

УДК 612.396.22

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН В ИОНОСФЕРЕ И МЕЖПЛАНЕТНОЙ ПЛАЗМЕ:
КОРОТКОВОЛНОВЫЕ АСИМПТОТИКИ
МЕТОДА ПЛАВНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ РЫТОВА**

Я.А. Илюшин

**RADIO WAVE PROPAGATION IN THE IONOSPHERE AND
INTERPLANETARY PLASMA: SHORT WAVE ASYMPTOTICS
OF THE RYTOV APPROXIMATION**

Ya.A. Ilyushin

В работе получены и проанализированы асимптотические приближения для комплексной фазы поля в неоднородной среде в рамках метода плавных возмущений Рытова (МПВ). Обсуждается возможность применения полученных асимптотик при решении практических задач распространения радиоволн в ионосфере и межпланетной плазме.

The asymptotic approximations of the complex phase of the wave field in the inhomogeneous medium within the smooth inhomogeneities method by Rytov are obtained. The possibility of the practical utilization of these asymptotic solutions in the problems of wave propagation in the ionosphere and interplanetary plasma is discussed.

Введение

Одним из широко распространенных приближенных методов решения прямой задачи рассеяния электромагнитных волн является метод плавных возмущений (МПВ), предложенный С.М. Рытовым. Метод, в частности, применялся при анализе распространения волн в турбулентной атмосфере [1] и ионосфере с неоднородностями [2]. В рамках метода комплексная фаза поля представляется в виде некоторого бесконечного асимптотического ряда, слагаемые которого удовлетворяют бесконечной системе связанных дифференциальных уравнений. В настоящей работе исследуются асимптотики первых слагаемых ряда комплексной фазы поля в пределе больших волновых чисел.

Комплексная фаза волнового поля удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Phi + (\nabla\Phi)^2 + k^2 - q(\vec{r}) = 0.$$

Согласно МПВ, она представляется в виде ряда

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_0(\vec{r}) + v\Phi_1(\vec{r}) + v^2\Phi_2(\vec{r}) + v^3\Phi_3(\vec{r}) + v^4\Phi_4(\vec{r}) + \dots,$$

члены которого удовлетворяют бесконечной цепочке уравнений:

$$\Delta\Phi_0 + (\nabla\Phi_0)^2 + k^2 = 0,$$

$$\Delta\Phi_1 + 2\nabla\Phi_0\nabla\Phi_1 = q(\vec{r}),$$

$$\Delta\Phi_2 + 2\nabla\Phi_0\nabla\Phi_2 = -(\nabla\Phi_1)^2 \dots$$

Первое уравнение этой цепочки описывает распространение невозмущенной падающей волны в свободном пространстве. Все остальные уравнения этой цепочки различаются лишь правыми частями. Решения этих уравнений выражаются в виде квадратур:

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\exp(ik|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{\Psi_0(\vec{r}')}{\Psi_0(\vec{r})} f(\vec{r}') d^3r',$$

где через $f(\vec{r}')$ обозначена правая часть соответствующего уравнения. В частности, в случае плоской падающей волны решения имеют вид

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\exp(ikr')}{r'} \exp(ikz') f(\vec{r}') d^3r'.$$

Без ограничения общности будем считать, что регистрация поля производится в начале координат. Следуя работе [2], введем параболические координаты $x = \xi\eta\cos\phi$, $y = \xi\eta\sin\phi$, $z = (\eta^2 - \xi^2)/2$. В этих координатах переменные в интеграле полностью разделяются, и асимптотику решений в начале координат можно вычислить по лемме Эрдейи:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \xi d\xi \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \exp(ik\eta^2) f(\xi, \eta, \phi) \eta d\eta =$$

$$-\int_0^\infty \frac{1}{k} \sum_{n=0}^\infty \left(k^{-n/2} \frac{\Gamma(\frac{n+2}{2})}{2n!} \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left(\frac{i\pi(n+2)}{4}\right) \frac{\partial^n F(\xi, \eta, \phi)}{\partial \eta^n} \Big|_{\eta=0} \right) dz,$$

