

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

Г.Н. Кичигин

NONLINEAR WAVES IN SPACE PLASMA

G.N. Kichigin

В работе подчеркивается важность изучения нелинейных волн, распространяющихся в космической плазме. Подробно исследуются установившиеся плоские нелинейные ленгмюровские волны в холодной бесстолкновительной плазме с неподвижными ионами в отсутствие магнитного поля. Определена область параметров, в которой существуют решения, описывающие нелинейные ленгмюровские волны, найден профиль волн.

The importance is emphasized of studying nonlinear waves propagating in space plasma. Steady flat nonlinear Langmuir waves in cold collisionless plasma with motionless ions in absence of a magnetic field are investigated in detail. The area of parameters is determined, in which there are solutions describing nonlinear Langmuir waves, the structure of waves is found.

Введение

Как известно [1], роль турбулентных шумов в динамике космической плазмы велика и это следует из того, что плотность энергии волновых движений плазмы сравнима с тепловым давлением. В этом случае амплитуды волн, возбуждаемых в плазме, не малы и потому необходимо рассматривать свойства волн в нелинейном приближении. Использование результатов линейной теории в этом случае может оказаться просто неправильным. К примеру, время жизни волн различно при использовании линейного и нелинейного приближений. В нелинейном приближении волны трансформируют функцию распределения частиц бесстолкновительной плазмы, а это приводит к выключению затухания Ландау и значительно увеличивает время жизни волн.

К настоящему времени при рассмотрении волновых возмущений в межзвездной среде большинство исследователей основное внимание уделяют альфвеновским волнам. Считается, как это и следует из линейного рассмотрения, что эта ветка колебаний самая долгоживущая, а все другие типы волн быстро затухают. По нашему мнению, как уже отмечено выше, применение линейного рассмотрения здесь не корректно, поэтому в космической плазме для волн конечной амплитуды вывод о преимущественной роли альфвеновских волн не совсем состоятелен. Преувеличение роли альфвеновских волн в плазменных процессах противоречит экспериментальным наблюдениям, проведенным на лабораторных плазменных установках и на космических аппаратах. Рассмотрим, для примера, волны вблизи околоземной ударной волны. Как следует из спутниковых измерений, во-первых, амплитуды измеряемых волн достаточно велики, во-вторых, в измеряемом спектре волн преобладают волны магнитозвукового типа. Повидимому, преобладание волн магнитозвукового типа характерно для областей, находящихся вблизи различного типа разрывов в плазме (ударные волны, контактные, вращательные и т.п. разрывы). Это подтверждено многочисленными экспериментами в лабораторной плазме. Не принижая роли альфвеновских волн в космической среде, мы хотим подчеркнуть, что в случае, когда амплитуды волн значительны, не меньшую роль в динамике плазмы играют такие типы низкочастотных волн, как ионно-звуковые, магнитозвуковые и др.

Как нам кажется, еще более странным выглядит тот факт, что при исследовании волн в межзвездной плазме практически не рассматриваются высокочастотные ветки колебаний, в частности, плазменные колебания и волны, несмотря на то, что это самая легко возбудимая ветка колебаний в плазме. Как известно, такие колебания и волны возникают при прохождении через плазму пучков частиц или потоков мощных электромагнитных излучений. Плазменные волны могут возбуждаться также при трансформации электромагнитных волн в неоднородной плазме. Если амплитуда плазменных волн велика, то в электрическом поле, возникающем за счет разделения зарядов в волне, возможно эффективное ускорение частиц плазмы, находящихся в резонансе с волной. В связи с этим изучение волн разделения зарядов, имеющих большую амплитуду, чрезвычайно важно. Именно значительное влияние на процессы в плазме, вызванное наличием в ней плазменных волн большой амплитуды, стимулировало появление данной работы, посвященной изучению плазменных волн в нелинейном приближении.

