2}.$$

Типичное поведение функции  $U_N$ , описывающей структуру  $N$ -й гармоники стоячих альфвеновских волн поперек магнитных оболочек для двух предельных значений  $\kappa_N \gg 1$  и  $\kappa_N \ll 1$  в случае их малого затухания ( $\varepsilon = 10^{-3}$ ), представлено на рис. 4. При  $\kappa_N \gg 1$  (рис. 4, а) решение представляет собой волну, бегущую от полоидальной резонансной поверхности ( $\xi = -1$ ) к тороидальной ( $\xi = 0$ ). При  $\kappa_N \ll 1$  (рис. 4, б) гармоническая структура колебаний исчезает и они представляются собой типичные резонансные колебания. Критическое значение  $\kappa_N$ , разделяющее эти типы структуры стоячих альфвеновских волн, равно  $\kappa_{Nc} = 1$ . На поперечную структуру колебаний влияет также величина их диссипации в ионосфере. При превышении некоторого определенного значения именно диссипация определяет характерный масштаб и структуру колебаний поперек магнитных оболочек.

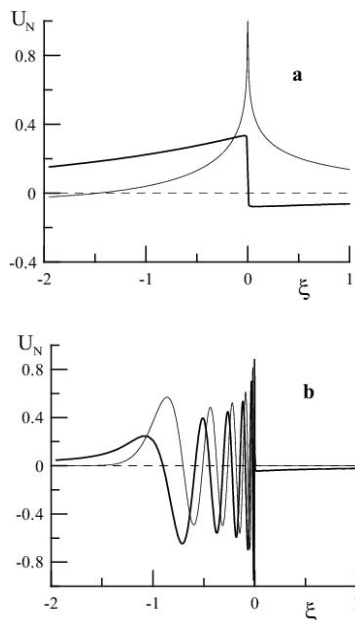


Рис. 4. Структура стоячих альфвеновских волн поперек магнитных оболочек в двух предельных случаях. На рисунке а представлены зависимости реальной (толстая линия) и мнимой (тонкая линия) составляющих функции  $U_N$ , описывающих структуру колебаний типа field line resonance, у которых  $\kappa_N = 0.1$ . На рисунке б представлены реальная и мнимая составляющие функции  $U_N$ , описывающей структуру колебаний типа «бегущая волна», у которых  $\kappa_N = 20$ .

### Сравнение структуры стоячих альфвеновских волн и дискретных дуг полярных сияний

Структура колебаний типа «бегущая волна» очень похожа на структуру наблюдаемых многополосных полярных сияний, связанных с мультиплетными структурами типа «перевернутого V» в потоках высыпавшихся в ионосферу частиц [6]. Типичное экваториальное расщепление резонансных магнитных оболочек  $\Delta_N \sim 2000$  км. При проектировании вдоль силовых линий дипольного магнитного поля это дает на уровне ионосферы  $\sim 60$ – $70$  км, что вполне соответствует типичным значениям ширины полос полярных сияний  $\sim 100$  км.

Число одновременно наблюдаемых структурных элементов (полос полярных сияний) может достигать 3–4, что соответствует количеству максимумов амплитуды альфвеновских колебаний с  $m \sim 100$  поперек магнитных оболочек. Нередко такие сияния обладают периодической структурой также и в азимутальном направлении (по долготе). Характерные пространственные размеры элементов азимутальной структуры лежат в диапазоне 5–60 км. Такие периодические структуры движутся как целое в азимутальном направлении со скоростями  $\sim 1$  км/с, до локальной полуночи — к западу, после полуночи — к востоку. Наблюдаемую долготную структуру полярных сияний можно интерпретировать как проявление азимутальной структуры стоячих альфвеновских волн с волновыми числами  $m \sim 10^2$ – $10^3$ .

### Заключение

Основные результаты данной работы:

1. Получено уравнение (3), описывающее структуру стоячих альфвеновских волн с большими азимутальными волновыми числами  $m \gg 1$  в дипольной магнитосфере с вращающейся плазмой.
2. Найдены решения уравнений, определяющие продольную структуру и спектр собственных частот полоидальных и тороидальных альфвеновских колебаний магнитосферы.
3. Построено модельное уравнение, описывающее поперечную структуру рассматриваемых альфвеновских колебаний во всей области их существования. Получено аналитическое решение (4) этого уравнения.
4. Проведено сравнение структуры наблюдаемых дискретных дуг полярных сияний со структурой стоячих альфвеновских волн с большими азимутальными волновыми числами  $m \gg 1$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов Д.А., Леонович А.С. Структура мелкомасштабных альфвеновских волн с  $m \gg 1$  в аксиально-симметричной магнитосфере с вращающейся плазмой // Труды VII Конференции молодых ученых «Взаимодействие полей и излучения с веществом», БШФФ-2004. Иркутск: ИСЗФ СО РАН, 2004. С. 170.
2. Leonovich A.S., Mazur V.A., Jin Bin Cao. Self-consistent model of a dipole-like magnetosphere with an azimuthal solar wind flow // J. Plasma Physics. 2004. V. 98. P. 99.
3. Leonovich A.S., Mazur V.A. Resonance excitation of standing Alfvén waves in an axisymmetric magnetosphere (monochromatic oscillation) // Planet. Space Sci. 1989 V. 37. P. 1095.

4. Леонович А.С., Мазур В.А. Теория поперечно-мелкомасштабных стоячих альфвеновских волн в аксиально-симметричной магнитосфере // Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца. Вып. 98: Волны в космической плазме. Новосибирск: Наука, 1992. С. 3.

5. Leonovich A.S., Mazur V.A. A theory of transverse small-scale standing Alfvén waves in an axially symmetric magnetosphere // Planet. Space Sci. 1993 V. 41. P. 697,

6. Надубович Ю. А. Морфологические исследования северных сияний. Новосибирск: Наука, 1992.

*Институт солнечно-земной физики СО РАН, Иркутск*