где $F(\xi, \eta, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi, \eta, \phi) d\phi$. Громоздкие выкладки, связанные с вычислением асимптотики, в этой работе не приводятся. После интегрирования по азимутальному углу ϕ , асимптотика первого приближения фазы $\Phi_1(\vec{r})$ с точностью до членов третьего порядка по k^{-1} в исходных декартовых координатах выражается формулой

$$\begin{aligned} \Phi_1(\vec{r}) = & \Phi_0(\vec{r}) - \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^z q(\vec{r}) dz + \\ & + \frac{1}{4k^2} q(\vec{r}) + \frac{1}{4k^2} \int_{-\infty}^z (z-z_1) \Delta_{\perp} q(\vec{r}_1) dz_1 + \\ & + \frac{i}{16k^3} \int_{-\infty}^z (z-z_1)^2 \Delta_{\perp}^2 q(\vec{r}_1) dz_1 + \\ & + \frac{i}{4k^3} \int_{-\infty}^z \Delta_{\perp} q(\vec{r}_1) dz_1 + \frac{i}{8k^3} \frac{\partial q(\vec{r})}{\partial z}. \end{aligned}$$

Вторая итерация комплексной фазы поля выражается в виде интеграла

$$\Phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\exp(ikr')}{r'} \exp(ikz') (\nabla \Phi_1(\vec{r}'))^2 d^3r'.$$

Очевидно, асимптотика $\Phi_2(\vec{r})$ третьего порядка определяется главной асимптотикой первой итерации фазы:

$$\begin{aligned} \Phi_1^0(\vec{r}) = & -\frac{i}{2k} \int_{-\infty}^z q(z) dz \sim 1/k, \\ \nabla \Phi_1^0(\vec{r}) = & -\frac{i}{2k} \left\{ \int_{-\infty}^z \frac{\partial q(\vec{r})}{\partial x} dz, \int_{-\infty}^z \frac{\partial q(\vec{r})}{\partial y} dz, q(\vec{r}) \right\} = \\ = & -\frac{i}{2k} \left\{ \int_{-\infty}^z \nabla_{\perp} q(\vec{r}) dz, q(\vec{r}) \right\}. \end{aligned}$$

Собирая вместе все слагаемые и интегрируя по частям, получим окончательное выражение для асимптотики комплексной фазы поля с точностью до членов третьего порядка малости по k^{-1} включительно:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) - \Phi_0(\vec{r}) = & -\frac{i}{2k} \int_{-\infty}^z q(\vec{r}) dz + \frac{1}{4k^2} q(\vec{r}) + \\ & + \frac{1}{4k^2} \int_{-\infty}^z (z-z_1) \Delta_{\perp} q(\vec{r}_1) dz_1 + \frac{i}{16k^3} \int_{-\infty}^z (z-z_1)^2 \Delta_{\perp}^2 q(\vec{r}_1) dz_1 + \\ & + \frac{i}{8k^3} \frac{\partial q(\vec{r})}{\partial z} + \frac{i}{4k^3} \int_{-\infty}^z \Delta_{\perp} q(\vec{r}) dz + \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^z (\nabla \Phi_1^0(\vec{r}))^2 dz + \dots, \end{aligned}$$

где присутствуют также и локальные члены, обращаемые в нуль за пределами области локализации рассеивающего потенциала. Первые два локальных члена совпадают с соответствующими членами разложения по методу ВКБ:

$$\begin{aligned} \psi(z) = & \frac{C}{(k^2 - q(z))^{1/4}} \exp(ik \int \sqrt{k^2 - q(z)} dz), \\ \Phi(z) = \ln \psi(z) \approx & -\frac{1}{4} \ln k^2 + ikz - \frac{i}{2k} \int q(z) dz + \frac{q}{4k^2} + \dots \end{aligned}$$

Численное моделирование

Для проведения численных оценок использовался сферически-симметричный модельный рассеиватель бесконечного порядка гладкости вида

$$q(r) = q_0 \exp\left(-\frac{(r/r_0)^2}{1-(r/r_0)}\right),$$

для которого существуют производные всех порядков по координатам. Приближенные решения, полученные в данной работе, сравнивались с точным решением уравнений электромагнитного поля, полученным методом парциальных волн [3]. Сравнение полей проводилось на плоскости, расположенной непосредственно позади рассеивателя (рис. 1). Результаты сравнительного анализа полей для объектов различных размеров и плотностей приведены на рис. 2–4. Размеры и плотности рассеивателей приведены к безразмерным переменным q/k^2 и kr , нормированным на единицу длины волны. Все значения комплексной фазы (эйконала) поля относятся к центру плоскости регистрации, расположенному позади геометрического центра рассеивающего объекта, т.е. на оси рассеивателя.