Свойства ленгмюровских волн бесконечно малой амплитуды – линейных волн – достаточно хорошо изучены [2, 3]. В последнее время особенно интенсивно исследуются плазменные волны большой амплитуды в связи с большими перспективами использования их в ускорительной технике. Впервые основополагающие результаты при исследовании нелинейных волн были получены в работах [4–6]. Позднее аналогичные результаты для ленгмюровских волн были независимо получены в работе [7]. К сожалению, полученные в [5–7] результаты фактически не дают полной информации о свойствах волн. В настоящей работе, используя исходные уравнения работ [5–7], мы до конца решили поставленную задачу, т.е. определили параметры, при которых существуют нелинейные решения, нашли все характеристики волн.

Постановка задачи и основные уравнения

Так же, как и в работах [5–7], рассмотрим плазму с холодными электронами и неподвижными ионами одного сорта в отсутствие внешнего магнитного поля. Для одномерной задачи предположим, что волна распространяется в направлении оси x со ско-

ростью u . В такой постановке все переменные зависят от координаты x и времени t . Приведем используемые в работах [5–7] уравнения, описывающие рассматриваемую плазменную волну:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e(n_0 - n), \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nv) = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial x} = -eE = e\frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (1)$$

Здесь E , ϕ – электрическое поле и потенциал; n_0 – плотность ионов; e , n , v , p – абсолютная величина заряда, плотность, скорость и импульс электронов соответственно. Для импульса используется формула: $p = m v \gamma_e$, где $\gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2}$, $\beta_e = v/c$; m – масса покоя электрона, c – скорость света. К уравнениям (1) присоединим уравнение для полной энергии электрона $mc^2\gamma_e$:

$$mc^2\left(\frac{\partial}{\partial t}\gamma_e + v\frac{\partial}{\partial x}\gamma_e\right) = -eEv. \quad (2)$$

Обозначив плазменную частоту электронов $\omega_p = (4\pi e^2 n_0 / m)^{1/2}$, перейдем в уравнениях (1), (2) к новым безразмерным переменным $\xi = (x - ut)\omega_p / c$, $\psi = e\phi / (mc^2)$. После такого перехода все переменные будут функцией только переменной ξ . Используя следующее из (1) соотношение $n_0 u = n(u - v)$, из уравнений (1), (2) получим законы сохранения

$$E^2 + 8\pi n_0 mc^2 (\gamma_e - 1) = E_0^2, \quad (3)$$

$$\gamma_e - 1 = \beta \beta_e \gamma_e + \psi. \quad (4)$$

Здесь $\beta = u/c$; E_0 – амплитуда электрического поля, которую принимает поле волны в точках, где $n = n_0$, $v = 0$, $\gamma_e = 1$, $\psi = 0$. Закон сохранения (3) совпадает с тем, который получен в работах [5–7]. Подставим в соотношение (3) величину γ_e , выраженную с помощью (4) через потенциал ψ , тогда закон сохранения (3) можно записать в виде

$$V(\psi, \gamma) = \varepsilon - E^2/2 = \gamma^2(1 + \psi) - 1 - \beta\gamma \sqrt{\gamma^2(1 + \psi)^2 - 1}, \quad (5)$$

где введены обозначения: $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ – параметр, связанный со скоростью волны, $E = -d\psi/d\xi$ – безразмерная величина электрического поля, $\varepsilon = E_0^2/2 = E_0^2 / (8\pi n_0 mc^2)$. Функция $V(\psi, \gamma)$ играет роль эффективного потенциала для рассматриваемой задачи [2, 8], причем величина ε – это энергия воображаемой частицы с массой, равной единице. Обратим внимание на то, что появление в задаче параметра $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ свидетельствует о том, что искомые решения в виде периодических волн потенциала возможны только при условии $u \leq c$. Как мы покажем ниже, такие решения существуют и, следовательно, описываемые этими решениями волны должны иметь фазовую скорость не больше скорости света.