На рис. 2 показана зависимость эйконала точного решения от параметров рассеивателя. В области сильно рассеивающих потенциалов монотонный рост эйконала с ростом плотности рассеивателя прекращается, так как начинают сказываться дифракционные эффекты. Погрешность третьего приближения фазы, т.е. разность между полученной нами асимптотикой комплексной фазы и эйконалом точного решения, в зависимости от параметров рассеивателя отображена на рис. 3. Видно, что в широкой области параметров указанная погрешность весьма мала, за исключением сильных рассеивателей относительно малого размера. На рис. 4 отдельно показан вклад третьего слагаемого в асимптотическое выражение для комплексной фазы поля. Как можно видеть из рисунка, даже в области малых сильных рассеивателей абсолютная величина этого вклада не превышает одного радиана. Следовательно, полная погрешность аппроксимации эйконала полученным

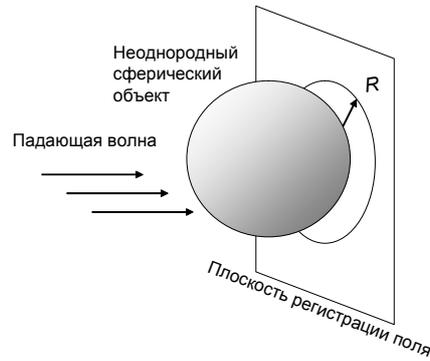


Рис. 1. Геометрическая схема численного эксперимента

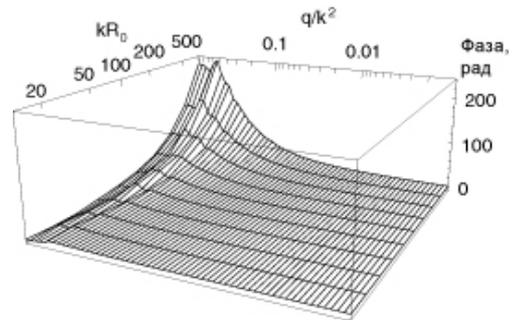


Рис. 2. Эйконал поля на оси рассеивателя. Точное решение.

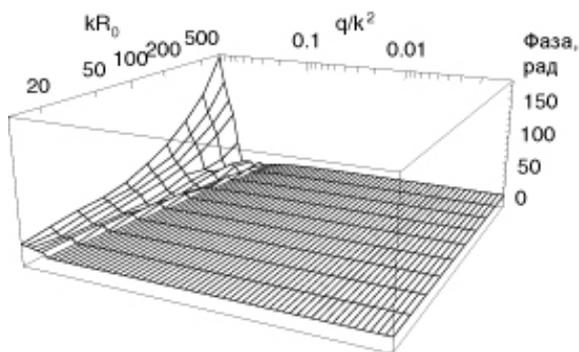


Рис. 3. Эйконал поля на оси рассеивателя. Погрешность третьего приближения.

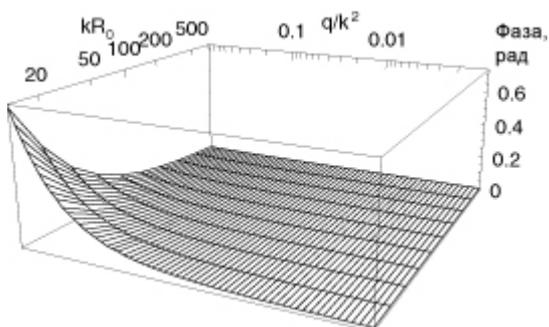


Рис. 4. Эйконал поля на оси рассеивателя. Вклад третьего слагаемого асимптотического разложения.

нами приближением определяется высшими членами асимптотического разложения фазы, не исследованными в данной работе. В то же время первое слагаемое асимптотического разложения, соответствующее хорошо известному приближению «фазового экрана», удовлетворительно описывает точное

решение в весьма широкой области значений масштабов и плотностей рассеивающих объектов.

Заключение и выводы

В работе найдены высшие коротковолновые асимптотические приближения решений уравнения Гельмгольца методом МПВ. Проведены численные оценки полученных асимптотик и произведено сравнение их с точными решениями уравнения Гельмгольца для широкого класса рассеивающих потенциалов. Указаны границы применимости рассмотренных асимптотических приближений. Обосновано предпочтительное применение первого приближения, т.е. «фазового экрана», при решении задач рассеяния метровых и более коротких волн на типичных неоднородностях ионосферной плазмы.

Настоящая работа частично поддержана грантами РФФИ 02-05-65350 и 03-05-06301.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II: Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.
2. Куницын В.Е., Терещенко Е.Д. Томография ионосферы. М.: Наука, 1991. 178 с.
3. Бабиков В.Ф. Метод фазовых функций в квантовой механике. М.: Наука, 1988. 286 с.