Из (5) нетрудно видеть, что при $\psi = \psi_-^* = (1 - 1/\gamma)$ величина ε имеет максимальное значение: $\varepsilon_m = \gamma - 1$. Отсюда следует общепринятый результат [3]: при заданной фазовой скорости волн, т.е. при заданной величине параметра γ , решение рассматриваемой задачи существует только для нелинейных волн, имею-

щих амплитуду электрического поля, меньшую или равную предельной величине, которая равна $E_m = [8\pi n_0 mc^2 (\gamma - 1)]^{1/2}$. Как известно [2], нелинейная ленгмюровская волна формируется как результат конкуренции нелинейного укручения и дисперсионного расплывания некоторого начального возмущения, поэтому существование предельной амплитуды можно объяснить тем, что при амплитуде волны больше предельной E_m дисперсия не может остановить нелинейное укручение и волна «прокидывается». Для того чтобы отразить тот факт, что величина амплитуды электрического поля E_0 для заданной величины u не может быть больше E_m , представим параметр ε в виде $\varepsilon = E_0^2 / (8\pi n_0 mc^2) = \theta(\gamma - 1)$, где $\theta = \varepsilon / \varepsilon_m = (E_0 / E_m)^2 \leq 1$. Отметим, что параметр ε принимает значения от 0 до ∞ .

Свойства волн

Профиль потенциала волн

На рис. 1 для иллюстрации приведена зависимость от координаты потенциала и электрического поля нелинейной ленгмюровской волны, полученная из численных расчетов для $\varepsilon = 0.25$ ($\gamma = 1.5$, $\theta = 0.5$) и построенная на пространственном отрезке, равном одной длине волны. Зависимость потенциала от координаты найдена путем численного решения методом Рунге-Кутты дифференциального уравнения $d\psi/d\xi = 2[\varepsilon - V(\psi, \gamma)]$, которое следует из (5). На рис. 2 приведены графики, иллюстрирующие зависимость профиля релятивистской волны от параметра θ при постоянном значении параметра $\gamma = 10$. Из рис. 2 видно, что, несмотря на релятивистскую скорость движения, при малой амплитуде волны ($\theta < 10^{-5}$, $\varepsilon < 10^{-4}$), профиль волны синусоидальный. Рис. 2 также иллюстрирует общий вывод, который следует из численных расчетов положительной части профиля потенциала: при $\varepsilon > 1$ этот профиль параболический, а при значениях $\varepsilon \ll 1$, $\theta \ll 1$ профиль волны близок к косинусоидальному. В интервале $1 > \varepsilon > 10^{-4}$ все кривые, отображающие графики положительной части потенциала, лежат между графиками косинуса и параболы.

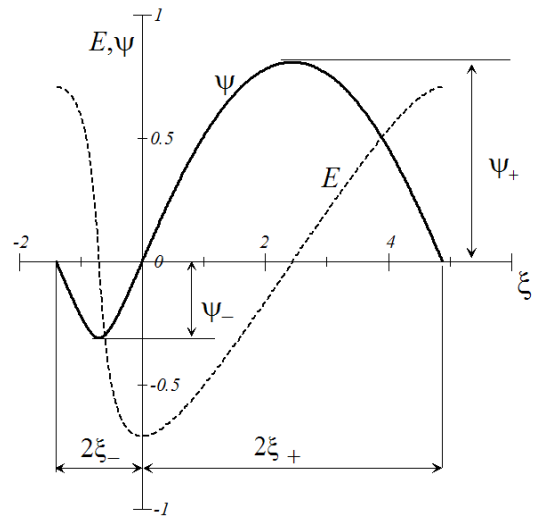


Рис. 1. Профиль потенциала и электрического поля волны для параметров: $\theta = 0.5$, $\gamma = 1.5$ ($\varepsilon = 0.25$)

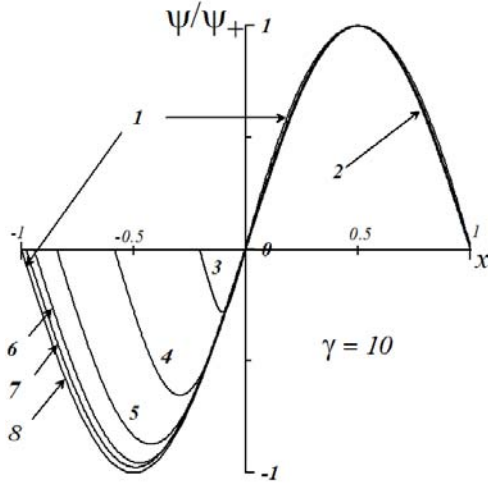


Рис. 2. Профиль потенциала в зависимости от величины электрического поля θ при постоянной скорости релятивистской волны ($\gamma = 10$). Координата по оси абсцисс $x = \xi/(2\xi_+)$. Кривая 1 – график синусоиды $y_1 = \sin(\pi x)$; 2 – график параболы $y_2 = 1 - (2x-1)^2$ (на отрезке $0 < x < 1$). Остальные пронумерованные кривые соответствуют различным значениям величины параметра θ : 3 – 10^{-1} ; 4 – 10^{-2} ; 5 – 10^{-3} ; 6 – 10^{-4} ; 7 – $3 \cdot 10^{-5}$; 8 – $\theta < 10^{-5}$

На рис. 3 представлена зависимость от параметра θ формы профиля волны, движущейся с малой скоростью ($\beta = 0.01$). В этом случае, напротив, несмотря на малую скорость движения волны, при приближении амплитуды волны к предельно возможной профиль сильно отличается от синусоидального (кривая 2). На рис. 4 приведена зависимость формы отрицательной части потенциала от параметров ε и θ . Как следует из численных расчетов, представленных на рис. 4, профиль отрицательной части потенциала при $\theta < 0.1$, $\varepsilon < 10^{-3}$ косинусоидальный, а при $\varepsilon > 10$ принимает треугольную форму. В интервале $10^{-3} < \varepsilon < 10$ все зависимости потенциала от координаты ложатся между кривыми, отображающими графики косинуса и пилы. Итак, мы приходим к следующим общим выводам: 1) форма профиля отрицательной части потенциала нелинейных волн – это либо косинус, либо пила, либо кривые, лежащие между ними, 2) форма положительной части – преимущественно косинус и парабола.

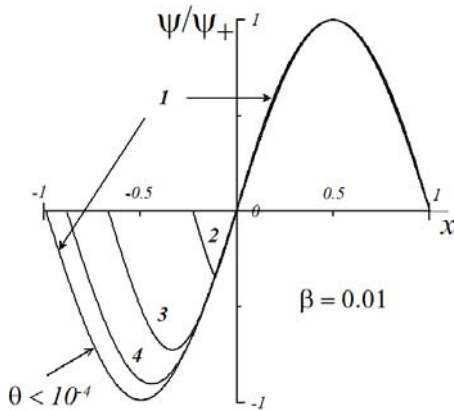


Рис. 3. То же, что на рис. 2, для волны, движущейся с постоянной, но с малой скоростью ($\beta = 0.01$). Кривая 1 – график синусоиды $y_1 = \sin(\pi x)$; 2 – $\theta = 1.0$; 3 – $\theta = 10^{-1}$; 4 – $\theta = 10^{-2}$.

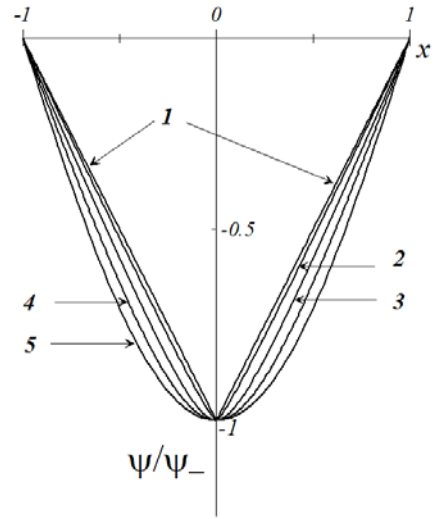


Рис. 4. Профиль отрицательной части потенциала волны. Координата по оси абсцисс $x = (\xi/\xi_-)$. Кривая 1 – график пилы $y_1 = |x| - 1$. Кривые 2–4 соответствуют различным наборам параметров θ и γ . Кривая 2 – $\theta = 1$, $\gamma = 11$; 3 – $\theta = 0.5$, $\gamma = 7$; 4 – $\theta = 0.5$, $\gamma = 1.02$; 5 – график косинуса $y_2 = -\cos(\pi x/2)$ и расчетные профили потенциала при $\theta = 0.1$, $\gamma = 1.01$.

Частота нелинейных волн

Для частоты с помощью соотношения (5) получим формулу $\omega = \omega(\varepsilon, \gamma) = \omega_p \pi \beta \sqrt{2} / J(\varepsilon, \gamma)$, где $J(\varepsilon, \gamma)$ – это интеграл

$$J(\varepsilon, \gamma) = \int_{\psi_-}^{\psi_+} \frac{d\psi}{\sqrt{\varepsilon - V(\psi, \gamma)}},$$

в котором функция $V(\psi, \gamma)$ определяется формулой (5), а величины ψ_- , ψ_+ находятся из соотношения $V(\psi, \gamma) = \varepsilon$. Интеграл $J(\varepsilon, \gamma)$ выражается через полный эллиптический интеграл второго рода $E(k)$:

$$J(\varepsilon, \gamma) = 2\sqrt{2} a \beta [\gamma(1-\beta)]^{1/2} E(k), \text{ где } k = [1 - (1 + \varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 + 2\varepsilon})^2]^{1/2}, a = [\gamma(1+\beta)(1 + \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 2\varepsilon})]^{1/2}.$$

Таким образом, для частоты нелинейных волн получим формулу:

$$\omega = \omega_p [1 + \theta(\gamma - 1) - \sqrt{\theta^2(\gamma - 1)^2 + 2\theta(\gamma - 1)}]^{1/2}$$

$(\pi/2)/E(k)$. (6) Из этой достаточно простой формулы следует очень важный вывод: частота нелинейных ленгмюровских волн контролируется двумя независимыми параметрами – θ и γ , первый из которых определяется отношением амплитуды электрического поля волны к предельно возможной, а второй – скоростью волны.

Основные выводы

1. Решения в виде периодических ленгмюровских волн существуют только при амплитудах электрического поля меньше предельной величины $E_m = [8\pi n_0 m c^2 (\gamma - 1)]^{1/2}$.

2. Фазовая скорость нелинейных ленгмюровских волн не превышает скорости света в вакууме. В этом отличие точного решения для нелинейных волн бесконечно малой амплитуды от решений, полученных

в линейном приближении для ленгмюровских волн в холодной плазме.

3. Частота нелинейных ленгмюровских волн определяется простым выражением (6).

4. Потенциал нелинейной ленгмюровской волны представляет собой периодическую структуру, причем амплитуда положительной части потенциала ψ_+ при $\varepsilon > 1$ существенно больше амплитуды отрицательной части $|\psi_-|$ ($\psi_+ / |\psi_-| \approx 2\varepsilon$). Профиль положительной части имеет преимущественно или косинусоидальную, или параболическую зависимость от координаты. Отрицательная часть потенциала имеет либо форму пила ($\varepsilon > 10$), либо форму косинуса ($\theta < 0.1$, $\varepsilon < 10^{-3}$), либо форму кривых, лежащих между графиками косинуса и пила.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березинский В.С., Буланов С.В., Гинзбург В.Л. и др. *Астрофизика космических лучей*. Под редакцией В.Л. Гинзбурга. М.: Наука, 1984. 354 с.
2. Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З. *Физика плазмы для физиков*. М.: Атомиздат, 1979. 320 с.
3. *Электродинамика плазмы*. Под ред. Ахиезера А.И. М.: Наука, 1974. 720 с.
4. Ахиезер А.И., Любарский Г.Я. // *ДАН*. 1951. Т. 80. № 2. С. 193.
5. Ахиезер А.И., Половин Р.В. // *ДАН*. 1955. Т. 102. № 5. С. 919.
6. Ахиезер А.И., Половин Р.В. // *ЖЭТФ*. 1956. Т. 30. С. 915.
7. Cavalier A. // *Nuovo Cimento*. 1962. V. 23. P. 440.
8. Кичигин Г.Н. // *Физика плазмы*. 2003. Т. 29. № 2. С. 172.

Институт солнечно-земной физики СО РАН, Иркутск